



UNIVERSITÉ MOHAMMED V – AGDAL
FACULTÉ DES SCIENCES
Rabat



N° d'ordre 2700

THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

OKOU Guéï Cyrille

Discipline : Mathématiques Appliquées

Spécialité : Statistiques

**Estimation du risque financier par l'approche de Peaks Over
Threshold (POT) et de la théorie des copules**

Soutenue le 01/03/2014 devant le jury

Président

Pr. GUENNOUN Zine El Abidine Professeur à la Faculté des Sciences.
Université Mohammed V-Agdal. Rabat.

Examineurs

Pr. BELBACHIR Mohammadine Professeur à la Faculté des Sciences.
Université Mohammed V-Agdal. Rabat.

Pr. EL HIMDI Khalid Professeur à la Faculté des Sciences.
Université Mohammed V-Agdal. Rabat.

Pr. CHAOUBI Abdelaziz Professeur à l'Institut National de la Statistique
et d'Économie Appliquée (INSEA), Rabat.

Pr. EZZAHID Elhadj Professeur Habilité à la FSJES.
Université Mohammed V-Agdal. Rabat.

Pr. EL ADLOUNI Salaheddine Professeur à la Faculté des Sciences.
Université de Moncton, New Brunswick, Canada.

Pr. ZOGLAT Abdelhak Professeur à la Faculté des Sciences.
Université Mohammed V-Agdal. Rabat.

Au nom de Dieu le Tout

Miséricordieux, le très

Miséricordieux

Gloire au bon Dieu qui m'a permis

de mener à bien les travaux et qui

m'a facilité l'élaboration de cette

thèse.

AVANT PROPOS

Ce travail de thèse a été réalisé au laboratoire de Mathématiques appliquées à la Faculté des Sciences de Rabat, Université Mohammed V-Agdal, sous la direction de Monsieur Abdelhak ZOGLAT, professeur de l'enseignement supérieur et responsable dudit laboratoire.

Cette thèse a été effectuée sous la co-direction de Monsieur Salah-Eddine EL ADLOUNI, professeur à la Faculté des Sciences, Université de Moncton au Canada.

Je remercie Monsieur Abdelhak ZOGLAT pour m'avoir accueilli dans son laboratoire et pour toute l'aide qu'il m'a apportée dans la réalisation de cette thèse. Son intérêt et ses conseils m'ont été très précieux pour structurer et améliorer la qualité du travail. Il m'a transmis la passion de la recherche mathématique, m'a encouragé et soutenu durant ces quatre années. Qu'il soit assuré de ma sincère reconnaissance et de ma profonde sympathie.

Pendant ces années d'étude, j'ai pu apprécier non seulement ses connaissances scientifiques méticuleuses, mais aussi sa grande dimension humaine. Il est difficile de trouver des qualificatifs assez forts pour souligner sa gentillesse et son humilité. J'en profite pour lui exprimer ici ma plus profonde gratitude.

Je me sens très redevable de tout l'effort qu'il a déployé pour rendre mon séjour agréable au sein de son laboratoire. Honnêtement, je ne saurai partir sans lui relater ma totale satisfaction sous sa direction.

Mes remerciements vont conjointement à Monsieur Salah-Eddine EL ADLOUNI, pour sa gentillesse et pour l'aide qu'il m'a apportées au cours de ce travail. Son intérêt, son orientation dans le suivi de mes travaux et ses précieux conseils m'ont été d'un grand profit. Je le remercie également pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse.

Je tiens également à remercier Monsieur Zine El Abidine GUENNOUN, professeur à la Faculté des Sciences de Rabat, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je tiens à adresser ma profonde reconnaissance à Monsieur Mohammadine BELBACHIR, professeur à la Faculté des Sciences de Rabat, qui a accepté de juger cette thèse en qualité de rapporteur. Je le remercie pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail, et lui suis reconnaissant d'avoir pu bénéficier de ses conseils qui ont contribué à l'amélioration de ce manuscrit. Je suis particulièrement honoré de sa présence dans ce jury de soutenance. Je lui exprime ici ma plus haute considération.

Mes remerciements vont également à Monsieur Khalid EL HIMDI, professeur à la Faculté des Sciences de Rabat, d'avoir accepté de participer au jury de cette thèse. Je le remercie pour l'intérêt et la considération qu'il a portés à ce travail. Je lui adresse mes sincères remerciements ainsi que ma profonde gratitude.

J'exprime mes profonds remerciements à Monsieur Abdelaziz CHAOUBI, professeur à l'Institut National de la Statistique et d'Économie Appliquée (INSEA) de Rabat, de m'avoir fait l'honneur de participer au jury.

Mes sincères remerciements vont à l'endroit de Monsieur Elhadj EZZAHID, professeur habilité à la Faculté des Sciences Juridiques, Économiques et Sociales de Rabat pour ses discussions et ses encouragements tout au long de ces années de recherche. Je vous remercie également pour votre participation à ce jury.

Je remercie Messieurs Driss MISANE, Mohamed EL KADIRI et Khalid RAHHALI, tous professeurs au département de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Rabat pour la qualité de leur enseignement et de leur encouragement durant mon parcours académique au sein de cette Faculté. Qu'ils soient tous honorés par ce travail.

Je tiens également à remercier tous mes amis et collègues du laboratoire de Mathématiques appliquées pour leur aide, leur soutien et leur gentillesse. Je souhaite également les remercier pour la confiance dont ils ont fait preuve à mon égard. Les rapports humains dont j'ai profité à leur côté, ont fait naître de réels liens d'amitiés et de fraternité, qui à mes yeux n'ont pas de prix. Qu'ils soient tous assurés de ma plus profonde gratitude et estime. J'exprime en particulier ma gratitude à Amine AMAR : Celui que j'appelle couramment "Chef", Fadoua BADAoui et Badreddine BENYACOUB pour toute l'aide qu'ils ont su m'apporter.

Mes remerciements vont à l'endroit des membres de la représentation diplomatique de la République de Côte d'Ivoire accrédités au Maroc qui m'ont permis d'arriver au bout de la recherche grâce à leur soutien, leur conseil, leur sollicitude et leur encouragement. Soyez assurés de ma profonde reconnaissance. Je garde en mémoire toutes nos belles expériences professionnelles et personnelles partagées.

Qu'il me soit permis également de remercier l'État Marocain, le peuple marocain et particulièrement l'Agence Marocaine de Coopération Internationale (A.M.C.I) qui m'a permis de porter à terme ce travail.

Je tiens également à remercier tous ceux qui ont croisé ma route et l'ont toujours agrémenté de conseils, d'expériences, de sollicitude et d'encouragements. Un grand merci aux familles YARD, BAKAYOKO et YAPI à Abidjan. Je remercie particulièrement la famille BODO pour leur soutien et précieux conseils qu'ils m'ont apportés durant mes années d'étude supérieure. Trouvyez ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

Je suis particulièrement reconnaissant envers toutes les personnes et les amis qui m'ont apporté leur soutien inestimable et leur encouragement tout au long de ma recherche. Qu'elles veuillent trouver ici l'assurance de ma totale gratitude.

Enfin, je souhaite remercier mes frères et soeurs qui me soutiennent toujours et m'entourent. Vous êtes mes racines et ma destination de prédilection. Vous m'avez transmis la persévérance, la volonté et le goût de la vie. Soyez tous honorés par ce travail.

DÉDICACE

Ce modeste travail est le fruit de quelques années d'études, il vient conclure un parcours scolaire et universitaire durant lequel j'ai constamment bénéficié de la bienveillance et du soutien de personnes qui me sont très chers. Ainsi, je tiens à exprimer ma sincère gratitude envers ces personnes en leur dédiant cette thèse.

Je dédie ce travail en premier à ma très chère grande soeur Christine OKOU. Aucun mot ne saurait exprimer à sa juste valeur mon grand amour, mon respect et ma reconnaissance pour tout ce qu'elle a fait pour moi et continue de faire pour ma formation, mon éducation et mon bien être, aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de ses sacrifices, de ses efforts et de l'affection dont elle n'a cessé de me procurer. Merci pour ton dévouement et ta patience, je prie le bon Dieu de pouvoir récompenser tous vos efforts et vos peines. Que Dieu te protège. Je t'aime Grande soeur.

Ma deuxième pensée va à ma tante Allegne Justine GOSSE qui a constamment su veiller sur moi, me guider et me réconforter. Merci pour ton affection, ta compréhension et ton apport qui a toujours eu une grande place dans mon esprit. Je demande au bon Dieu de te protéger et de guider tes pas.

Sans oublier ma mère que j'aime énormément, je prie le bon Dieu pour qu'il lui donne une santé de fer et une longévité.

Je ne peux finir ces dédicaces sans avoir une pensée profonde pour mon père. Cet homme qui m'a beaucoup aimé et à qui je dois toute cette formation. Je prie toujours le bon Dieu qu'il le garde auprès de lui.

Table des matières

Table des matières	7
Bibliographie	12
1 Estimation du risque par l'approche " Peaks Over Threshold (POT) "	20
1.1 Introduction	20
1.2 La méthode " Block Maxima (BM) "	21
1.3 La méthode "Peaks Over Theshold (POT)"	22
1.4 Conclusion	27
2 Application de l'approche Peaks Over Threshold (POT) aux indices boursiers	28
2.1 Introduction	28
2.2 Application aux indices boursiers : cas du CAC40	29
2.2.1 Les données	29
2.2.2 Méthodes de la sélection des seuils	30
2.2.3 Résultats	33
2.3 Conclusion	35
3 La Théorie des copules : Propriétés et théorèmes	37
3.1 Introduction	37
3.2 Définitions et propriétés des copules	38
3.3 Mesures de dépendance	43
3.4 Les copules paramétriques	46
3.4.1 Les copules Archimédiennes	46
3.4.2 Les copules extrêmes	52
3.5 Conclusion	54
4 Contribution des copules pour l'amélioration de la prévision des agrégats macro-économiques et des indices boursiers	55

4.1	Introduction	55
4.2	Quelques outils méthodologiques	58
4.2.1	Extension du théorème de Sklar	58
4.2.2	Exemples pour la construction des copules conditionnelles . . .	61
4.2.3	Analyse univariée des séries chronologiques	63
4.2.4	Ajustement des modèles séries chronologiques	66
4.2.5	Ajustement des copules pour des séries autocorrélées	67
4.2.6	Ajustement des copules pour des séries non autocorrélées	68
4.3	Application des copules conditionnelles aux séries temporelles et aux rendements boursiers	68
4.3.1	Données étudiées	69
4.3.2	Modélisation univariée des variables macroéconomique et indices boursiers	74
4.3.3	Modélisation de la dépendance	77
4.3.4	Prévision	86
4.4	Conclusion	90
5	Conclusion Générale et Perspectives	91

Liste des tableaux

4.1	Tableau des résultats de l'estimation des paramètres du modèle AR(3)	75
4.2	Tableau des résultats de l'estimation des paramètres du modèle AR(2)	76
4.3	Les copules les plus utilisées en Finance	81
4.4	Les résultats de la Moyenne Quadratique des Erreurs pour le couple (Taux de Change, Inflation)	82
4.5	Les résultats de la Moyenne Quadratique des Erreurs pour le couple (Nasdag, DJIA)	83
4.6	Tableau de l'estimation des paramètres des copules du couple (Taux de Change, Inflation)	84
4.7	Tableau de l'estimation des paramètres des copules du couple (Nasdag, DJIA)	84
4.8	Tableau de P-value couple (Taux de change, Inflation) pour les diffé- rentes familles de copules	84
4.9	Tableau de P-value du couple (Nasdag, DJIA) pour les différentes fa- milles de copules	85
4.10	Tableau des prévisions des copules ajustées et du modèle Autorégressif AR	88
4.11	Tableau de l'Erreur Moyenne Quadratique de la prévision de l'Inflation lissée des copules et du modèle Autorégressifs AR	88
4.12	Tableau des prévisions des copules ajustées et du modèle Autorégressif AR	89
4.13	Tableau de l'Erreur Moyenne Quadratique de la prévision issue des co- pules et du modèle AR	89

Table des figures

1.1	Block des maxima	21
1.2	Excès au dessus d'un seuil u	23
2.1	Evolution de l'indice CAC40 du 01 Mars 1990 au 20 décembre 2010 . .	30
2.2	MRL plot de l'inverse des rendements de l'indice CAC40	33
2.3	QQ plot des différents modèles.	35
3.1	Graphique en dimension 2 de la Copule de Gumbel de paramètre = 8.5	49
3.2	Densité de la Copule de Gumbel de paramètre = 8.5	49
3.3	Graphique en dimension 2 du Plot de la Copule de Clayton de paramètre = 3.5	51
3.4	Densité de la copule de Clayton de paramètre = 3.5	51
3.5	Graphique en dimension 2 du Plot de la Copule de Frank de paramètre = 10.5	53
3.6	Densité de la copule Frank de paramètre = 10.5	53
4.1	l'inflation mensuelle Mars 1999-Octobre 2010	70
4.2	L'évolution du taux de change mensuel Mars 1999-Octobre 2010	71
4.3	L'évolution de l'inflation et du taux de change 1999-2010	72
4.4	l'évolution de l'indice DJIA de janvier 1999 à Décembre 2010	73
4.5	l'évolution de l'indice Nasdag de janvier 1999 à Décembre 2010	74
4.6	l'évolution des indices DJIA et le Nasdag sur la période de janvier 1999 à Décembre 2010	74
4.7	Le graphique de l'inflation et inflation normalisée lissée	75
4.8	Le graphique de la copule empirique du couple (Taux de Change, Infla- tion)	78
4.9	Le graphique de la copule empirique du couple (Nasdag, DJIA)	79
4.10	Graphique des prévisions issues des modèles ajustés	88
4.11	Comparaison des différentes techniques de prévision de l'indice DJIA .	90

5.1	Graphique de ACF et PACF pour l'inflation transformée	107
5.2	Graphique de ACF et PACF des résidus du modèle AR3	107
5.3	Graphique de ACF et PACF du Taux de change normalisé	108
5.4	Graphique de ACF et PACF des résidus du modèle AR2	108
5.5	Graphique de la Moyenne des Erreurs Quadratiques (Sme) des copules Clayton, Plackett, Galambos, Frank et Independante du couple (Taux de Change, Inflation)	108
5.6	Graphique de la Moyenne des Erreurs Quadratiques (Sme) de la copule Gumbel du couple(Taux de Change, Inflation)	109
5.7	Graphique de la Moyenne des Erreurs Quadratiques (Sme) de la copule Hurler-Reiss du couple (Taux de Change, Inflation)	109
5.8	Graphique de la Moyenne des Erreurs Quadratiques (Sme) des copules Normale et Student du couple (Taux de Change, Inflation)	110
5.9	Graphique de la Moyenne des Erreurs Quadratiques (Sme) de la copule Hurler-Reiss du couple (Nasdag, DJIA)	110
5.10	Graphique de la Moyenne des Erreurs Quadratiques (Sme) des copules Normale et Student pour le couple (Nasdag, DJIA)	111
5.11	Graphique de la Moyenne des Erreurs Quadratiques (Sme) des copules Clayton, Plackett, Galambos, Gumbel, Frank et Independante du couple (Nasdag, DJIA)	111
5.12	Graphique qqplot des copules de Clayton, Gumbel, Frank, Normale et Placket	112
5.13	Graphique qqplot des copules de Frank, Placket, Normale et tcopula . .	112

Abréviations

- ◇ POT : Peaks Over Thresholds
- ◇ BM : maxima par block
- ◇ SEM : Méthode des Erreurs Quadratiques
- ◇ ATSM : Méthode de sélection de Seuil Automatique
- ◇ MTM : Méthode de Seuils Multiples
- ◇ GPD : Distribution de Pareto Généralisée
- ◇ CAC40 :Cotation Assistée en Continu
- ◇ ARMA : modèle Autorégressif et Moyenne-Mobile
- ◇ DJIA :Dow Jones Industrial Average
- ◇ NASDAQ :National Association of Securities Dealers Automated Quotations
- ◇ C-Quantile : Quantiles Copules
- ◇ TVE : Théorie des Valeurs Extrêmes
- ◇ i.i.d : indépendantes et identiquement distribuées
- ◇ GEV : Generalized Extreme Value
- ◇ MDA : Max-domaine d'attraction
- ◇ SME : moyenne quadratique des erreurs
- ◇ ML : maximum de vraisemblance
- ◇ MM : Méthode des Moments
- ◇ FME : Fonction de Moyenne des Excès
- ◇ MRL plot : Mean Residual Life Plot
- ◇ QQ plot : Quantile-Quantile Plot
- ◇ Adup test : the upper tail Anderson-Darling test
- ◇ TCL : Théorème Central Limite
- ◇ AR : modèle Autorégressif

- ◇ VAR : modèle de vecteurs Autorégressifs
- ◇ MCO : moindres carrés ordinaires
- ◇ GARCH : Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity
- ◇ IPC : indice des prix à la consommation
- ◇ IPCH : indice des prix à la consommation harmonisé
- ◇ ACF : fonction d'autocorrélation
- ◇ PACF : fonction d'autocorrélation partielle

Résumé

La théorie des valeurs extrêmes (TVE) occupe, depuis plusieurs années, une place privilégiée dans la recherche statistique pour la gestion des risques. Cette thèse contribue au développement de cet axe de recherche par l'introduction de nouveaux outils d'analyse et de décision ou par l'adaptation d'outils existant. Notre travail est divisé en quatre grandes parties. Dans la première partie, nous nous intéressons aux fondements de la théorie des valeurs extrêmes (TVE), en mettant l'accent sur l'approche de Peaks-Over-Threshold (POT). L'approche de POT consiste à approximer la loi des excès au-delà d'un seuil par une loi de Pareto généralisée (GPD). Dans cette partie, nous explorons les résultats classiques du théorème de Pickands. Nous abordons la problématique du choix d'un seuil optimal au delà duquel la loi de probabilité conditionnelle des excès peut être approximée par une Distribution Pareto Généralisée (GPD). La deuxième partie concerne l'application de la TVE pour la gestion du risque financier. Cette application a permis de développer des méthodes d'estimation du seuil optimal par l'approche de Peaks Over Threshold (POT). La troisième partie est réservée à la théorie des copules. Les copules sont des outils mathématiques flexibles qui modélisent la structure de dépendance entre les variables. Cette partie traite les techniques qu'offrent les copules pour analyser les variables multivariées. La quatrième partie a été consacrée à l'application des copules pour modéliser les variables macro-économiques et les extrêmes des indices boursiers. Cette application aborde la modélisation de la dépendance entre variables aléatoires par les copules. Nous utilisons ensuite les modèles de copules ajustés pour faire la prévision de ces variables.

Les Mots Clés : Peaks Over Thresholds, Distribution de Pareto Généralisée, Copule, prévision

Abstract

The extreme value theory (TVE) occupies for several years, a privileged position in statistical research for risk management instead. This thesis contributes to the development of this research by the introduction of new analytical tools and decision-making or adapting existing tools. Our work is divided into four main parts.

In the first part, we focus on fundamentals of the extreme value theory (TVE), with emphasis on Peaks-Over-Threshold (POT) approach. The POT approach consists to approximate the law of excess above a threshold by a law of generalized Pareto distribution (GPD). In this section, we explore the classical results of Pickands theorem. We address the problem of selecting an optimal threshold. The second part concerns the application of TVE for financial risk management. This application has developed the methods to estimate the optimal threshold by Peaks Over Threshold (POT) approach. The third part is reserved to the theory of copulas. Copulas are flexible mathematical tools that model the dependence structure between random variables. This section discusses the techniques offered by copulas to analyze multivariate variables. The fourth part was dedicated to the application of copulas to model the macro-economic and extreme market indices variables. This application addresses the modeling of the dependence between random variables with copulas. We then use copula models adjusted for forecasting these variables.

Keywords : Peaks Over Thresholds, generalized Pareto distribution, Copula, Forecasting.

Introduction Générale

Depuis les dernières décennies, le monde assiste à une multiplication de phénomènes dits extrêmes. Ces phénomènes sont aussi violents que variés. Nous pouvons citer à titre d'exemples, les sécheresses, les cyclones, les canicules, les inondations, les crises financières et les crashes boursiers. Ces phénomènes caractérisés par de faibles probabilités d'apparition, ont des dommages et des conséquences pesantes. En climatologie par exemple, les grandes sécheresses ont vigoureusement affecté les écosystèmes et les économies de plusieurs pays de l'Afrique de l'Ouest. En économie, la zone euro a connu beaucoup de perturbations, notamment une grande récession, un ralentissement de la croissance, une crise aiguë des subprimes et une chute de plusieurs bourses européennes. Aux États-Unis, la crise immobilière a fait des ravages. Elle a particulièrement provoqué des vagues de licenciements dans plusieurs secteurs comme le bâtiment et la finance.

Les événements extrêmes récurrents ont des impacts négatifs sur la plupart des systèmes économiques, sociaux et environnementaux dans le monde. Ainsi, les scientifiques et les décideurs s'intéressent à développer des outils de gestion et d'évaluation des risques liés aux phénomènes extrêmes, en combinant les avantages des modèles climatiques, météorologiques, financiers et économiques. En hydrologie, domaine dans lequel la prévision est particulièrement importante, les chercheurs ont proposé des outils de description et de prévision basés sur l'analyse fréquentielle (Smith et al.(1992, [199]), Déqué (2007,[56]),). En finance, la majorité des banques ont développés des modèles internes pour mesurer les risques sous forme de portefeuille, en tenant compte de leurs dépendances, et d'utiliser la Valeur à Risque (VaR) pour quantifier le risque agrégé des portefeuilles. La VaR permet aussi de mesurer le capital optimal requis pour protéger les entreprises contre les pertes anticipées et non anticipées (Scaillet (2003, [186]), Rockafellara and Stanislav(2002, [184]), Giot and Laurent (2003, [107]), Johnston (2009, [131])).

Ces outils développés ont montré certaines limites. Les modèles classiques de la finance (Markowitz, Black Scholes, Fama) par exemple ont été souvent remis en cause. Mandelbrot, a démontré en 1963 que la loi normal, hypothèse de base de ces approches

classiques, sous-estime les risques extrêmes. La réfutation de la loi normale ne se limite pas à constater la surreprésentation des valeurs extrêmes. Mandelbrot(1963, [152]) a montré que, même l'hypothèse d'indépendance ne tient pas car les variations de prix en finance ne sont pas indépendantes les unes des autres.

Pour ces raisons, les chercheurs et les décideurs s'intéressent de plus en plus à l'apport d'une théorie particulière, capable d'évaluer, et par conséquent, de mieux se couvrir contre les risques. La dite théorie est communément appelée théorie des valeurs extrêmes (TVE). Cette théorie est apparue entre 1920 et 1940, grâce à Fréchet, Fisher et Tippet, Gumbel et Gnedenko. La TVE confirme, sous certaines conditions que la loi asymptotique des maximums appartient nécessairement à une famille de lois extrêmes (GEV : Généralisée des Valeurs Extrêmes). Cette famille contient la loi de Weibull, Gumbel et Fréchet. Les applications de la TVE sont innombrables. Nous pouvons citer les applications en finance (Tsai et Chen (2011, [209]), Fernández (2003a, 2003b, [83], [84]), Embrechts et al.(1997, [72]), Reiss et Thomas (2001, [178])), en assurance (Beirlant, Teugels et Vynckier(1993, [18])), en bourse (Longin (1993, [145]) et en hydrologie (Veronica and Milan (2010, [212]), Armstrong et al. (2011, [2]), Silva et al. (2012, [193])).

La théorie des valeurs extrêmes développée jusqu'à aujourd'hui suggère deux approches différentes. La première, appelée approche des maxima par block (BM), s'appuie sur le Théorème de Fisher-Tippet (1928, [86]) qui assure la convergence de la loi des maxima par block vers une loi GEV.

La deuxième approche, appelée approche des dépassements au-delà d'un seuil (POT), considère toutes les observations qui excèdent une certaine valeur. la POT s'appuie sur le théorème de Pickands-Balkema-de Haan (Balkema et de Haan (1974, [7]), Pickands (1975, [173])), Embrechts et al.(1997, [72])). Ce théorème montre que la loi des excès au-delà d'un seuil assez élevé u s'identifie asymptotiquement à une loi de Pareto généralisée (GPD : Generalised Pareto Distribution).

L'approche (BM) telle qu'elle a été conçue, conduit à une perte d'information car elle néglige toutes les autres valeurs extrêmes inférieures au maximum du block considéré. Par conséquent, l'approche POT a été souvent préconisée et largement appliquée. Cependant, la POT présente une difficulté majeure qui réside dans le choix du seuil. En effet, le seuil ne doit pas être trop bas afin d'éviter le risque de prendre en compte des valeurs qui ne sont pas forcément dans les queues, ce qui conduit à un biais dans l'estimation, mais pas trop élevé afin d'avoir assez d'information pour approximer la loi de la probabilité des excès. Le choix du seuil est enfin de compte, basé sur un compromis entre biais et variance des estimateurs. La littérature présente deux principales

classes de méthodes pour identifier le seuil adéquat. La première catégorie regroupe les méthodes graphiques qui souffrent généralement de subjectivité, car les graphiques présentent généralement des irrégularités. La deuxième catégorie est celle des méthodes numériques basée sur des approches objectives.

Par ailleurs, l'étude des relations de dépendance entre événements extrêmes peut certainement améliorer l'évaluation des risques liés à ces phénomènes. La prise en considération de la dépendance entre les variables macro-économiques, financières, boursières et hydrologiques, est assez fréquente dans les travaux qui s'intéressent à la gestion des risques. Nous pouvons évoquer à titre d'exemple, l'évaluation des produits dérivés et la couverture des portefeuilles financiers. Dans ce contexte, une extension de la TVE a été préconisée. Il s'agit de l'utilisation des copules des valeurs extrêmes qui appartient à la théorie des copules.

D'une façon simplifiée, les copules se présentent comme des fonctions de répartition multivariée qui lient les fonctions de répartition univariées. Le théorème d'existence des copules est généralement attribué à Sklar. Nous trouvons également plusieurs résultats de base sur les copules dans les travaux de Hoeffding (1940, [122]).

Les copules ont été largement utilisées dans divers domaines de la statistique appliquée. En science actuarielle, les copules ont été appliquées à l'analyse de survie, la modélisation de la perte et à l'analyse des demandes d'indemnisation (Frees et Valdez (1998, [87])). En finance, elles ont été utilisées pour modéliser les probabilités de défaillances des portefeuilles (Li (2000,[143])) et pour estimer la Value at Risk (VaR) (Cherubini et Luciano (2001, [30]), Ane et Kharoubi (2003, [3])). En hydrologie, les copules ont été utilisées dans le cadre de l'analyse fréquentielle Genest et al. (2007, [166]), Favre et al. (2004, [79]). Dans le domaine macroéconomique, les copules sont utilisées pour examiner les facteurs communs des fonctions de répartition conditionnelles pour les revenus et la consommation Granger et al. (2003, [110]). Dans le même ordre d'idées, la présente thèse contribue au développement de la recherche statistique pour la gestion des risques liés aux événements extrêmes, afin d'adapter les outils existants et de proposer de nouveaux outils d'analyse et de décision. La thèse s'inspire des développements récents de la théorie des valeurs extrêmes (Coles (2001, [34])) dans le cas unidimensionnel, et de la théorie des copules (Nelsen (1999, 2006, [163], [164])) dans le cas bidimensionnel. La thèse contient quatre parties. La première, intitulée "estimation du risque par l'approche Peaks Over Threshold (POT)", met l'accent sur les différents aspects théoriques et pratiques de la POT. La deuxième partie, intitulée "Application de l'approche de Peaks Over Threshold (POT) aux indices boursiers", est consacrée à

l'application de l'approche de Peaks Over Thresholds aux indices boursiers. Dans ce chapitre, nous proposons des algorithmes de sélection du seuil optimal. L'application présentée dans ce chapitre a fait l'objet de plusieurs articles :

- STATISTICAL METHODS TO EXPECT EXTREME VALUES : APPLICATION OF POT THEORY TO CAC40 RETURN INDEX, (article publié, International Journal of Statistics and Economics), coécrit avec Zoglat, A., EL Adlouni, S., Amar, A. et Badaoui, F.
- MANAGING HYDROLOGICAL RISKS WITH EXTREME MODELING : APPLICATION OF PEAKS OVER THRESHOLD MODEL TO THE LOUKKOS BASIN WATERSHED (article accepté, Journal of Hydrologic Engineering), coécrit avec Zoglat, A., EL Adlouni, S., Amar, A. et Badaoui, F.
- A NEW METHOD FOR CALCULATING THE CAPITAL REQUIREMENT BASED ON THE EXTREME VALUE THEORY (en cours), coécrit avec Zoglat, A., EL Adlouni, S., Amar, A. et Badaoui, F.

La troisième partie, intitulée "La Théorie de la copule : Les propriétés et les Théorèmes", présentent les différents aspects théoriques des copules. La quatrième partie, intitulée "Application des copules : Contribution des copules pour améliorer la prévision des agrégats macro-économiques et des indices boursiers", présente dans un premier temps, une extension des copules aux variables conditionnelles. Ce premier volet s'inspire du travail de Patton (2001, [172]) portant sur les copules conditionnelles. Dans un deuxième temps, nous appliquons la théorie des copules conditionnelles à deux types de séries : séries temporelles autocorrélées et non autocorrélées. Ce chapitre a fait l'objet d'un article intitulé :

- MODELING DEPENDENCE STRUCTURE OF INFLATION AND EXCHANGE RATE RELATION BY COPULAS (en cours), coécrit avec Zoglat, A., EL Adlouni, S., Amar, A. et Badaoui, F.

Enfin, les perspectives de recherche relatives aux différents sujets abordés dans cette thèse sont proposées dans la Section Conclusion et perspectives.

Chapitre 1

Estimation du risque par l'approche " Peaks Over Threshold (POT) "

1.1 Introduction

Les pertes considérables liées aux récentes crises économiques et financières, ont conduit au développement de nouveaux outils de protection contre les risques. En effet, le résultat asymptotique communément utilisé et qui se base sur, le Théorème Central limite (TCL), ne semble plus adéquat lorsque des événements rares ou extrêmes deviennent importants, comme lors de la crise des Subprimes. Ainsi, une nouvelle théorie, appelée la théorie des valeurs extrêmes (TVE), a été adoptée. La théorie des valeurs extrêmes (TVE) est utilisée dans le cadre de la recherche d'événements rares d'une suite de variables aléatoires i.i.d, en analysant les maxima ou les minima des séries statistiques concernées. En outre, la détermination de la loi des maxima ou minima se révèle être un excellent outil d'aide à la décision, voire une opportunité de gestion en temps de crise.

Deux théorèmes sont indispensables pour une bonne compréhension de la TVE : celui de Fisher- Tippet et celui de Balkema-de Haan-Picklands. Deux méthodes principales de modélisation des événements extrêmes sont possibles : La méthode « Block Maxima » (BM) qui modélise la loi des extrêmes par la GEV dérivant explicitement du théorème de Fisher-Tipett, et la méthode « Peaks Over Theshold » (POT) qui modélise la loi des excès au-dessus d'un seuil élevé par la GPD, estimée par le théorème de Balkema-de Haan-Picklands.

L'approche BM a été fortement critiquée, car elle implique une perte d'informations. En particulier, certains blocs peuvent contenir plusieurs valeurs extrêmes pour la loi initiale, alors que d'autres peuvent ne pas en contenir. Ainsi, pour pallier ce problème,

la POT a été souvent préconisée. Cependant, le choix du seuil n'est pas une tâche simple. En effet, le seuil doit être assez grand pour garder une certaine cohérence avec le modèle, mais pas trop élevée, pour que l'estimation de la GPD soit valide.

Nous allons présenter dans ce qui suit, quelques résultats théoriques indispensables à la compréhension de la TVE, nous allons mettre l'accent sur la POT, et en particulier sur les différentes techniques de la sélection du seuil.

1.2 La méthode " Block Maxima (BM) "

Considérons $(X_1, \dots, X_n)$ une suite de n variables aléatoires *i.i.d* de fonction de répartition F définie par :

$$F(x) = \mathbb{P}(X_i \leq x) \quad i = 1, \dots, n$$

Pour étudier le comportement des événements extrêmes, on considère le maximum d'un échantillon de taille n dans chaque bloc (un bloc pourra être une année, un trimestre, un mois, etc.), noté

$$M_n = (X_1, \dots, X_n)$$

La fonction de répartition de M_n est donnée par :

$$\mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) \quad (1.1)$$

$$= [F(x)]^n \quad (1.2)$$

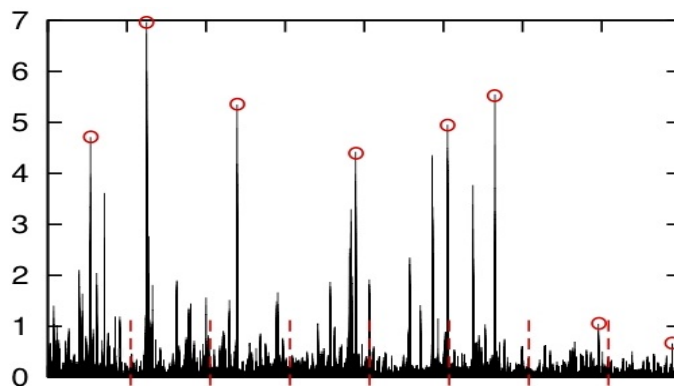


FIGURE 1.1 – Block des maxima

En pratique, F est inconnue. Ainsi, il s'agit tout comme le Théorème Central Limite, d'observer le comportement limite de la variable M_n . Le Théorème de Fisher-Tippet(1928,[86]) donne les différentes limites possibles de la loi de la variable M_n normalisée.

Théorème 1.2.1 [[86][108]]. *S'il existe des suites de réels $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ telles que :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = H_\xi(x) \quad (1.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = H_\xi(x) \quad (1.4)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $H_\xi(x)$ une fonction de répartition non dégénérée, alors $H_\xi(x)$ est nécessairement, une fonction de répartition appartenant à la famille GEV :

$$H_{\xi,u,\sigma}(x) = \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x - u}{\sigma}\right)^{\frac{-1}{\xi}}\right), \xi \neq 0, 1 + \xi \frac{x - u}{\sigma} > 0 \quad (1.5)$$

Où $u \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$. Les paramètres u , σ et ξ sont respectivement, le paramètre de position, d'échelle et de forme. Le paramètre de forme $\xi \in \mathbb{R}$ permet de distinguer trois types de lois GEV (Fréchet pour $\xi > 0$, Gumbel pour $\xi = 0$ et Weibull pour $\xi < 0$).

F^n est la fonction de répartition de M_n tandis que $H_\xi(x)$, est la fonction de répartition limite de M_n correctement normalisée par $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$. Ainsi, F appartient au domaine d'attraction H_ξ .

Définition 1.2.1 Soit H une fonction de répartition définie sur $\mathbb{R}$. Une fonction de répartition F appartient au domaine d'attraction de H , s'il existe des suites de réels $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = H_\xi(x)$$

pour tout point de continuité x , de H .

1.3 La méthode "Peaks Over Theshold (POT)"

La méthode des excès au-delà d'un seuil, appelée Peaks Over Threshold (POT), consiste à observer non pas les maxima des blocs, mais toutes les valeurs qui excèdent un certain seuil élevé, et ensuite étudier le comportement asymptotique de ces valeurs. L'approche POT permet d'améliorer l'analyse des événements extrêmes, car elle utilise plus d'observations que la méthode "BM".

L'approche POT a été appliquée dans plusieurs domaines, notamment en hydrologie et en finance (Todorovic and Zelenhasic (1970, [206]), Rosbjerg (1987, [184]), Wang (1991, [213]), Lang and al. (1999, [140]), Matthys and Beirlant (2003, [155]), Beguera (2005, [15]), Chavez-Demoulin and al. (2013, [31]), Skřivánková and Juhás (2012, [195]), Bee(2012, [9]), Magadia(2010, [150]), Zoglat et al.(2013, [220]), Zoglat et al.(accepté, mars 2014, [221])).

Pour mettre en oeuvre l'approche POT, considérons $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires réelles (i.i.d) de fonction de répartition F . Soit u un réel appelé seuil et notons $E_j = \{j \in (1, \dots, n) \mid X_j > u\}$. Les excès au-delà du seuil u sont définis par :

$$Y_j = X_j - u$$

pour $j \in E_j$.

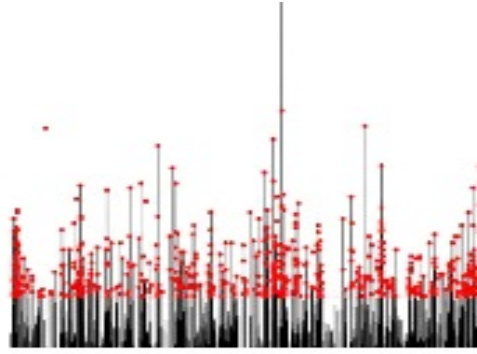


FIGURE 1.2 – Excès au dessus d'un seuil u

A partir de la loi F , on cherche à définir une loi conditionnelle des excès par rapport au seuil u , notée F_u :

Définition 1.3.1 *La fonction de répartition conditionnelle F_u des excès au-delà du seuil u est définie par :*

$$F_u(y) = P(X - u \leq y \mid X > u) = \frac{F(u + y) - F(u)}{1 - F(u)}, \text{ pour } 0 \leq y \leq x_F - u$$

Avec $x_F = \sup\{x \in \mathbb{R}, F_X(x) < 1\}$.

Ce qui équivaut à :

$$F_u(x) = P(X \leq x \mid X > u) = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)}, \text{ pour } x \geq u \quad (1.6)$$

F_u peut être approchée par la loi GPD. Ce résultat est assuré par le théorème de Balkema et de Haan (1974, [7]), Pickands(1975, [173]).

Théorème 1.3.1 *[[173][7]]. Soit F_u la fonction de répartition conditionnelle des excès au-delà d'un seuil u , associée à une fonction de répartition F inconnue. F appartient au domaine d'attraction de la GPD, si et seulement s'il existe une fonction positive σ telle que :*

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{0 < y < x_F - u} |F_u(y) - F_{\xi, \sigma(u)}^{GPD}(y)| = 0$$

Où $F_{\xi, \sigma(u)}^{GPD}$ est la fonction de répartition de la loi de Pareto généralisée (GPD), définie par :

$$F_{\xi, \sigma(u)}^{GPD}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi \frac{y}{\sigma_u})^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-\frac{y}{\sigma_u}) & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Pour $y \in [0, x_F - u]$ si $\xi \geq 0$ et $y \in [0, \min(-\frac{\sigma}{\xi}, x_F - u)]$ si $\xi < 0$. Où ξ est le paramètre de forme, u est le seuil et σ est le paramètre d'échelle.

Le paramètre ξ est aussi appelé, indice des valeurs extrêmes ou de queue. Plus cet indice est élevé en valeur absolue, plus le poids des extrêmes dans la loi de probabilité initiale est important. On parle alors de fonction de répartition à queue épaisse.

Dans la littérature, différentes méthodes ont été proposées pour estimer les paramètres σ et ξ . On peut citer à titre d'exemples, les méthodes paramétrées du maximum de vraisemblance et des moments. D'autres méthodes ont été élaborées spécialement pour l'indice de queue ξ . Nous pouvons évoquer à titre d'exemple, un ensemble de méthodes non paramétriques telle que : la méthode de Hill(1975, [135]), la méthode de Pickands (1975, [173]) et la méthode de Dekkers, Einmahl et de Haan(1989, [54]).

L'estimation du seuil quand à elle, reste l'étape la plus difficile. L'identification d'un bon seuil, présente un problème d'ordre théorique et pratique, dont la solution est basée sur la recherche d'un compromis entre le biais et la variance. En effet, le seuil doit être suffisamment grand pour avoir assez d'information afin d'approximer la loi de probabilité des excès par une GPD, mais pas trop, pour éviter le risque de prendre en compte des valeurs qui ne sont pas forcément dans les queues.

Pour estimer le seuil, diverses techniques ont été utilisées dans des situations différentes (Coles (2001, [34]), Embrechts et al.(1997, [72]), Raggad(2007, [176]), Hall (1990, [117]), Danielsson et al.(2001, [39])). Nous allons présenter dans ce qui suit quelques méthodes d'estimation du seuil.

Fonction Moyenne des Excès (FME)

La Fonction Moyenne des Excès (FME), connue sous le nom " Mean Residual Life (MRL)" , est l'une des méthodes graphiques les plus utilisées. La MRL permet de décrire la prédiction de dépassement du seuil u lorsqu'un excès se produit. Elle est définie par :

$$e_n(u) = E[X - u | X > u]$$

$e_n(u)$ est la moyenne conditionnelle des excès au delà du seuil u .

Théoriquement, lorsque la loi des excès au delà d'un seuil u_1 est une GPD, alors la loi

des excès de tout seuil $u_2 > u_1$, l'est aussi, avec même paramètre ξ . Les paramètres d'échelle σ_{u_2} et σ_{u_1} des différents seuils u_2 et u_1 satisfont l'équation suivante (Coles (2001, [34])) :

$$\sigma_{u_2} = \sigma_{u_1} - \xi(u_2 - u_1), \text{ pour tout } u_2 > u_1 \quad (1.8)$$

La FME est estimée par, la somme des valeurs des excès dépassant un certain seuil élevé u divisée par leur nombre.

$$\hat{e}_u = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - u)^+}{\sum_{i=1}^n I_{x_i > u}}, \text{ avec } \{(x_i - u)^+ = \sup(x_i - u, 0)\}$$

Où

$$I_{x_i > u} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i > u \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette approche, consiste à représenter l'estimateur empirique $\hat{e}_u$ et choisir la valeur de u , à partir de laquelle le graphique soit approximativement linéaire. On note cette valeur, u^* . Le graphique "MRL plot" est défini par les points suivants :

$$((u, \hat{e}_u); u \leq \max_{j=1, \dots, n} X_j)$$

Pour le seuil u^* , la loi des excès est une GPD, et la moyenne conditionnelle au-delà de u^* est donnée, pour tout $u > u^*$ par :

$$E[X - u \mid X > u] = \frac{\sigma_u}{1 + \xi} = \frac{\sigma_{u^*} - \xi(u - u^*)}{1 + \xi}$$

Trois cas de figure peuvent se présenter :

Si à partir de u^* , le MRL plot est marqué par une pente positive, alors les excès au delà de u^* suivent une loi de Fréchet (GPD avec $\xi > 0$). Si la pente est horizontale alors, les excès au delà de u^* suivent une loi de Gumbel (GPD avec $\xi = 0$). Enfin, si la pente est décroissante, alors les excès au delà de u^* suivent une loi de Weibull (GPD avec $\xi < 0$).

le MRL plot a été utilisé par plusieurs auteurs, pour explorer les données dans divers domaines, tels que l'analyse des données pluviométriques journalières (Coles (2001, [34])) et la modélisation des sinistres extrêmes en assurance non-vie (Beirlant et al.(2002, [10])). Cependant, cette méthode graphique a été toujours qualifiée d'approche approximative, car elle souffre d'une certaine subjectivité, liée à la difficulté d'identifier la linéarité sur le graphique utilisé. Pour améliorer les résultats graphiques, les statisticiens ont tendance à préconiser diverses approches numériques.

Nous allons présenter dans la suite, une méthode numérique basée sur le bootstrap (Hall (1990, [117]), Danielsson et al.(2001, [39])). D'autres méthodes seront présentées et discutées lors du chapitre suivant. Il s'agit de la méthode de la sélection automatique (ATSM) développée par Thompson et al.(2009, [170]) et la méthode des seuils

multiples (MTM) proposée par Deidda (2010, [52]).

Méthode de bootstrap

La Méthode de bootstrap (Hall (1990, [117]), Danielsson et al.(2001, [39])) est utilisée pour déterminer asymptotiquement l'estimation de l'indice de queue $\xi(k)$ en minimisant la moyenne quadratique des erreurs (MSE), où k est le nombre de données utilisé pour estimer l'indice de queue d'une GPD. Dans la littérature, on retrouve plusieurs estimateurs de queue, on peut évoquer à titre d'exemple : Hill(1975, [135]), Hall (1990, [117]), Mason(1982, [154]), Davis et Resnick (1984, [41]), Hall et Welsh (1985, [118]), Pickands(1975), de Haan et Resnick (1980, [47]).

La Méthode de bootstrap basée sur le choix de la valeur k , permet d'identifier par conséquent, le seuil u^* qui assure la convergence vers une GPD .

Le choix de k est similaire au choix du u^* . En effet, quand la valeur de k est petite, la variance de l'estimateur de ξ est grande et inversement, quand la valeur de k est assez grande, le biais est élevé. Ainsi, il faut établir un certain compromis entre variance et biais. Ceci se traduit par la minimisation de l'erreur quadratique moyenne associée à l'estimateur de $\xi(k)$.

Soit $X_1, \dots, X_n$, une suite de n variables aléatoires (i.i.d) et soit $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ les statistiques d'ordre associées.

L'estimateur de Hill pour ξ est défini par :

$$\xi_n(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log X_{n,n-i+1} - \log X_{n,n-k}$$

La MSE du paramètre ξ_n se définit par :

$$MSE(n, k) = E(\xi_n - \xi)^2$$

La méthode du bootstrap consiste chaque fois, à rééchantillonner $\chi_{n_1}^* = (X_1^*, \dots, X_{n_1}^*)$ à partir de $\chi_n = (X_1, \dots, X_n)$ avec $n_1 < n$ et calculer, l'estimateur de Hill basé sur $X_{n_1,1}^*, \dots, X_{n_1,n_1}^*$, et définit par :

$$\xi_{n_1}^*(k_1) = \frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^{k_1} \log X_{n_1,n_1-i+1}^* - \log X_{n_1,n_1-k_1}^*$$

La valeur de k qui minimise la MSE, associée à chaque échantillon, est celle qui correspond à la valeur cherchée. Une fois k identifiée, le bon seuil se définit comme le quantile correspondant (Danielsson et al.(2001, [39])).

Il faut bien mentionner, qu'il est possible de remplacer l'estimateur de Hill dans la procédure de Bootstrap, par d'autres estimateurs non paramétriques.

1.4 Conclusion

L'approche POT présente une alternative très intéressante à l'approche BM. Cependant, le choix du seuil demeure une difficulté importante pour mettre en oeuvre cette approche. Cette problématique a occupé depuis plusieurs années, une place privilégiée dans les études qui s'intéressent à la théorie des valeurs extrêmes. Le chapitre suivant permet de présenter notre contribution dans ce domaine de recherche. Nous allons présenter en fait, des méthodes que nous avons développé ou adapté en traitant des données financières.

Chapitre 2

Application de l'approche Peaks Over Threshold (POT) aux indices boursiers

2.1 Introduction

Les booms et les crashes boursiers sont parmi les phénomènes les plus surprenants de la finance. Les répercussions de ces événements concernent les investisseurs, les institutions et le système financier dans son ensemble. Le crash boursier d'octobre 1987 aux États Unis et la crise des Subprimes en 2007, sont des exemples illustratifs de ces phénomènes extrêmes en finance.

Cependant, malgré la disponibilité des bases de données financières et l'avènement des outils informatiques de simulation, la plupart des études empiriques en finance, restent trop attachées aux propriétés moyennes des données financières. Ces études, accordent peu d'attention aux mouvements extrêmes qui décrivent le comportement des données durant les crises et les crashes.

Par ailleurs, les mouvements extrêmes sont d'une importance cruciale pour les décideurs. En effet, ces mouvements peuvent exposer les investisseurs à plusieurs types de risques, à savoir : Le risque de défaut, le risque de faillite des institutions financières et le risque systémique.

Ainsi, dans les deux dernières décennies, les cercles académiques se sont intéressés de plus en plus à la construction des modèles statistiques, qui permettent d'estimer la probabilité des événements extrêmes en finance et d'évaluer les pertes correspondantes. Ces modèles se basent, essentiellement, sur les résultats de la théorie des valeurs extrêmes. Ils permettent de présenter une meilleure alternative aux modèles classiques

en finance, car ils informent mieux sur le risque potentiel correspondant au placement financier, et par conséquent, les investisseurs pourront en fonction de leurs contraintes et de leur aversion, se prémunir contre un risque probable.

Ainsi, l'une des principales applications de la TVE en finance, consiste à étudier les mouvements extrêmes d'un indice boursier, afin d'évaluer les pertes critiques associées à des probabilités d'occurrence bien définies. Cette théorie rend donc possible, la mise en oeuvre d'un outil de prévision, en estimant le comportement des extrêmes à partir des plus grandes pertes enregistrées. Nous présentons dans ce qui suit, les principaux résultats d'une étude que nous avons élaboré. L'étude intitulée "Statistical methods to expect extreme values : Application of POT approach to CAC40 return index", a été publiée au journal "International Journal of Statistics and Economics"

2.2 Application aux indices boursiers : cas du CAC40

2.2.1 Les données

Dans notre étude, nous avons appliqué la POT pour modéliser les événements extrêmes de l'indice CAC40, afin de contrôler et de mesurer le risque de volatilité associé à cet indice.

Le CAC40 (Cotation Assistée en Continu) est le principal indice boursier français. Il donne une idée sur les tendances du marché, car il représente une mesure pondérée de la capitalisation des 40 valeurs les plus importantes du marché français.

Le CAC40 est né officiellement le 15 Juin 1988, après le crash de 1987 qui a modifié le monopole de la négociation. La valeur du CAC40 a connu des fortes variations depuis sa création. Le plus haut sommet (6 944,77 points) a été atteint, le 4 Septembre 2000 et la plus forte baisse, est due au crash boursier de 2008, où le CAC40 a perdu plus de 43,5 pour cent de sa valeur.

Depuis 2003, l'indice a augmenté de façon croissante. Le 1^{er} Janvier 2007, le CAC40 est passé au-dessus de 5600 points, un niveau jamais vu depuis mai 2001. Pour montrer le caractère volatile de l'indice CAC40, voici quelques dates importantes qui ont marqué son évolution :

- Octobre 1987 : Crash boursier ;
- Août 1990 : Crise de l'énergie ;
- Septembre 1998 : Crise russe ;
- Fin 1999 – 2000 : Bulle Internet ;
- Septembre 2001 : Attentats du 11 septembre ;
- Mars 2003 : Début de la guerre en Irak.

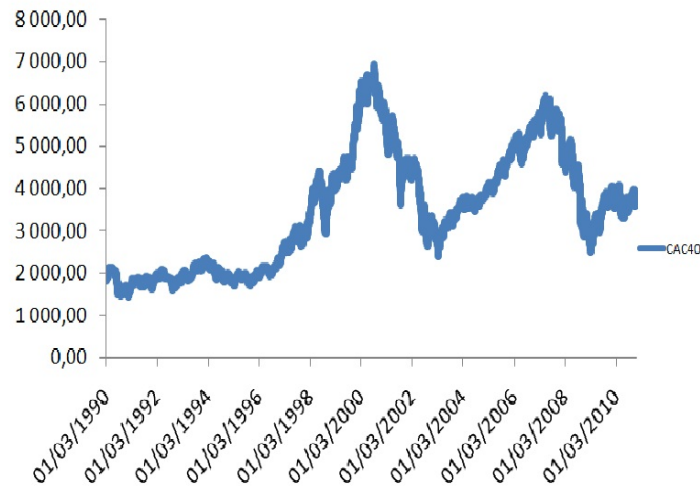


FIGURE 2.1 – Evolution de l'indice CAC40 du 01 Mars 1990 au 20 décembre 2010

Dans notre étude, l'analyse des valeurs journalières du CAC40, couvre la période du 3 Mars 1990 au 20 Décembre 2010. Cette période représente 5222 observations. La figure (2.1) met en évidence la nature volatile de l'indice CAC40, ce qui justifie l'étude de ses valeurs extrêmes.

Dans le but de satisfaire les conditions théoriques du théorème Balkema-de Haan-Pickands, nous avons appliqué les tests non paramétriques de points de retournement et de Mann-Whitney aux données brutes, et nous avons constaté qu'elles ne sont pas i.i.d. Les mêmes tests utilisés, confirment que les données correspondantes à l'inverse des rendements de l'indice CAC40, sont indépendantes et identiquement distribuées. Ainsi, nous considérons dans la suite de notre étude les données transformées.

En outre, nous notons que le coefficient de l'asymétrie, correspondant aux données transformées, est supérieur à zéro (24.42), ce qui signifie que la fonction de répartition des données considérées est étalée vers la droite. Nous sommes donc en face d'une fonction de répartition clairement leptokurtique. Ces résultats permettent de conjecturer que la fonction de répartition des excès des données considérées, peut être ajustée par une loi de Fréchet.

2.2.2 Méthodes de la sélection des seuils

Comme mentionné dans la partie théorique, la difficulté de l'approche POT, réside dans le choix d'un certain seuil qui assure la convergence des excès vers une GPD. Nous présentons dans la suite, quelques méthodes que nous avons développées ou adaptées. Les méthodes considérées, à savoir la "Méthode basée sur la moyenne Quadratique des

Erreurs (SEM)", la "Méthode de la Sélection Automatique (ATSM)" et la "Méthode de Seuils Multiples (MTM)", sont toutes basées sur des critères statistiques objectifs.

Méthode basée sur la moyenne Quadratique des Erreurs (SEM)

Dans leur étude, Beirlant et al.(1996, [13]) ont proposé une méthode de sélection du seuil, basée sur la minimisation de la moyenne quadratique des erreurs (SEM), correspondant à l'estimateur de Hill de l'indice de queue. La méthode a été aussi appliquée par Guillou et Willems (2006, [112]) et Xiangxian and Wenlei (2009, [218]). Dans cette thèse, nous avons élaboré un algorithme de sélection de seuil, inspiré des travaux de Beirlant et al.(1996, [13]). Les principales étapes de cet algorithme sont résumées ci-après :

Soient $u_1, \dots, u_n$, un ensemble de seuils candidats avec : $u_j = u_{j-1} + \Delta$ pour $j = 2, \dots, n$. Δ est le pas d'incrément. Soient $\hat{\sigma}_{u_j}$ et $\hat{\xi}_{u_j}$, les estimateurs du paramètre d'échelle et de l'indice de queue, correspondant à chaque seuil u_j .

Les seuils candidats peuvent être obtenus par une méthode graphique, telle que celle basée sur le MRL plot.

Pour chaque seuil u_j :

Step1 Déterminer N_{u_j} le nombre de dépassements.

Step2 Simuler ν échantillons indépendants de taille N_{u_j} , issus d'une loi GPD, de paramètres u_j , $\sigma = \sigma_{u_j}$, et $\xi = \xi_{u_j}$.

Step3 Pour chaque niveau $\alpha \in A = \{0.05, 0.1, 0.15, \dots, 0.95\}$, calculer le quantile $q_{(\alpha, u_j)}^i$ correspondant au i^{th} échantillon simulé.
Calculer

$$q_{(\alpha, u_j)}^{sim} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} q_{(\alpha, u_j)}^i$$

Step4 Calculer la moyenne quadratique des erreurs :

$$SE_{u_j} = \sum_{\alpha \in A} \left(\frac{q_{(\alpha, u_j)}^{sim}}{q_{(\alpha, u_j)}^{obs}} \right)^2.$$

Où $q_{(\alpha, u_j)}^{obs}$ est le quantile observé et $q_{(\alpha, u_j)}^{sim}$ est le quantile calculé à l'étape 3.

Le seuil optimal est la valeur u^* qui vérifie la relation suivante :

$$SE_{u^*} = \min_j SE_{u_j}$$

Méthode de la Sélection Automatique (ATSM)

La méthode de la Sélection Automatique (ATSM), a été développée par Thompson et al. (2009, [170]). Dans leurs travaux, une étude d'efficacité de cette méthode

numérique a été effectuée, en utilisant des simulations. l'ATSM a été comparée avec l'approche de sélection de seuil, implémentée dans le logiciel JOINSEA.

Le fondement théorique de l'ATSM est basé sur l'idée suivante (Thompson et al.(2009, [170])) :

Si u est un seuil approprié, alors pour tout $u_i > u_{i-1} \geq u$, la différence $\tau_{u_i} - \tau_{u_{i-1}}$ suit approximativement une loi normale de moyenne égale 0, avec :

$$\tau_{u_i} = \sigma_{u_i} - \xi_{u_i} u_i \quad (2.1)$$

Où σ_{u_i} et ξ_{u_i} sont les paramètres d'échelle et de forme correspondants aux échantillons des excès au delà du seuil u_i .

Les principales étapes de l'ATSM, sont présentées dans l'algorithme suivant :

Etape 1 : Identifier l'ensemble des seuils candidats $u_1 < \dots < u_n$.

Pour $i = 1, \dots, n$, estimer les paramètres σ_{u_i} et ξ_{u_i} , obtenus à partir des dépassements au delà du seuil u_i .

Etape 2 : Considérer $i=2$, et tester l'hypothèse $H_0 : (\tau_{u_i} - \tau_{u_{i-1}})$ suit approximativement une loi normale de moyenne égale à 0".

Si H_0 n'est pas rejetée, alors u_1 est un seuil approprié. Sinon, remplacer i par $i+1$ et tester à nouveau H_0 .

Etape 3 : Réitérer l'étape 2 avec les seuils candidats de l'intervalle considéré au départ, jusqu'à l'obtention du seuil optimal ou $i = n$.

Thompson et al.(2009, [170]) ont mentionné que cet algorithme peut ne pas converger, mais cette situation pourrait se produire rarement.

Méthode de Seuils Multiples (MTM)

La méthode de seuils multiples a été développée par Deidda(2010, [52]) en traitant des données pluviométriques collectées à partir de différents sites. Deidda (2010, [52]) a montré que la MTM, basée sur le concept de seuil invariant, est particulièrement adaptée à l'analyse régionale (séries issues de plusieurs régions), et aux données impactées par différentes sources de perturbation.

Le concept de seuil invariant, consiste à chercher un seuil u au delà duquel les valeurs des paramètres de l'indice de queue (shape) et de l'échelle restent invariants (stables).

Les principales étapes de la MTM sont résumées dans l'algorithme suivant :

Etape 1 (Estimation de ξ^M) : Identifier l'ensemble des seuils candidats $u_1, \dots, u_n$ et estimer les paramètres de forme correspondants $(\xi_{u_1}, \dots, \xi_{u_n})$. ξ^M est défini par :

$$\xi^M = \text{Mediane}(\xi_{u_1}, \dots, \xi_{u_n})$$

Etape 2 (Estimation de σ^M) : Afin de réduire la variabilité liée au paramètre d'échelle σ , on estime dans cette étape, σ_{u_i} conditionnellement à ξ^M , pour chaque seuil u_i , et on la note $\sigma_{u_i}^c$. On obtient σ^M défini par :

$$\sigma^M = \text{Médiane}(\sigma_{u_1}^c, \dots, \sigma_{u_n}^c)$$

Etape 3 (Estimation de ζ^M) : La probabilité de dépassement au delà de u_i notée ζ_{u_i} est définie par : $\zeta_{u_i} = 1 - F(u_i)$ avec F est la fonction de répartition d'une loi GPD.

Dans le but de réduire la variabilité liée à ξ_{u_i} et σ_{u_i} , on estime conditionnellement à ξ^M et σ^M , la probabilité de dépassement et on la note par $\zeta_{u_i}^c$.

L'estimateur final de ζ est obtenu par :

$$\zeta^M = \text{Médiane}(\zeta_{u_1}^c, \dots, \zeta_{u_n}^c)$$

L'estimation finale de ζ permet de définir le nombre adéquat de dépassements et par conséquent, le seuil optimal.

2.2.3 Résultats

Le MRL plot (Figure(2.2)), utilisé pour identifier l'ensemble des seuils candidats pour les données du CAC40, présente une linéarité sur l'intervalle $[0; 3000]$. La pente

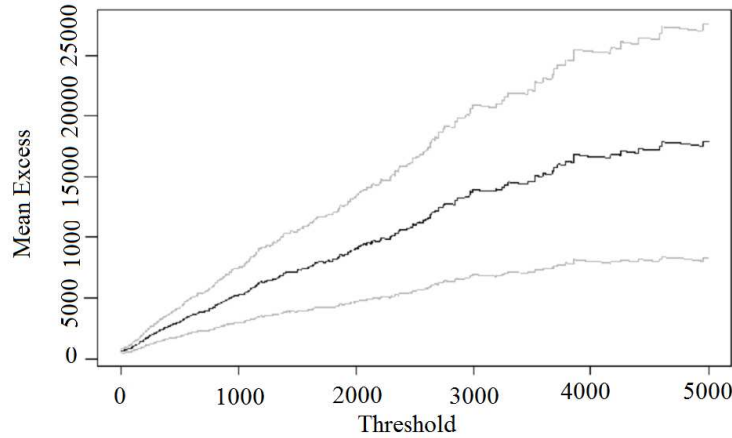


FIGURE 2.2 – MRL plot de l'inverse des rendements de l'indice CAC40

positive indique que, pour les données utilisées, $\xi > 0$. Par conséquent, on s'attend à ce que les dépassements soient ajustés par une loi de Fréchet (GPD avec un indice de queue positif).

Afin d'appliquer les différentes méthodes : ATSM, MTM et SEM pour détecter le seuil optimal, nous allons discrétiser l'intervalle des seuils candidats en considérant l'ensemble $\{u_0 = 0; u_1 = \Delta; u_2 = 2\Delta; u_3 = 3\Delta; \dots; u_n = n\Delta = 3000; \}$ où $\Delta = 0, 1$

Détection du seuil optimal par la méthode SEM

Soit N_{u_j} , le nombre de dépassements au delà de u_j , nous simulons 1000 échantillons de taille N_{u_j} . Pour chaque seuil u_j , on calcule l'erreur quadratique définie par :

$$SE_{u_j} = \left(\frac{q_{(0.05;u_j)}^{sim}}{q_{(0.05;u_j)}^{obs}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{q_{(0.95;u_j)}^{sim}}{q_{(0.95;u_j)}^{obs}} \right)^2$$

Pour les données du CAC40, le seuil optimal est donné par la valeur $u_j \approx 713$. Nous notons que l'utilisation des méthodes d'estimation, à savoir la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode des moments, ont abouti à la même valeur du seuil optimal. Pour les paramètres d'échelle et de l'indice de queue, nous retenons les valeurs données par la méthode des moments, préconisée dans le cas d'un échantillon marqué par des valeurs anormales. En se basant sur les résultats présentés ci-dessus, la loi ajustée aux rendements du CAC40 est donnée par :

$$F_{713}(x) = F_{713}(x; 3774.27; 0.44) = 1 - \left(1 + 0.44 \frac{x - 713}{3774.27} \right)^{(-\frac{1}{0.44})}$$

Il faut bien noter que les seuils candidats issus de l'intervalle $[0; 700[$ ne seront pas utilisés dans la suite, vu que le bon seuil fourni par SEM est supérieur à 700. Nous nous restreignons l'intervalle des seuils candidats à $[700; 3000]$.

Détection du seuil optimal par la méthode ATSM

En explorant l'intervalle de seuils candidats $[700; 3000]$, nous constatons que la loi de probabilité des différences $\tau_{(u_\nu)} - \tau_{(u_{\nu-1})}$ ne converge pas vers une loi normale de moyenne 0. Ainsi, pour notre cas, la méthode ATSM n'est pas concluante.

Détection du seuil optimal par la Méthode MTM

L'exécution de l'algorithme de la méthode MTM, a permis d'identifier un seuil optimal de valeur égale à 1150 pour la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance. Pour la méthode des moments, le seuil optimal est évalué à 1000.

Ainsi, la loi ajustée en se basant sur la MTM et la méthode du maximum de vraisemblance est donnée par :

$$F_{1156}(x) = F_{1156}(x; 6066.41; 0.43) = 1 - \left(1 + 0.43 \frac{x - 1156}{6066.41} \right)^{(-\frac{1}{0.43})}$$

Pour la méthode des moments, la GPD ajustée est donnée par :

$$F_{1000}(x) = F_{1000}(x; 2443.19; 0.45) = 1 - \left(1 + 0.45 \frac{x - 1000}{2443.19} \right)^{(-\frac{1}{0.45})}$$

Les méthodes de sélection utilisées ont abouti à des valeurs différentes. Pour avoir le meilleur modèle ajusté aux données du CAC40, nous utilisons, en premier lieu le QQ

plot pour identifier la bonne GPD. Ce dernier montre que la MTM, combinée avec la méthode d'estimation des moments, permet de fournir le bon seuil, et par conséquent le meilleur modèle.

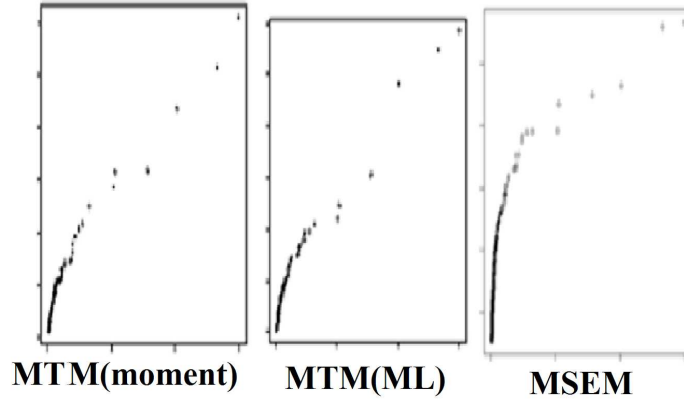


FIGURE 2.3 – QQ plot des différents modèles.

Dans un deuxième temps, nous testons ce constat graphique eu utilisant le Adup test (supremum class version of the upper tail Anderson-Darling test). Les résultats du test donne une :

- p-value = 0.14 pour la loi de probabilité des excès qui correspond au seuil optimal $u_{MTM,M} = 1000$ donné par la méthode MTM et la méthode des moments.
- p-value = 0.06 pour la loi de probabilité des excès qui correspond au seuil optimal $u_{MTM,ML} = 1156$ donné par la méthode MTM et la méthode du maximum de vraisemblance.
- p-value $< 2.2 * 10^{-16}$ pour la loi de probabilité des excès qui correspond au seuil optimal $u_{SEM,M} = 713$ donné par la méthode SEM et la méthode des moments.

Ainsi, le Adup test confirme que la loi de probabilité, correspondante à l'inverse des rendements de l'indice CAC40, s'ajuste à une loi de Fréchet avec un seuil $u^* = 1000$.

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pu mettre en application l'approche POT pour modéliser les rendements du CAC40. Les résultats montre que la loi de Fréchet s'ajuste mieux aux données utilisées. Ce résultat est compatible avec le constat de plusieurs études qui s'intéressent aux séries financières. En outre, il est en accord avec les conclusions générales qui montrent, pour les séries financières, la non adéquation de la normalité,

l'asymétrie des dépassements et le caractère leptokurtique. Par ailleurs, le résultat de notre étude, affirme que la loi de l'inverse des rendements du CAC40, présente une queue épaisse. Ce qui signifie, avec une forte probabilité, que l'indice peut être marqué par des perturbations considérables. Ce résultat justifie en plus, la forte volatilité de l'indice, interprétée souvent comme indicateur de risque.

Malgré la contribution de l'approche POT à la modélisation des mouvements extrêmes, nous signalons qu'elle ne permet pas d'exploiter la dépendance des événements extrêmes, ce qui pourrait être une limite contraignante, empêchant une meilleure couverture contre les risques. Une extension de la théorie des valeurs extrêmes au cas multivarié peut être une bonne alternative. L'extension est basée sur la théorie des copules qui sera présentée dans la chapitre suivant.

Chapitre 3

La Théorie des copules : Propriétés et théorèmes

3.1 Introduction

Les copules se présentent comme une approche de modélisation, permettant l'analyse de la structure de dépendance entre plusieurs variables aléatoires. C'est un outil indispensable à l'appréhension de nombreux domaines d'application. En finance plus particulièrement, les copules permettent d'évaluer les crédits structurés et la performance de la gestion des hedge funds, de mesurer les risques multiples de crédit et de marché et d'analyser le pricing des options.

La mesure de dépendance fréquemment utilisée est le coefficient de corrélation linéaire de Bravais-Pearson. Cependant, l'utilisation de cet indicateur n'est judicieuse que lorsque la relation de dépendance est linéaire et l'univers considéré est gaussien. Ainsi, en finance, domaine où les hypothèses de normalité et de linéarité sont rarement vérifiées, le coefficient de corrélation linéaire n'est pas approprié. Embrechts et al (1999,[72]) confirment dans leurs travaux que cette mesure n'est pas efficace. En outre, l'utilisation de cette mesure peut conduire à une sous-estimation du risque réel encouru.

Dans ce sens, l'utilisation des copules a été fortement préconisée. Malgré que les fondements théoriques des copules ont été élaborés dans les années 50 avec le théorème de Sklar (1959, [194]), son adoption dans les travaux pratiques reste relativement récente, et ce par rapport aux autres approches statistiques. Il faut bien noter que les copules ont été parfois évoquées sous d'autres appellations comme celles de fonctions de dépendance, mentionnées dans les travaux de Hoeffding (1940, [122]), Fréchet(1951, [88]), Féron (1956, [85]) et Dall'Aglio (1956, [38]).

A partir des années soixante-dix et avec le développement de la théorie des processus stochastiques, d'autres auteurs ont redécouvert le concept des fonctions copules sous d'autres appellations en établissant certaines propriétés (Kimeldorf et Sampson (1975, [137])). D'une façon explicite, les copules sont des fonctions de répartition particulières, qui lient les fonctions de répartition multivariées, associées aux lois de probabilité dans $\mathbb{R}^d$, pour $d \geq 2$, aux fonctions de répartition marginales.

Les copules autorisent les statisticiens une sélection plus étendue des fonctions de répartition conjointes et ce indépendamment des différentes lois marginales considérées. De plus, les copules permettent de résumer la structure de dépendance de vecteurs aléatoires. En outre, les mesures les plus conventionnelles de dépendance, à savoir le tau de Kendall et le Rho de Spearman, peuvent être exprimées explicitement en fonction des copules.

Nous mettons l'accent dans ce qui suit sur les propriétés des copules. Dans la première section, nous présentons les outils de base liés à la théorie des copules. Nous fournissons un exposé de synthèse sur ce sujet, en y présentant les définitions et les propriétés fondamentales des copules.

Dans la deuxième partie, nous abordons les différentes mesures de dépendance. Nous explorons les techniques utilisées pour étudier la dépendance entre variables aléatoires. L'objectif de la troisième partie est d'étudier les propriétés fondamentales de quelques familles des copules paramétriques. Une attention particulière sera accordée aux copules Archimédiennes et aux copules extrêmes. Quelques méthodes d'estimation vont être signalées vers la fin de ce chapitre.

3.2 Définitions et propriétés des copules

Dans toute la suite I désigne l'intervalle $[0, 1]$ et I^2 représente $[0, 1] \times [0, 1]$.

Définition 3.2.1 *On appelle copule bivariée toute fonction C définie de $I^2 \rightarrow I$ qui possède les propriétés suivantes :*

1. $\forall u \in I, C(u, 0) = C(0, u) = 0$;
2. $\forall u \in I, C(u, 1) = C(1, u) = u$;
3. C est 2-croissante c'est-à-dire : $\forall (u_1, u_2), (v_1, v_2) \in I^2$
avec $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$,

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires uniformes. Considérons le vecteur aléatoire $U = (U_1, U_2)$. Nous avons

$$C(u_1, u_2) = P[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2].$$

La propriété 1) implique que

$$P[U_1 \leq 0, U_2 \leq u] = P[U_1 \leq u, U_2 \leq 0] = 0.$$

La propriété 2) implique que

$$P[U_1 \leq 1, U_2 \leq u] = P[U_1 \leq u, U_2 \leq 1] = u.$$

C est une loi de probabilité, ce qui implique que

$$P[u_1 \leq U_1 \leq v_1, u_2 \leq U_2 \leq v_2] = C(v_1, v_2) - C(v_1, u_2) - C(u_1, v_2) + C(u_1, u_2)$$

Exemple 3.2.1 La fonction $M(u, v) = \min(u, v)$, $\forall u, v \in I$, définit une copule. En effet :

- $\forall u, v \in I, \min(u, 0) = \min(0, u) = 0 \Rightarrow M$ vérifie (1);
- $\forall u, v \in I, \min(u, 1) = \min(1, u) = u \Rightarrow M$ vérifie (2);
- de même, $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ avec $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$,
 $\min(u_2, v_1) \leq \min(u_2, v_2)$ et $\min(u_1, v_2) \leq \min(u_1, v_1) \Rightarrow M$ vérifie (3).

Par conséquent, M est une copule. De la même façon, on peut montrer que les $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ et $\Pi(u, v) = uv$ définissent aussi des copules.

Les résultats suivants présentent les principaux théorèmes et propriétés d'une copule bivariable.

Théorème 3.2.1 [[163][164][88]]. Soit C une copule bivariable, alors pour tout (u, v) dans I^2 , on a :

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v) \quad (3.1)$$

Preuve 3.2.1 Soit (u, v) un point quelconque dans l'intervalle I^2 . On a $C(u, v) \leq C(u, 1) = u$ et $C(u, v) \leq C(1, v) = v$, ainsi pour tout (u, v) dans I^2 , on a $C(u, v) \leq \min(u, v)$. En outre, selon (2) et (3) (définition d'une copule), on a : $C(u, v) \geq u + v - 1$ et $C(u, v) \geq \max(u + v - 1, 0)$.

Les bornes $\max(u + v - 1, 0)$ et $\min(u, v)$ sont des copules notées $W(u, v)$ et $M(u, v)$. Ainsi pour toute copule bivariable C et $(u, v) \in I^2$, on a

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v) \quad (3.2)$$

L'inégalité(3.2) permet de définir la copule de Fréchet-Hoeffding de borne supérieure M et de borne inférieure W .

Lemme 3.2.1 *Soit C une copule bivariée sur I^2 . Soient $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in I^2$ avec $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$, alors les deux fonctions $u \mapsto C(u, v_2) - C(u, v_1)$ et $u \mapsto C(u_2, u) - C(u_1, u)$ sont croissantes sur I .*

Théorème 3.2.2 *[[163][164]] (Continuité). Soit C une copule bivariée, alors pour tout $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$ dans I^2 ,*

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| \quad (3.3)$$

C est alors, uniformément continue sur I^2

Preuve 3.2.2 *La preuve du théorème est immédiate si on considère l'inégalité triangulaire :*

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1)| + |C(u_2, v_1) - C(u_1, v_1)|.$$

On suppose $u_1, u_2 \in I$ avec $u_1 \leq u_2$, par définition d'une copule (propriétés 1, 2 et 3), et en utilisant les résultats du lemme(3.2.1), nous obtenons $0 \leq C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) \leq u_2 - u_1$.

De manière analogue, nous montrons l'inégalité pour $u_2 \leq u_1$. Ainsi pour tout $u_1, u_2 \in I$, on a $|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2)| \leq |u_2 - u_1|$.

De façon similaire, pour tout $v_1, v_2 \in I$, on a $|C(u_1, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |v_2 - v_1|$.

En sommant membre à membre les deux inégalités et nous utilisons le résultat de l'inégalité triangulaire, on trouve le résultat (3.3).

Théorème 3.2.3 *[[163][164]]. Soit C une copule bivariée. Pour tout $v \in I$, la dérivée partielle $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ existe pour tout u . En outre, pour tout v et u , on a :*

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \leq 1$$

De façon similaire, pour tout $u \in I$, la dérivée partielle $\frac{\partial C(u,v)}{\partial v}$ existe pour tout v , et pour tout u et v , on a

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \leq 1$$

En outre, les fonctions $u \mapsto \frac{\partial}{\partial v} C(u, v)$ et $u \mapsto \frac{\partial}{\partial u} C(u, v)$ sont définies et croissantes presque partout sur I .

Preuve 3.2.3 *((Nelsen(2006, [164]), page 25))*

Les copules admettent des densités de probabilité. Si la densité c associée à la copule C existe alors, elle est définie par :

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$$

Théorème 3.2.4 *[[163][164][188]]. Soit C une copule bivariée. Si $\frac{\partial C(u,v)}{\partial v}$ et $\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}$ sont continues sur I^2 et $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ existe pour tout $u \in]0, 1[$ lorsque $v = 0$, alors $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ et $\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial v \partial u}$ existent dans $]0, 1]^2$ et $\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial v \partial u}$.*

Preuve 3.2.4 *Seeley(1961, [188])*

Théorème de Sklar :

Ce théorème est au coeur de la théorie des copules. Il constitue le fondement de la plupart des applications des copules. Le théorème de Sklar élucide le rôle que joue les copules dans l'identification de la relation, entre les fonctions de répartition à plusieurs variables et leurs marges univariées. Le théorème de Sklar s'énonce comme suit :

Théorème 3.2.5 *[[163][164][194]]. Soit H une fonction de répartition bivariée de marginales F et G . On pose $F(x) = u$ et $G(y) = v$. $H(x, y)$ peut s'écrire en terme d'une fonction unique $C(u, v)$ telle que :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, H(x, y) = C(F(x), G(y)). \quad (3.4)$$

Si les lois marginales F et G sont continues alors la copule C est unique ; sinon elle est déterminée de manière unique sur $(ImF) \times (ImG)$. Réciproquement, si C est une copule et F, G sont des fonctions de répartition univariées, alors la fonction H définie par équation (3.4) est la fonction de répartition conjointe dont les marges sont F et G .

Preuve 3.2.5 *((Nelsen(2006, [164]))*

Si la fonction de répartition conjointe H est absolument continue, en utilisant le **théorème de Sklar** , nous pouvons exprimer la densité d'un vecteur aléatoire (X, Y) en fonction de la densité de sa copule et de ses fonctions de répartition marginales F et G par :

$$h(x, y) = c(F(x), G(y))f(x)g(y) \quad (3.5)$$

Le théorème de Sklar peut être utilisé pour construire des copules à partir des lois de probabilité bidimensionnelle. Considérons par exemple les fonctions de répartition bivariées suivantes :

Exemple 3.2.2 (la fonction de répartition bivariée de Gumbel) *Soit H_θ une fonction de répartition bivariée donnée par*

$$H_\theta(x, y) = \begin{cases} 1 - \exp(-x) - \exp(-y) + \exp(-(x + y + \theta xy)) & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.6)$$

Où θ est un paramètre dans I . Les marginales $F(x) = 1 - \exp(-x)$ et $G(y) = 1 - \exp(-y)$ sont des exponentielles, leurs fonctions inverses sont $F^{-1}(u) = -\ln(1 - u)$ et $G^{-1}(v) = -\ln(1 - v)$ respectivement, pour $u, v \in I$. On en déduit que la copule correspondante est

$$C_\theta(u, v) = u + v - 1 + (1 - u)(1 - v) \exp(-\theta \ln(1 - u) \ln(1 - v))$$

Exemple 3.2.3 (La fonction de répartition bivariée de Galambos) Soit H_θ une fonction de répartition bivariée donnée par

$$H_\theta(x, y) = \begin{cases} \exp(-[(x + y) - (x^{-\theta} + y^{-\theta})^{-\frac{1}{\theta}}]) & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout réel $\theta > 0$. Cette fonction de répartition admet pour marginales

$$F(x) = \exp(-x), \quad G(y) = \exp(-y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Les fonctions inverses sont $F^{-1}(u) = -\ln(u)$, $G^{-1}(v) = -\ln(v)$ respectivement, pour $u, v \in [0, 1]$. On en déduit que la copule associée est :

$$C_\theta(u, v) = uv \exp\{-[(-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta}]^{-\frac{1}{\theta}}\}$$

Exemple 3.2.4 (La fonction de répartition bivariée de Gauss) Soit H_ρ une loi normale bivariée de coefficient de corrélation ρ telle que ; $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$H_\rho(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{t_1-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(t_1-m_1)(t_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{t_2-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right)\right\} dt_1 dt_2$$

Supposons que H_ρ est la loi conjointe des variables aléatoires normales $X \rightsquigarrow N(m_1, \sigma_1)$ et $Y \rightsquigarrow N(m_2, \sigma_2)$. La copule associée à H_ρ est alors donnée par :

$$C_\rho(u, v) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\phi_1^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi_2^{-1}(v)} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right)\right\} dx dy$$

$\forall u, v \in I$, où ϕ_i^{-1} , $i = 1, 2$ est la fonction inverse de la loi $N(m_i, \sigma_i)$.

En particulier, si X et $Y \rightsquigarrow N(0, 1)$ on a :

$$C_\rho(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\phi_1^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi_2^{-1}(v)} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dx dy$$

C_ρ est la copule de Gauss.

Soit h_ρ la densité associée à la fonction de répartition H_ρ . En utilisant (3.5), on déduit que : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $h_\rho(x, y) = f(x)g(y)c_\rho(x, y)$ d'où :

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} c_\rho(F(x), G(y)) \end{aligned}$$

Donc

$$c_\rho(F(x), G(y)) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)} + \frac{x^2 + y^2}{2}\right\}$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

3.3 Mesures de dépendance

L'analyse des relations de dépendance entre variables aléatoires est l'un des sujets largement étudiés en probabilité et en statistique. La littérature évoque plusieurs mesures de dépendance et d'association, les plus connues sont le coefficient de Pearson, le Tau de Kendall et le Rho de Spearman. Les copules permettent, simultanément, de mesurer et de modéliser la dépendance. Ainsi, nous nous sommes intéressés dans cette section, à la présentation de la modélisation de la dépendance par les copules.

Soient $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(x_j, y_j)_{1 \leq j \leq n}$ deux suites finies du vecteur (X, Y) de variables aléatoires continues. Les vecteurs aléatoires (X_i, Y_i) et (X_j, Y_j) sont concordants si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ et discordants si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$.

Théorème 3.3.1 *[[163][164]]. Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) des vecteurs indépendants de variables aléatoires continues et de fonctions de répartition conjointes H_1 et H_2 respectivement, avec des fonctions de répartition marginales F (pour X_1 et X_2) et G (pour Y_1 et Y_2). Soient C_1 et C_2 des copules de (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) respectivement, telles que $H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y))$ et $H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$. Soit $\mathbb{Q}$ la différence entre les probabilités de concordance et de discordance de (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) , c'est-à-dire :*

$$\mathbb{Q} = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (3.7)$$

alors, on a :

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(C_1, C_2) = 4 \int \int_{\mathbb{R}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1 \quad (3.8)$$

Preuve 3.3.1 *On a : $\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] = 1 - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0]$ car X_1, X_2, Y_1 et Y_2 sont des variables aléatoires continues ; par conséquent :*

$$\mathbb{Q} = 2\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1$$

or $\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = \mathbb{P}[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] + \mathbb{P}[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2]$, et ces probabilités peuvent être réécrites en intégrant la fonction de répartition de l'un des vecteurs $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$. Nous montrons en premier :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] &= \mathbb{P}[X_2 < X_1, Y_2 < Y_1] \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}[X_2 < x, Y_2 < y] dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} C_2(F(x), G(y)) dC_1(F(x), G(y)) \end{aligned}$$

Et si on pose $u = F(x)$ et $v = G(y)$, on a :

$$\mathbb{P}[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] = \int \int_{\mathbf{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v)$$

De façon similaire, on montre la deuxième partie :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] &= \int \int_{\mathbf{R}^2} \mathbb{P}[X_2 > x, Y_2 > y] dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \int \int_{\mathbf{R}^2} [1 - F(x) - G(y) + C_2(F(x), G(y))] dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \int \int_{\mathbf{I}^2} [1 - u - v + C_2(u, v)] dC_1(u, v) \end{aligned}$$

Or C_1 est la fonction de répartition conjointe du couple (U, V) d'une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]^2$, alors $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) = \frac{1}{2}$, d'où

$$\mathbb{P}[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int \int_{\mathbf{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v)$$

Alors :

$$\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = 2 \int \int_{\mathbf{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v)$$

Ce qui donne ainsi :

$$\mathbb{Q} = 4 \int \int_{\mathbf{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1$$

Définition 3.3.1 Soit C la copule de deux variables aléatoires continues X et Y . Une mesure d'association κ entre X, Y et C est dite mesure de concordance, si elle satisfait les propriétés suivantes :

1. κ est définie pour tout couple (X, Y) de variables aléatoires continues.
2. $-1 = \kappa_{(X, -X)} \leq \kappa_{(X, Y)} \leq \kappa_{(X, X)} = 1$
3. $\kappa_{(X, Y)} = \kappa_{(Y, X)}$
4. Si X et Y sont indépendantes, alors $\kappa_{(X, Y)} = 0$
5. $\kappa_{(-X, Y)} = \kappa_{(X, -Y)} = -\kappa_{(X, Y)}$
6. κ vérifie une relation d'ordre croissante
7. Si $\{(X_n, Y_n)\}$ est une suite de variables aléatoires continues modélisée par une copule $\{C_n\}$. Si $\{C_n\}$ converge vers C , alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{C_n} = \kappa_C$

Le tau de Kendall et le rho de Spearman sont les deux mesures de concordance les plus utilisées.

Définition 3.3.2 Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux vecteurs aléatoires continues et i.i.d, de fonction de répartition conjointe H et de fonction marginales F (pour X_1 et X_2) et G (pour Y_1 et Y_2). Le tau de Kendall noté τ est défini par :

$$\tau = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (3.9)$$

Théorème 3.3.2 *[[163][164]]. Soient X et Y deux variables aléatoires continues de copule C , alors le tau de Kendall de X et Y (noté par τ_{XY} ou τ_C) est donnée par :*

$$\tau_{XY} = \tau_C = \mathbb{Q}(C, C) = 4 \int \int_{\mathbf{I}^2} C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (3.10)$$

On peut interpréter τ_C comme étant la moyenne de la variable aléatoire $C(U, V)$, d'où

$$\tau_C = 4\mathbb{E}[C(U, V)] - 1 \quad (3.11)$$

Définition 3.3.3 *Soient (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) et (X_3, Y_3) trois vecteurs aléatoires indépendants de même loi H . Le coefficient de corrélation de Spearman est défini par :*

$$\rho_S = 3\{\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]\} \quad (3.12)$$

Théorème 3.3.3 *[[163][164]]. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires continues de copule C . Le rho de Spearman est donné par :*

$$\begin{aligned} \rho_{XY} &= \rho_{YX} \\ &= 3\mathbb{Q}(C, \Pi) \\ &= 12 \int \int_{\mathbf{I}^2} uv dC(u, v) - 3 \end{aligned}$$

La notion de dépendance de queue donne une idée pertinente sur la survenue des risques simultanés au niveau des queues de la fonction de répartition. Le coefficient de dépendance de queue mesure la probabilité qu'une variable X subisse une perte plus grande que X_q , conditionnée à la réalisation d'une perte de la variable Y plus grande que Y_q (Joe (1997, [129])).

Nous pouvons définir les coefficients de dépendance de queue à gauche (inférieure) et à droite (supérieure)

Définition 3.3.4 *Soient X et Y deux variables aléatoires continues, dont la relation de dépendance est modélisée par une copule C . F et G sont les fonctions marginales de X et Y , respectivement. Le coefficient de dépendance de queue supérieure (upper tail dependence coefficient) de X et Y est défini par :*

$$\lambda_u = \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(Y > G^{-1}(u) \mid X > F^{-1}(u)) \quad (3.13)$$

$$= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \quad (3.14)$$

$$= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{\overline{C}(u, u)}{1 - u} \quad (3.15)$$

Si $\lambda_u \in (0, 1]$, X et Y sont dites *asymptotiquement dépendantes au niveau supérieur de la queue de la fonction de répartition*. Si $\lambda_u = 0$, X et Y sont dites *asymptotiquement indépendantes au niveau supérieur de la queue de la loi de probabilité*.

De façon similaire le coefficient de dépendance de queue inférieure (lower tail dependence) de X et Y , est défini par :

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(Y \leq G^{-1}(u) \mid X \leq F^{-1}(u)) \quad (3.16)$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} \quad (3.17)$$

lorsque cette limite existe. Si $\lambda_L = 0$, alors la dépendance de queue inférieure est nulle. Les variables X et Y n'ont pas de dépendance de queue à gauche.

Si $\lambda_U \in (0, 1]$, cela signifie qu'il y a une probabilité non nulle que la variable Y dépasse un seuil u sachant que la variable X est déjà supérieure à ce seuil u . Autrement dit, λ_U est la probabilité d'avoir un extrême en Y sachant que X est extrême.

Théorème 3.3.4 [[163][164]] Soient X , Y , F , G et λ_U données par la Définition (3.3.4) et C la copule de X et Y . Si la limite des Équations(3.13) et (3.16) existe, alors

$$\lambda_U = 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(u, u)}{1 - u} \quad (3.18)$$

Preuve 3.3.2 Nous montrons la preuve de l'Équation(3.18).

$$\begin{aligned} \lambda_u &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(Y > G^{-1}(u) \mid X > F^{-1}(u)) \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(G(Y) > u \mid F(X) > u) \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{\overline{C}(u, u)}{1 - u} \\ &= 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(u, u)}{1 - u} \end{aligned}$$

3.4 Les copules paramétriques

Plusieurs familles de copules sont évoquées dans la littérature. Dans cette partie, nous allons présenter les plus utilisées, ainsi que leurs propriétés.

3.4.1 Les copules Archimédiennes

Définition 3.4.1 Soit φ une fonction continue, strictement décroissante et définie de $[0, 1]$ dans $[0, \infty[$ telle que $\varphi(1) = 0$. Le pseudo-inverse (inverse généralisé) de φ est la

fonction $\varphi^{[-1]}$ de domaine de définition $[0, \infty[$, à valeurs dans $[0, 1]$, donnée par :

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & \text{si } \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} \quad (3.19)$$

Soulignons que $\varphi^{[-1]}$ est continue, non croissante sur $[0, \infty[$ et strictement décroissante sur $[0, \varphi(0)]$. En outre, $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ sur $I = [0, 1]$ et

$$\varphi^{[-1]}(\varphi(t)) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ \varphi(0) & \text{si } \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Alors,

$$\varphi^{[-1]}(\varphi(t)) = \min(t, \varphi(0))$$

Si $\varphi(0) = +\infty$, on a alors $\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t)$

Lemme 3.4.1 Soit φ une fonction continue strictement décroissante définie de $[0, 1]$ dans $[0, \infty[$ telle que $\varphi(1) = 0$, et soit $\varphi^{[-1]}$ son inverse généralisé. Soit C une fonction de I^2 dans I définie par :

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (3.20)$$

Alors C vérifie les propriétés fondamentales d'une copule (les définitions, [3.2.1] ((1) et (2))

Dans le lemme suivant, nous allons obtenir une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction C dans le lemme (3.4.1) soit 2-croissante.

Lemme 3.4.2 Soient φ , $\varphi^{[-1]}$ et C les fonctions satisfaisant les hypothèses du lemme(3.4.1), alors la fonction C est 2-croissante si et seulement si

$$C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1, \quad \forall u_1 \leq u_2 \quad (3.21)$$

Théorème 3.4.1 [[163][164]]. Soit φ une fonction continue strictement décroissante de $[0, 1]$ dans $[0, \infty[$ tel que $\varphi(1) = 0$, et soit $\varphi^{[-1]}$ l'inverse généralisé de φ définie par (3.19). Alors la fonction C de I^2 dans I définie par (3.20) est une copule si et seulement si φ est convexe.

Les copules définies par (3.20) sont appelées les copules Archimédiennes et la fonction φ est connue sous le nom de générateur de la copule.

Remarque 3.4.1 Si $\varphi(0) = \infty$, on dit que φ est un générateur strict. Dans ce cas, $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ et $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$ serait une copule Archimédienne stricte.

Pour les copules Archimédiennes, le tau de Kendall peut être évalué directement du générateur, ce qui sera montré dans le théorème suivant.

Théorème 3.4.2 [[163][164]]. Soient X et Y deux variables aléatoires d'une copule archimédienne C générée par φ . Le tau de Kendall de X et Y est donné par :

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt \quad (3.22)$$

Exemples de copules Archimédiennes

1. La famille de Gumbel

Soit la fonction $\varphi(t) = (-\ln t)^\theta$, avec $\theta \geq 1$ et $t \in (0, 1]$. Nous remarquons que $\varphi(t)$ est continue et $\varphi(1) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -\frac{\theta}{t}(-\ln t)^{\theta-1} \quad \varphi'(t) < 0 \\ \varphi''(t) &= \frac{\theta}{t^2}(-\ln t)^{\theta-2}[\theta - 1 - \ln t] \quad \varphi''(t) \geq 0 \end{aligned}$$

φ est une fonction convexe, continue, strictement décroissante et définie de $[0, 1]$ dans $[0, +\infty[$. φ est un générateur. De l'expression (3.20) on déduit que :

$$C_\theta(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) = \exp(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}) \quad (3.23)$$

En utilisant le théorème (3.4.2), Le tau de Kendall de la copule de Gumbel s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \tau_\theta &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt \\ &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{t \ln t}{\theta} dt \\ &= 1 + \frac{4}{\theta} \left(\left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{2} dt \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\theta} \end{aligned}$$

En outre, $C_1 = uv = \Pi$ et $C_\infty = M$. Cette famille est appelée la famille de Gumbel.

La fonction génératrice inverse est donnée par :

$$\varphi^{-1}(t) = \exp(-t^{\frac{1}{\theta}})$$

Par Conséquent

$$\varphi^{-1}(s) = \exp(-s^{\frac{1}{\theta}}) \quad \text{et} \quad \varphi^{-1'}(s) = \frac{-s^{\frac{1}{\theta}-1} \exp(-s^{\frac{1}{\theta}})}{\theta}$$

En utilisant l'expression (3.13)

$$\begin{aligned} \lambda_U &= 2 - 2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi^{-1'}(2s)}{\varphi^{-1'}(s)} \\ &= 2 - 2^{\frac{1}{\theta}} \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{\exp(-(2s)^{\frac{1}{\theta}})}{\exp(-s^{\frac{1}{\theta}})} \right] \\ &= 2 - 2^{\frac{1}{\theta}} \end{aligned}$$

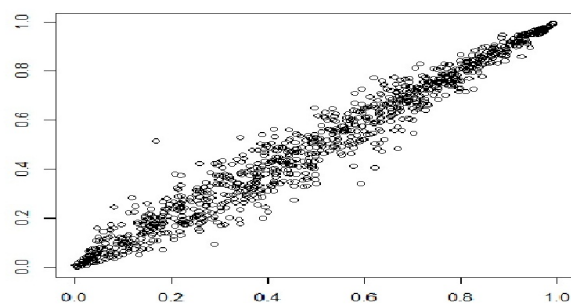


FIGURE 3.1 – Graphique en dimension 2 de la Copule de Gumbel de paramètre = 8.5

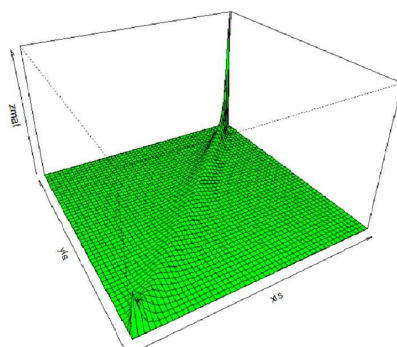


FIGURE 3.2 – Densité de la Copule de Gumbel de paramètre = 8.5

2. La famille de Clayton

Soit la fonction génératrice $\varphi(t) = \frac{t^{-\theta}-1}{-\theta}$ telle que $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$. En appliquant l'expression (3.20), nous trouvons la famille des copules de Clayton, sa fonction est donnée par :

$$C_\theta(u, v) = \max([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-\frac{1}{\theta}}, 0)$$

Pour $\theta > 0$, l'expression de la copule est donnée par :

$$C_\theta(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$$

On a :

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta}$$

En utilisant la relation du théorème(3.4.2), nous pouvons calculer le tau de Kendall pour la famille de Clayton.

$$\begin{aligned} \tau_\theta &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta} dt \\ &= 1 + \frac{4}{\theta} \left(\frac{1}{\theta+2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\theta}{\theta+2} \end{aligned}$$

Pour $\theta \geq 0$, la copule de Clayton est complète, c'est à dire $C_\infty = M$, $\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta = \Pi$ et on a $C_{-1} = W$ pour $\theta = -1$

On a

$$\varphi^{-1}(s) = (1 + \theta s)^{-\frac{1}{\theta}}$$

En utilisant l'expression (3.13), nous pouvons montrons que $\lambda_U = 0$ et le coefficient de dépendance de queue inférieur (3.16) est donné par :

$$\begin{aligned} \lambda_L &= 2 \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{\varphi^{-1'}(2s)}{\varphi^{-1}(s)} \right] \\ &= 2 \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{(1 + 2\theta s)^{-\frac{1}{\theta-1}}}{(1 + \theta s)^{-\frac{1}{\theta-1}}} \right] \\ &= 2 \cdot 2^{-\frac{1}{\theta-1}} \\ &= 2^{-\frac{1}{\theta}} \end{aligned}$$

3. La famille de Franck

Soit $\varphi(t) = -\ln \frac{\exp(-\theta t)-1}{\exp(-\theta)-1}$ telle que $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, l'application de la relation (3.20)

$$C_\theta(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)}{\exp(-\theta) - 1} \right)$$

Le tau de Kendall correspond à cette famille est donné par la formule suivante :

$$\tau_\theta = 1 - \frac{4}{\theta} (1 - D_1(\theta))$$

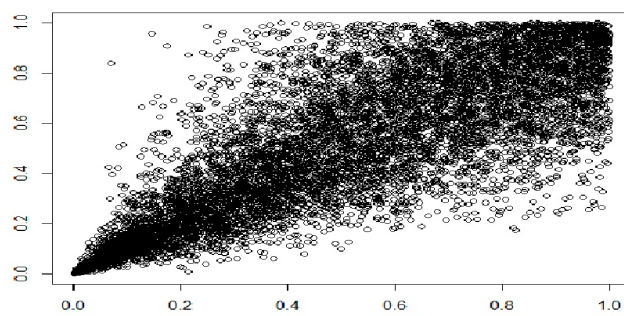


FIGURE 3.3 – Graphique en dimension 2 du Plot de la Copule de Clayton de paramètre $= 3.5$

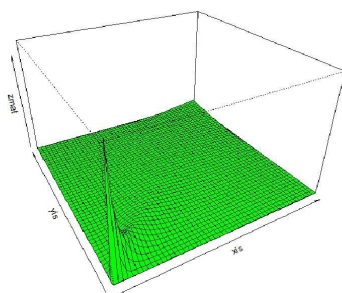


FIGURE 3.4 – Densité de la copule de Clayton de paramètre $= 3.5$

Où $D_k(x)$ est la fonction de Debye donnée par :

$$D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{\exp(t) - 1} dt$$

De plus, le rho de Spearman est donné par :

$$\rho_\theta = 1 - \frac{12}{\theta} (D_1(\theta) - D_2(\theta))$$

Puisque

$$\varphi^{-1'}(0) = -\frac{\exp(\theta) - 1}{\theta}$$

est finie, et selon le théorème(3.4.2) et l'équation (3.13), la famille de Frank n'a pas de dépendance de queue supérieure. En outre,

$$\frac{\varphi^{-1'}(2s)}{\varphi^{-1'}(s)} = \exp(-s) \frac{1 - (1 - \exp(-\theta))(\exp(-s))}{1 - 1 - (1 - \exp(-\theta))(\exp(-2s))}$$

Par conséquent,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{-1'}(2s)}{\varphi^{-1'}(s)} = 0$$

Ainsi la famille de Frank n'a pas de dépendance de queue inférieure.

3.4.2 Les copules extrêmes

Soient $(X_{i1}, \dots, X_{id})_{i=1, \dots, n}$ un échantillon de n vecteurs aléatoire *i.i.d* de fonction de répartition F , de marginales $F_1, \dots, F_n$ et de copule C_F . Soit M_n le vecteur aléatoire dont les composantes sont données par :

$$M_n = (M_{n,1}, \dots, M_{n,d}), \quad \text{tel que} \quad M_{n,j} = \vee_{i=1}^n X_{ij} \quad (3.24)$$

Avec " $\vee$ " dénote le maximum.

S'il existe des suites réelles $(b_{n,j})_{n \geq 1} \in \mathbb{R}$ et $(a_{n,j})_{n \geq 1} \in \mathbb{R}_+^*$ (Théorème(1.2.1)), $j = 1, \dots, d$ telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_{n,1} - b_{n,1}}{a_{n,1}} \leq x_1, \dots, \frac{M_{n,d} - b_{n,d}}{a_{n,d}} \leq x_d\right) = F^*(x_1, \dots, x_d) \quad (3.25)$$

Avec F^* est la fonction de répartition de M_n dont les lois marginales $F_1^*, \dots, F_d^*$ associées à $M_{n,1}, \dots, M_{n,d}$ sont non dégénérées, alors F^* est appelée loi multivariée de valeurs extrêmes de maximum. On dit alors que la fonction de répartition $F \in MDA(F^*)$.

Théorème 3.4.3 [[77]]. *Toute loi limite F^* vérifiant (3.25), est continue. De plus, ses lois marginales sont de type GEV.*

Du fait que F^ est continue, elle peut s'écrire comme fonction copule telle que :*

$$F^*(x_1, \dots, x_d) = C^*(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

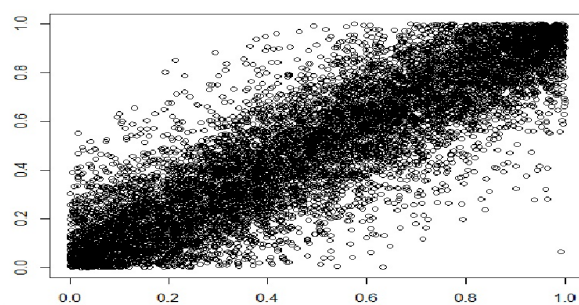


FIGURE 3.5 – Graphique en dimension 2 du Plot de la Copule de Frank de paramètre $= 10.5$

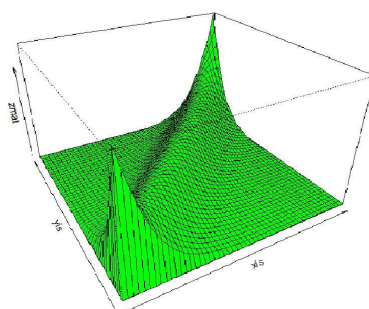


FIGURE 3.6 – Densité de la copule Frank de paramètre $= 10.5$

Théorème 3.4.4 [[77][163][164]]. *La copule C^* associée à F^* est donnée par*

$$C^*(u_1, \dots, u_d) = C_F^n(u_1^{\frac{1}{n}}, \dots, u_d^{\frac{1}{n}}), \quad (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d \quad (3.26)$$

Preuve 3.4.1

$$\begin{aligned} C^*(F_1^*(x_1), \dots, F_d^*(x_d)) &= \mathbb{P}(M_{n,1} \leq x_1, \dots, M_{n,d} \leq x_d) \\ &= \mathbb{P}^n(X_{11} \leq x_1, \dots, X_{1,d} \leq x_d) \\ &= C_F(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))^n \\ &= C_F^n(F_1^*(x_1)^{\frac{1}{n}}, \dots, F_d^*(x_d)^{\frac{1}{n}}) \end{aligned}$$

La famille des copules des valeurs extrêmes peut être interprétée comme limites des copules C^* quand n tend vers l'infini.

Définition 3.4.2 *Une copule C est dite copule extrême, s'il existe une copule C_F qui vérifie :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_F^n(u_1^{\frac{1}{n}}, \dots, u_d^{\frac{1}{n}}) = C(u_1, \dots, u_d) \quad (3.27)$$

$\forall (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$. La copule $C_F \in MDA(C)$.

Lors de la mise en application des copules, il faut être en mesure d'identifier la copule appropriée aux données traitées, en utilisant des méthodes graphiques ou analytiques. L'estimation des paramètres de la copule identifiée se présente comme une étape importante. La littérature offre une variété de méthodes qui peuvent être regroupées en trois classes : méthodes non paramétriques (copules empiriques), méthodes semi-paramétriques (moments) et méthodes paramétriques (maximum de vraisemblance). Pour plus de détails sur les méthodes d'estimation, leurs propriétés et leur comparaison, voir (Genest, Quessy et Rémillard (2006, [100]), Genest (1987, [96]), Deheuvels (1979, 1981, [50], [51]), Nelsen(2006, [164]), Genest et Rivest (1993, [98])).

3.5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'explorer les bases de la théorie des copules, en particulier ses performances en terme de modélisation et de caractérisation des relations de dépendance. Les applications des copules sont multiples ; elles varient de l'hydrologie et de la météorologie, à la finance et aux assurances. Cependant, leur utilisation en économie reste très restreinte. Ainsi, nous contribuons à ce domaine par une application en économie, en présentant dans le prochain chapitre l'utilité des copules pour modéliser la dépendance des variables macroéconomiques et boursières. Cette étude consistera à comparer les prévisions fournies par les copules à celles déduites des modèles classiques(modèles de séries chronologiques).

Chapitre 4

Contribution des copules pour l'amélioration de la prévision des agrégats macro-économiques et des indices boursiers

4.1 Introduction

L'étude de la dépendance des variables macro-économiques et des indices boursiers est l'un des sujets fréquemment évoqué en finance et en économie. La dépendance est en effet, un phénomène qui marque plusieurs aspects de la gestion des risques financiers, l'évaluation des produits dérivés, la couverture de portefeuilles financiers et les études économiques d'impact. Ainsi, dans la littérature, plusieurs travaux se sont intéressés à l'analyse des liens, d'une part entre variables macroéconomiques et d'autres part, entre indices boursiers. Cette analyse est généralement réalisée en utilisant certaines approches traditionnelles, à savoir, les modèles de régression, les modèles de cointégration, l'analyse factorielle et l'étude des séries chronologiques. A titre d'exemple, l'évaluation des liens entre le développement financier et la croissance économique, est souvent réalisée en employant des modèles VAR dans le domaine temporel. Cette approche considère que le lien de causalité entre les variables est constant sur toute la période. Or, il est possible que celui ci ne soit pas linéaire mais qu'il varie selon les périodes ; variation pouvant refléter un contexte économique et financier particulier. En outre, les représentations graphiques des séries macroéconomiques en période de croissance font apparaître des mouvements sinusoïdaux qui ne leur confèrent à priori aucune forme de périodicité, et par conséquent, les techniques classiques ne peuvent

pas de mettre en évidence le processus générateur des données. Par ailleurs, les séries des cours des titres à fréquence élevée sont bien décrites par une imprévisibilité linéaire. Ainsi, nombre de travaux empiriques établissent l'existence de non linéarité dans les prix des titres, non linéarités qui seraient exploitables dans un but prévisionnel. Il faut noter aussi, que l'étude de dépendance entre séries économiques, ne permet pas uniquement la compréhension du processus sous jacent, mais il contribue à l'amélioration des prévisions.

La recherche de structure de dépendance de long terme dans les séries économiques et financières a fait l'objet de nombreuses contributions. On peut par exemple citer les études de Diebold et Rudebusch (1989, [57]) et Sowell (1992, [200]) sur le produit réel, Diebold et Rudebusch (1991, [58]) sur la consommation, Shea (1991, [189]) et Backus et Zin (1993, [5]) sur la structure par terme des taux d'intérêt ou encore Lo (1991, [144]) sur le marché des actions. L'intérêt des recherches sur la mémoire longue est en outre mis en avant par les développements récents afférant à la modélisation de la volatilité des séries par le biais des processus ARFIMA (Bollerslev et Mikkelsen (1996, [17]), Baillie et al. (1996, [6]) et Ding et Granger (1996, [60])) conduisant aux processus FIGARCH. L'analyse multivariée, présente une alternative intéressante qui permet de résoudre les limites théoriques des modèles évoqués.

Nous présentons dans ce qui suit une application basée sur l'analyse multivariée en intégrant les copules conditionnelles. L'utilisation des copules est justifiée par le fait qu'elles permettent de modéliser, séparément, la structure de dépendance et les fonctions de répartition marginales des variables aléatoires étudiées. Cette capacité à "séparer" la structure de dépendance des fonctions marginales donne une flexibilité à la modélisation des variables multivariées. En outre, nombreuses relations peuvent être, souvent, exprimées en termes d'hypothèses sur les corrélations entre deux (ou plusieurs) variables aléatoires. Ce qui peut être facilement modélisé par les copules. Ces hypothèses peuvent concerner par exemple, le processus de bruit blanc, souvent récurrent dans le domaine de la macroéconomie (Dowd (2008, [215])).

Il faut bien rappeler que les copules ont été utilisées récemment, dans divers domaines de la statistique appliquée. En science actuarielle, les copules ont été appliquées aux problèmes tels que l'analyse de survie des variables bivariées, la modélisation de la perte et l'analyse des demandes d'indemnisation Frees et Valdez (1998, [87]). En finance, elles ont été utilisées pour modéliser les probabilités de défaillances multiples des portefeuilles de crédit Li (2000, [143]) et d'estimer la Value at Risk (VaR) (Cherubini et Luciano (2001, [30]), Ane et Kharoubi (2003, [3])). En hydrologie, la modélisation des valeurs extrêmes multivariées utilisant les copules concerne les risques combinés

dans le cadre de l'analyse des fréquences (Genest et al. (2007, [166]), Favre et al. (2004, [79])). Dans le domaine macroéconomique, les copules sont utilisées pour examiner les facteurs communs des fonctions de répartition conditionnelles pour les revenus et la consommation (Granger et al. (2003, [110])).

Notre étude, inspirée des travaux de Grégoire, Genest et Gendron (2008, [111]) et Waszink (2006, [215]), suggère d'explorer les relations qui lient les variables étudiées, afin d'améliorer les prévisions. Notre étude distingue deux cas. Le premier concerne l'inflation et le taux de change, deux indicateurs qui sont au coeur de tout système économique. Le deuxième quant à lui, concerne les indices boursiers. Il faut bien noter que la relation entre inflation et taux de change se transmet selon plusieurs canaux et se manifeste par différents phénomènes économiques.

Considérons par exemple un pays A lié à un pays B par le moyen des échanges du commerce extérieur. Dans le cas où B importe plus de produits provenant de A, ce dernier aura nécessairement une balance commerciale excédentaire. B au contraire, aura une balance commerciale déficitaire. La monnaie de A sera plus demandée que celle de B. Elle s'appréciera par rapport à celle de B. Les exportations de A deviendront alors plus coûteuses et B lui en achètera donc moins. Les exportations de B seront moins coûteuses, et A lui en achètera plus. Nous pouvons ainsi affirmer que la variation du taux de change a un impact direct sur l'économie, en particulier sur le secteur industriel qui est directement exposé aux variations du change dans la mesure où, les produits industriels sont directement confrontés à la concurrence mondiale.

La volatilité du taux de change peut impacter l'économie car la hausse du taux de change est défavorable à la croissance, mais favorable au maintien de l'inflation à des niveaux bas.

Le deuxième cas d'étude qui concerne les indices boursiers, est justifié par l'important rôle assigné à ces indicateurs dans l'économie et en particulier dans le marché financier. La gestion des marchés financiers met en évidence la difficulté de contrôler l'incertitude et de trouver la meilleure façon pour se couvrir contre le risque lié à une forte volatilité du marché. Dans le souci de contrôler le risque de volatilité, les investisseurs sont fréquemment amenés à étudier l'évolution des indices les plus représentatifs du marché boursier.

Avant de présenter les données utilisées et les résultats obtenus, nous consacrons la première partie aux outils méthodologiques adoptés.

4.2 Quelques outils méthodologiques

4.2.1 Extension du théorème de Sklar

La copule exploite l'information issue de la fonction de répartition conjointe, en identifiant les fonctions de répartition uniformes U et V des variables aléatoires continues X et Y . La copule conditionnelle, permet de mieux filtrer cette information.

Définition 4.2.1 Soit un espace de probabilité $(\Omega; \mathcal{F}; \mathbb{P})$.

Une copule conditionnelle à deux dimensions est une fonction $C : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ avec les propriétés suivantes :

1. $C(u, 0|\mathcal{F}) = C(0, v|\mathcal{F}) = 0, \forall u, v \in [0, 1]$
2. $C(u, 1|\mathcal{F}) = u, C(1, v|\mathcal{F}) = v, \forall u, v \in [0, 1]$
3. $V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]|\mathcal{F}) \equiv C(u_2, v_2|\mathcal{F}) - C(u_1, v_2|\mathcal{F}) - C(u_2, v_1|\mathcal{F}) + C(u_1, v_1|\mathcal{F}) \geq 0$ tel que $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$

La première condition établit la borne inférieure de la copule et assure que les lois marginales soient uniformes. La deuxième condition assure l'existence d'un événement observé dans la région $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$.

Nous pouvons maintenant présenter l'extension du théorème de Sklar (1959, [194]) au cas conditionnel :

Théorème 4.2.1 [[172]]. Soit H une fonction de répartition conditionnelle bivariée avec les marges conditionnelles continues F et G . Il existe une copule unique conditionnelle $C : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telle que

$$H(x, y|\mathcal{F}) = C(F(x|\mathcal{F}), G(y|\mathcal{F})|\mathcal{F}), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

Inversement, si C est une copule conditionnelle, F et G sont des fonctions de répartition conditionnelles de variables aléatoires X et Y , alors H définie ci-dessus est une fonction de répartition conditionnelle bivariée avec marges F et G .

Corollaire 4.2.1 Soit H une loi de probabilité bivariée avec des fonctions marginales conditionnelles continues F et G dont les inverses respectifs sont F^{-1} et G^{-1} . Il existe une copule conditionnelle unique $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ telle que

$$C(u, v|\mathcal{F}) = H(F^{-1}(u|\mathcal{F}), G^{-1}(v|\mathcal{F})|\mathcal{F}), \quad \forall u, v \in [0, 1] \quad (4.2)$$

Soit $H(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^{d_1}$, $y \in \mathbb{R}^{d_2}$, la fonction de répartition jointe des vecteurs aléatoires X et Y de lois marginales continues $F_1, \dots, F_{d_1}$ et $G_1, \dots, G_{d_2}$. Le Théorème de Sklar (1959, [194]) nous permet d'affirmer qu'il existe une copule C telle que :

$$H(x, y) = C(F_1(x_1), \dots, F_{d_1}(x_{d_1}); G_1(y_1), \dots, G_{d_2}(y_{d_2})) \quad (4.3)$$

En supposant que les densités des lois marginales et de la copule existent, la densité de H sera

$$h(x, y) = c(F_1(x_1), \dots, F_{d_1}(x_{d_1}); G_1(y_1), \dots, G_{d_2}(y_{d_2})) \prod_{i=1}^{d_1} f_i(x_i) \prod_{j=1}^{d_2} g_j(y_j) \quad (4.4)$$

Où c est la densité de la copule C . La loi de probabilité de la fonction H_X de X est :

$$H_X(x) = C(F_1(x_1), \dots, F_{d_1}(x_{d_1}); 1, \dots, 1) \quad (4.5)$$

Avec la densité

$$h_X(x) = c_X(F_1(x_1), \dots, F_{d_1}(x_{d_1})) \prod_{i=1}^{d_1} f_i(x_i)$$

Ainsi, en posant $u = (\{F_1(x_1), \dots, F_{d_1}(x_{d_1})\})$ et $v = (\{G_1(y_1), \dots, G_{d_2}(y_{d_2})\})$, on peut écrire à l'aide du théorème de Bayes la densité $h_{Y|X}$ de Y étant donné $X = x$, ainsi :

$$h_{Y|X}(y | x) = \frac{h(x, y)}{h_X(x)} = c_{V|U}(v | u) \prod_{j=1}^{d_2} g_j(y_j)$$

Où

$$c_{V|U}(v | u) = \frac{c(u, v)}{c_U(u)} \quad (4.6)$$

est la densité conditionnelle de V étant donné $U = u$.

Définition 4.2.2 (*Copule conditionnelle*) Soient $u = \{F_1(x_1), \dots, F_{d_1}(x_{d_1})\}$ et $v = \{G_1(y_1), \dots, G_{d_2}(y_{d_2})\}$ où $F_1, \dots, F_{d_1}$ et $G_1, \dots, G_{d_2}$ sont les lois marginales continues des vecteurs aléatoires $X = \{x_1, \dots, x_{d_1}\}$ et $Y = \{y_1, \dots, y_{d_2}\}$ respectivement et C la copule. On appelle copule conditionnelle de Y étant donné $X = x$, la copule de V étant donné $U = u$ notée $C_{2|1}(V | U = u)$, définie par :

$$\begin{aligned} C_{2|1}(V | U = u) &= \mathbb{P}(V \leq v | U = u) \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{C(u + \Delta u, v) - C(u, v)}{\Delta u} \\ &= \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \end{aligned}$$

De façon similaire, on définit la copule conditionnelle U étant donné $V = v$, notée $C_{1|2}(U | V = v)$

$$\begin{aligned} C_{1|2}(U | V = v) &= \mathbb{P}(U \leq u | V = v) \\ &= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{C(u, v + \Delta v) - C(u, v)}{\Delta v} \\ &= \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \end{aligned}$$

Définition 4.2.3 On définit la loi de probabilité de Y conditionnelle à x par :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leq y | X = x) &= E(\mathbb{I}_{(Y \leq y)} | X = x) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(Y \leq y | x \leq X \leq x + \epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H(x + \epsilon, y; \theta) - H(x, y; \theta)}{F(x + \epsilon) - F(x)} \\ &= C_{2|1}(G(y) | F(x); \theta)\end{aligned}$$

Proposition 4.2.1 Soit C la copule des variables aléatoires définies par (4.2.2), $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\mathbb{P}(Y \leq y | X = x) = C_{2|1}(G(y) | F(x))$$

et

$$\mathbb{P}(X \leq x | Y = y) = C_{1|2}(F(x) | G(y))$$

Cette propriété découle de la Définition (4.2.2) et du résultat (4.2.3).

On note $p(x, y; \theta) = C_{2|1}(v | u; \theta)$ en posant $F(x) = u$ et $G(y) = v$ avec $C_{2|1}(v | u; \theta) = \frac{\partial C(u, v; \theta)}{\partial u}$. Puisque les fonctions de répartition F_X et F_Y sont non décroissantes, $p(x, y, \theta)$ est croissante en y . Dans les mêmes conditions, $p(x, y, \theta)$ est croissante en x si $\frac{\partial^2 C(u, v, \theta)}{\partial u^2} \leq 0$ et non croissante en x si $\frac{\partial^2 C(u, v, \theta)}{\partial u^2} \geq 0$.

Définition 4.2.4 Pour une copule bivariable paramétrique $C(., .; \theta)$, la courbe $p^{\text{ième}}$ C -quantile de y conditionnellement à x est définie par l'équation implicite suivante :

$$p = C_{2|1}(F_X(x), G_Y(y); \theta) \quad (4.7)$$

Où $\theta \in \Theta$ l'ensemble des paramètres de la copule.

Si l'inverse partiel de $C_{2|1}$ par rapport au second argument existe, l'équation (4.7) peut être exprimée comme suit :

$$y = q(x, p, \theta) \quad (4.8)$$

Où $q(x, p, \theta) = G_Y^{[-1]}(C_{2|1}^{-1}(F_X(x), p; \theta))$ avec $C_{2|1}^{-1}$ est l'inverse de $C_{2|1}$ par rapport au second argument et $G_Y^{[-1]}$ est l'inverse généralisée de G_Y . Notons que la relation (4.8) peut alternativement être exprimée en utilisant des marges uniformes :

$$v = r(u, p, \theta) \quad (4.9)$$

Où $u = F_X(x)$ et $v = G_Y(y)$.

4.2.2 Exemples pour la construction des copules conditionnelles

La Copule de Kimeldorf et Sampson

Considérons la copule donnée par

$$C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}, \quad \text{pour } \theta > 0$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} C_{2|1}(v|u) &= \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \\ &= -\frac{1}{\theta}(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1+\theta}{\theta}}(-\theta u^{-(1+\theta)}) \\ &= (1 + u^\theta(v^{-\theta} - 1))^{-\frac{1+\theta}{\theta}} \end{aligned}$$

Nous allons résoudre l'équation $p = C_{2|1}(v|u)$ pour v donnée

$$C_{2|1}^{-1}(v|u) = v = ((p^{-\frac{\theta}{1+\theta}} - 1)u^{-\theta} + 1)^{-\frac{1}{\theta}}$$

Ce qui nous donne le C -quantile de v pour tout u donnée. En utilisant les fonctions de répartition univariées pour $u = F_X(x)$ et $v = G_Y(y)$ (fonctions de répartition empiriques si nous utilisons l'approche semi-paramétrique pour l'estimation de la copule), on peut trouver des expressions explicites pour les C -quantiles conditionnels pour la variable Y conditionnelle à X

$$y = G_Y^{-1}(((p^{-\frac{\theta}{1+\theta}} - 1)F_X(x)^{-\theta} + 1)^{-\frac{1}{\theta}})$$

La Copule Archimédienne bivariée

La copule Archimédienne est définie comme suit :

$$C(u, v) = \Phi^{-1}(\Phi(u) + \Phi(v))$$

Avec Φ est une fonction continue et strictement décroissante sur $[0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ telle que $\Phi(1) = 0$. Φ est souvent appelée fonction génératrice. A partir de $p = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} p &= \frac{\Phi'(u)}{\Phi'(C(u, v))} \\ p &= \frac{\Phi'(u)}{\Phi'(\Phi^{-1}(\Phi(u) + \Phi(v)))} \end{aligned}$$

On peut déduire la courbe de régression quantile pour les copules archimédiennes bivariées par

$$\begin{aligned} v &= r(u, p; \theta) \\ v &= \Phi^{-1}(\Phi(\Phi^{-1}(\frac{1}{p}\Phi'(u)))) - \Phi(u) \end{aligned}$$

En remplaçant $u = F_X(x)$ et $v = G_Y(y)$ dans l'équation on obtient la relation suivante :

$$y = G_Y^{-1}(\Phi^{-1}(\Phi(\Phi'^{-1}(\frac{1}{p}\Phi'(F_X(x)))) - \Phi(F_X(x))))$$

La Copule de Frank

Cette copule est donnée par

$$C(u, v; \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln(1 + \frac{(\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)}{\exp(-\theta) - 1})$$

En calculant la dérivée première de la copule de Frank par rapport à u , on obtient la courbe de la $p^{ième}$ C -quantile, on pose $p = C_{2|1}(u, v; \theta)$, on a :

$$p = \exp(-\theta u)((1 - \exp(-\theta))(1 - \exp(-\theta v))^{-1} - (1 - \exp(-\theta u))^{-1})$$

Où de façon équivalente

$$v = -\frac{1}{\theta} \ln(1 - (1 - \exp(-\theta))(1 + \exp(-\theta u)(p^{-1} - 1))^{-1})$$

À partir de la définition de la répartition uniforme, on obtient la relation non linéaire entre x et y pour le p -quantile comme suit :

$$y = G_Y^{[-1]}(-\frac{1}{\theta} \ln(1 - (1 - \exp(-\theta))(1 + \exp(-\theta F_X(x))(p^{-1} - 1))^{-1}))$$

La Copule Gaussienne

La copule gaussienne bivariée est donnée par

$$C(u, v; \rho) = \Phi(\phi^{[-1]}(u), \phi^{[-1]}(v); \rho)$$

avec Φ la loi gaussienne bivariée et ϕ la loi de probabilité univariée.

$$p = \Phi(\frac{\phi^{[-1]}(v) - \rho\phi^{[-1]}(u)}{\sqrt{1 - \rho^2}})$$

De façon similaire, on va résoudre l'équation suivante en prenant la courbe de la $p^{ième}$ C -quantile

$$v = r(u, p; \rho) = \phi(\rho\phi^{[-1]}(u) + \sqrt{1 - \rho^2}\phi^{[-1]}(p))$$

La pente de la courbe de la p -quantile est donné par :

$$\frac{\partial r(u, p; \rho)}{\partial u} = \rho \frac{\phi(\rho\phi^{[-1]}(u) + \sqrt{1 - \rho^2}\phi^{[-1]}(p))}{\phi(\phi^{[-1]}(u))}$$

Une corrélation positive est caractérisée par une pente positive et inversement pour une corrélation négative. Par ailleurs, nous avons

$$\frac{\partial r(u, p; \rho)}{\partial p} = \sqrt{1 - \rho^2} \frac{\phi(\rho\phi^{[-1]}(u) + \sqrt{1 - \rho^2}\phi^{[-1]}(p))}{\phi(\phi^{[-1]}(u))}$$

qui est toujours positive. La relation entre y et x pour la p -quantile est la suivante :

$$y = G_Y^{[-1]}(\phi(\rho\phi^{[-1]}(F_X(x)) + \sqrt{1 - \rho^2}\phi^{[-1]}(p))) \quad (4.10)$$

Supposons que X et Y sont deux variables aléatoires de lois gaussiennes jointes avec $\mu_X = E(X)$, $\mu_Y = E(Y)$, $\sigma_X^2 = Var(X)$, $\sigma_Y^2 = Var(Y)$ et $\rho = Corr(x, y)$. Alors, en se basant sur l'Équation.(4.10), la relation devient linéaire et nous avons

$$y = q(x_t, p; \rho) = a + bx$$

Avec $a = \mu_Y + \sigma_Y\sqrt{1 - \rho^2}\phi^{[-1]}(p) - \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\mu_X$ et $b = \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$

4.2.3 Analyse univariée des séries chronologiques

Une série chronologique (ou temporelle) est une succession d'observations au cours du temps :

$$\{X_t : t = 1, \dots, n\} = \{X_1, \dots, X_n\}$$

L'analyse des séries chronologiques est une partie de la statistique qui a pour but de caractériser la dépendance pouvant exister dans une série d'observation. Dans la littérature, la plupart des modèles statistiques font appel à l'hypothèse d'indépendance des observations. Cependant, lorsqu'on observe un phénomène dans le temps, on s'attend en général à ce que des observations suffisamment rapprochées soient liées entre elles. Dans une telle situation, nous ne pouvons par conséquent appliquer des modèles statistiques faisant appel à l'hypothèse d'indépendance. L'approche que nous allons considérer dans cette partie consiste à caractériser la dépendance via un modèle et une fois que nous avons ajusté un modèle satisfaisant à une série chronologique, nous verrons qu'en plus de nous permettre de mieux comprendre le phénomène étudié. Ce modèle des série chronologique ajusté servira à prédire les valeurs futures de la série. Nous présentons dans cette section comment modéliser une série chronologique, qui une fois tendance et saisonnalité supprimées, est stationnaire. A noter que le seul fait de supprimer la tendance et la saisonnalité ne rend pas la série nécessairement stationnaire, puisque cela n'affecte pas la variance et l'auto-covariance, qui doivent être constantes pour un processus stationnaire.

Stationnarité

Une propriété importante des séries chronologiques est la stationnarité. La définition suivante présente le type de stationnarité le plus utilisé.

Définition 4.2.5 Une suite $\{X_t : t = 1, \dots, n\}$ de variables aléatoires est dite stationnaire du second ordre si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\mathbb{E}[X_t] = \mu < \infty \quad (4.11)$$

$$\mathbb{E}[X_t^2] < \infty \quad (4.12)$$

$$\text{Cov}(X_s, X_{s+t}) < \text{Cov}(X_{s-1}, X_{s-1+t}) = \dots = \text{Cov}(X_1, X_t), \quad \text{pour tout } s, t \in \mathbb{N} \quad (4.13)$$

Remarque 4.2.1 On appelle $\text{Cov}(X_t, X_{t+h})$ l'autocovariance à l'horizon h et on la note :

$$\gamma^X(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h})$$

On peut prendre cette fonction et la diviser par la variance de X_t pour obtenir une fonction appelée autocorrélation (ACF). On la note :

$$\rho^X(h) = \frac{\gamma^X(h)}{\gamma^X(0)}$$

Avec les propriétés suivantes :

1. $-1 \leq \rho^X(h) \leq 1$;
2. $\rho^X(h) = 0$ signifie les observations X_t et X_{t+h} sont non corrélées ;
3. $\rho^X(h) = 1$ ou $\rho^X(h) = -1$ signifie la corrélation est parfaite (positive ou négative)

Les processus autorégressifs

Les premiers modèles que nous présentons sont les processus autorégressifs, construits à partir de l'idée que l'observation au temps t s'explique linéairement par les observations précédentes.

Définition 4.2.6 On dit que $\{X_t : t = 1, \dots, n\}$ est un processus autorégressif d'ordre p (centré), et noté $AR(p)$, s'il est solution d'une équation aux différences de la forme :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + a_t \quad t \in \mathbb{N} \quad (4.14)$$

Où les paramètres $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ sont réels et $\{a_t : t \in \mathbb{N}\}$ est un bruit blanc.

En posant $\phi(B) = 1 - \phi_1 B + \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$, l'équation aux différences (4.14) est équivalente à :

$$\phi(B)X_t = \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{N}$$

Et l'opérateur $\phi(B)$ est appelé opérateur autorégressif. Un processus $AR(p)$ est stationnaire si et seulement si les racines du polynôme autorégressif $\phi(z)$ sont strictement supérieures à 1 en module.

Les processus en moyenne mobile

Définition 4.2.7 On dit que $\{X_t : t = 1, \dots, n\}$ est un processus moyenne mobile d'ordre q , et noté $MA(q)$, s'il admet la représentation :

$$X_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \dots + \theta_q a_{t-q} \quad t \in \mathbb{N} \quad (4.15)$$

Où les paramètres moyennes mobiles $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ sont réels et $\{a_t : t \in \mathbb{N}\}$ est un bruit blanc.

En posant $\theta(B) = 1 - \theta_1 B + \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$, l'équation aux différences (4.14) est équivalente à :

$$\theta(B)X_t = a_t, \quad t \in \mathbb{N}$$

Et l'opérateur $\theta(B)$ est appelé opérateur moyenne mobile. Un processus $MA(q)$ est toujours stationnaire.

Les processus mixte ARMA(p,q)

Si on fait l'analogie entre le modèle autorégressif $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + a_t$ et le modèle de régression multiple, on peut considérer que $\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p}$ est la partie de X_t expliquée par le modèle et a_t représente l'erreur. Ainsi, dans le modèle autorégressif, les erreurs sont non corrélées. Cependant, dans plusieurs situations en régression, les erreurs sont dépendantes et une façon simple de caractériser cette dépendance consiste à supposer que les erreurs sont décrites par un processus moyenne mobile.

Définition 4.2.8 On dit que $\{X_t : t = 1, \dots, n\}$ est un processus autorégressif moyenne mobile d'ordre (p, q) , et noté $ARMA(p, q)$, s'il admet la représentation :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \dots + \theta_q a_{t-q} \quad t \in \mathbb{N} \quad (4.16)$$

Où $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ sont appelés les paramètres autorégressifs et $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ sont les paramètres moyennes mobiles $\{a_t : t \in \mathbb{N}\}$ est un bruit blanc.

La stationnarité d'un $ARMA(p, q)$ est assurée lorsque toutes les racines du polynôme

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z + \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p$$

sont de module strictement supérieur à 1.

On note $\{X_t\} \sim ARMA(p, q)$.

Remarque 4.2.2 On note certaines propriétés pour les modèles $ARMA(p, q)$:

1. Si $p = q = 0$, on a $X_t = a_t \sim WN(0, \sigma_a^2)$, c'est à dire $\{a_t : t \in \mathbb{N}\}$ est un bruit blanc faible de loi normale centrée de variance σ_a^2 .
2. Si $p = 0$ et $q \neq 0$, on a $\{X_t\} \sim MA(q)$.
3. Si $q = 0$ et $p \neq 0$, on a $\{X_t\} \sim AR(p)$.

Estimation d'un modèle ARMA(p,q)

L'estimation des paramètres d'un modèle ARMA(p, q) lorsque les ordres p et q sont supposés connus peut se réaliser par différentes méthodes :

- Moindres Carrés Ordinaires (MCO) (Modèle sans composant Moyenne Mobile (MA), $q = 0$). Dans ce cas, on retrouve les équations de Yules Walker. En remplaçant les autocorrélations théoriques par leur estimateurs, on peut retrouver les estimations des MCO des paramètres du modèles des équations de Yule Walker.
- Maximum de Vraisemblance approché (Box and Jenkins (1970, [21]))
- Maximum de Vraisemblance exacte (Newbold (1974, [165]), Harvey et Philips (1979, [120]), Harvey (1981, [119]))

Prévision d'un modèle ARMA(p,q)

L'objectif est de prévoir la valeur que va prendre la variable aléatoire X_{n+h} , h étant appelé l'horizon de la prévision, ayant observé la réalisation des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$.

Dans le cadre d'une modélisation ARMA, on choisit d'estimer X_{n+h} par une combinaison linéaire des $(X_j)_{1 \leq j \leq n}$ précédents :

$$\widehat{X}_{n,h} = c_{1,h}X_1 + \dots + c_{n,h}X_n$$

Les coefficients $c_{j,h}$ sont estimés de sorte à ce qu'il minimise :

$$\mathbb{E}[(X_{n+h} - c_{1,h}X_1 - \dots - c_{n,h}X_n)^2]$$

4.2.4 Ajustement des modèles séries chronologiques

Pour identifier un modèle adéquat pour les séries chronologiques, nous utilisons la méthodologie de Box-Jenkins des modèles ARMA (p,q), où p est l'ordre du modèle Autorégressif (AR) et où q est l'ordre du modèle Moyenne Mobile (MA) . Cette méthodologie peut être synthétisée par les étapes suivantes :

- 1 . Transformer les données, si nécessaire, de sorte que l'hypothèse de stationnarité de la moyenne et la covariance soient vérifiées ;

- 2 . L'identification des paramètres p et q (le choix du modèle),
- 3 . L'estimation des paramètres du modèle (ϕ, θ) ,
- 4 . La validation du modèle (tests d'adéquation, le Résidu est un bruit blanc)
- 5 . La prévision déduite du modèle le plus adapté aux données.

Une façon naturelle d'identifier le modèle ARMA est de comparer les graphiques de l'autocorrélation des observations avec ceux d'un modèle ARMA théorique(simulé). Les graphiques constituent donc la méthode la plus adaptée pour l'identification des paramètres (le choix du modèle). Ils peuvent aussi indiquer la non-stationnarité, la saisonnalité et la nécessité de transformer les données (différence, log,...).

4.2.5 Ajustement des copules pour des séries autocorrélées

Dans la plupart des articles qui traitent les séries chronologiques multivariées, la dépendance possible entre séries est soit ignorée, soit traitée séparément de l'interdépendance entre séries. Lorsque la dépendance sérielle est prise en compte, elle est habituellement traitée en utilisant une modélisation univariée des séries chronologiques en par des modèles Autorégressifs AR et GARCH, tandis que l'interdépendance entre série chronologique est modélisée par une copule associée aux innovations (i.i.d) issues de ces modèles AR et GARCH (Patton (2001, [172]), Van den Goorbergh et al.(2005, [211]), Zhang et Guégan (2008, [219]), Waszink (2006, [215]), Grégoire, Genest et Gendron (2008, [111])).

Dans cette section, les données observées $((X_1, \dots, X_T) \text{ ou } (Y_1, \dots, Y_T))$ peuvent présenter des autocorrélations (tests standard de Box-Pierce et de Ljung-Box). Dans ce cas, il sera judicieux de combiner des séries chronologiques avec dépendance de X_t et Y_t au sein de la même structure (Waszink (2006, [215]), Grégoire, Genest et Gendron (2008, [111])). Les séries X_t et Y_t sont modélisées séparément en tant que séries temporelles en tenant compte de l'autocorrélation par les modèles Autorégressif. Les modèles de séries chronologiques (par exemple AR, GARCH) sont couramment utilisés pour modéliser les variables pour lesquelles des observations consécutives sont dépendantes au cours du temps. Si ces modèles sont bien ajustés aux données étudiées X_t et Y_t , alors les innovations (résidus) de chaque série sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d). Nous déterminons les fonctions marginales F et G de chaque résidu ϵ_{X_t} et ϵ_{Y_t} . On modélise ensuite la dépendance entre les séries X_t et Y_t par la copule $C(F(\epsilon_{X_t}); G(\epsilon_{Y_t}))$. Les meilleures copules $C(F(\epsilon_{X_t}); G(\epsilon_{Y_t}))$ ajustées, seront utilisées pour avoir la prévision de X_t ou Y_t .

4.2.6 Ajustement des copules pour des séries non autocorrélées

Si les séries traitées ne sont pas autocorrélées, le théorème de Sklar (1959, [194]), permet directement de modéliser leur dépendance. Ainsi, pour ce cas, nous appliquons une approche générale de la théorie des copules conditionnelles (Nelsen (1999,2006, [163],[164])) et définition (4.2.2)) qui exploite la forme de la copule reliant les observations multivariées X_t et Y_t . Nous utilisons les quantiles issus des copules ou en d'autres termes la méthode de Quantile-Copule (équation(4.8)) pour avoir la prévision de X_t ou Y_t .

4.3 Application des copules conditionnelles aux séries temporelles et aux rendements boursiers

Notre application s'inspire des travaux de Patton (2001, [172]) et de van den Goorbergh et al.(2005, [211]). Dans son article, Patton (2001, [172]) tente de modéliser la structure de dépendance de façon dynamique à l'aide des copules. Son travail repose essentiellement sur une extension clé du théorème de Sklar (4.2.1). Patton montre que le théorème peut être généralisé et appliqué aux lois de probabilité conditionnelles, permettant ainsi de modéliser la dépendance conditionnelle de façon dynamique dans le temps. Dans son article, Patton a appliqué sa méthodologie afin de modéliser de façon dynamique la loi de probabilité jointe conditionnelle, correspondante aux données journalières du taux de change (Mark allemand, dollar U.S. et Yen-dollar U.S). Pour les lois marginales, Patton choisit une spécification des modèles autorégressifs (AR)et t-GARCH. Les copules utilisées pour ces données traitées sont la copule gaussienne et la copule Joe-Clayton.

Dans leur article, Van den Goorbergh et al.(2005, [211]) étudient le comportement du prix des options de type "better of two markets" et "worse of two markets" portant sur les indices Standard and Poor's 500 et Nasdaq. De façon similaire à Patton (2001, [172]), ils proposent une modélisation dynamique de la structure de dépendance entre les deux actifs sous-jacents.

Zhang et Guégan (2008, [219]) proposent également une méthode pour évaluer des droits contingents en utilisant une copule à paramètre non constant à l'aide d'un processus GARCH. Leur méthode est semblable à celle proposée par Van den Goorbergh et al.(2005, [211]). Leur travail fait appel également au concept de copule conditionnelle introduite par Patton (2001, [172]). Dans leurs études, ces auteurs s'intéressent avant

tout au choix de la copule. Plus précisément, ils utilisent les innovations d'un processus GARCH pour estimer la "meilleure" copule sur différents sous-intervalles à l'aide du critère AIC.

Pour notre cas d'étude, nous appliquons la théorie des copules conditionnelles pour modéliser la loi de probabilité bivariable conditionnelle, correspondante aux données macroéconomiques et aux rendements boursiers. La particularité des observations macroéconomiques est le fait de manifester des autocorrélations, contrairement aux rendements des indices boursiers qui sont non corrélés.

Nous nous intéressons à l'estimation de la meilleure copule appropriée pour les deux types de données étudiées. Les copules choisies (meilleures copules) sont celles qui présentent de bonnes qualités en se basant sur les p-values significatives d'un test d'ajustement (Genest et al.(2009, [102])). Ces meilleures copules, seront utilisées pour la prévision en appliquant l'approche "Copule-Quantile" (équation (4.8)). Nous comparons ensuite les prévisions des copules avec celles issues des modèles autorégressifs (AR) (Mervin (1983, [156]), Engel (1998, [76]), Nguiffo-Boyom (2006, [166]), Nwogugu (2006, [167])), qui ne prennent pas en compte, par construction, l'impact des variables exogènes.

4.3.1 Données étudiées

Notre étude distingue deux cas de figure. Une première partie traite l'inflation de la zone européenne et le taux de change Euro/Dollar sur la période de Mars 1999 à Octobre 2010. Il s'agit de séries chronologiques autocorrélées. La deuxième partie, quant à elle, concerne les indices boursiers DJIA et Nasdaq sur la période allant de Janvier 1990 à Décembre 2010. Notons que les rendements normalisés des indices traités sont non corrélés.

A- Les agrégats macroéconomiques : Inflation en zone Euro et taux de change(TCH) Euro/Dollar :

L'inflation

L'inflation se définit comme une augmentation soutenue du niveau "général" des prix. Elle concerne une augmentation durable du niveau moyen des prix plutôt qu'une hausse passagère de quelques prix spécifiques.

L'indice des prix à la consommation (IPC) est l'instrument de mesure de l'inflation. C'est un indicateur synthétique de l'évolution des prix à qualité constante, qui permet

d'estimer, entre deux périodes données, la variation du niveau général des prix des biens et des services consommés par les ménages sur un territoire donné. L'IPC est obtenu en pondérant l'ensemble des prix des biens et services, qui composent le panier de consommation en fonction de leur importance relative dans le budget total d'un consommateur typique.

L'IPC joue un rôle très important dans l'économie car il permet de suivre mois par mois l'inflation. L'IPC est également utilisé comme déflateur de nombreux agrégats économiques (consommations, revenus...) pour calculer des évolutions en volume, ou en termes réels ("en euros constants"). Les indices des prix ont fait l'objet d'un travail d'harmonisation entre les services statistiques nationaux sous la coordination d'Eurostat. Il faut bien noter que les indices des prix à la consommation harmonisés (IPCH) ainsi obtenus, ne se substituent pas aux IPC nationaux. Dans le cadre de l'objectif de stabilité des prix de la Banque Centrale Européenne, l'IPCH est l'indicateur majeur pour la bonne conduite de la politique monétaire dans la zone euro. Le Graphique présente l'évolution de l'inflation mensuelle sur la période 1999-2010 dans la zone Euro.

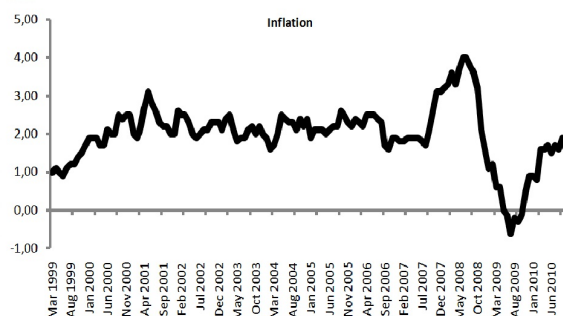


FIGURE 4.1 – l'inflation mensuelle Mars 1999-Octobre 2010

La Figure (4.1) montre que l'inflation, présente une certaine instabilité, avec des valeurs qui oscillent entre 1.1% et 2.3%. Le différentiel d'inflation entre 1999 et les années 2000 (environ 1 point de pourcentage) explique une part non négligeable des variations observées dans le rythme de la croissance du pouvoir d'achat en zone Euro.

On constate particulièrement en 2008, un taux d'évolution de l'inflation relativement élevé, par rapport aux années précédentes où l'inflation se situe en moyenne autour 2.1. L'année 2009 a connu une forte baisse de l'inflation de l'ordre de 3.0 points par rapport à l'année 2008, accompagnée d'une relance autour 1.5 en 2010.

Nous remarquons que la période 1999-2010 a été caractérisé par une instabilité. Ce

constat montre le caractère volatile de l'inflation. Par ailleurs, l'analyse de l'inflation (Figure.(4.1)) sur cette période nous montre qu'elle a atteint son plus grand niveau (4.0) en Juillet.

Le taux de change Euro/Dollar

Les taux de change sont les prix relatifs des monnaies nationales. Dans un système de change flottant, ils peuvent être naturellement déterminés suite à l'interaction de l'offre et de la demande sur les marchés de change étrangers (OCDE,1985).

Les taux de change des devises sont fixés sur le marché des changes. Chaque pays ou zone monétaire décide de son régime de change, fixe ou flottant.

Lors de l'introduction de l'euro en janvier 1999, les économistes ont manifesté leurs inquiétudes par rapport à une surévaluation potentielle de la nouvelle monnaie. Mais les craintes d'une pénalisation des exportations ont vite été dissipées du fait de la dépréciation de l'euro pendant plus de deux ans. Il a fallu attendre mai 2002 pour que la tendance soit renversée et retrouver une parité en faveur de l'euro. En effet, l'évolution de l'euro a manifesté une pente descendante entre janvier 1999 et novembre 2000 : il a perdu 25% de sa valeur par rapport au dollar. Après une phase plus contrastée entre janvier 2001 et mars 2002, l'euro n'a pas cessé de s'apprécier par rapport au dollar pour retrouver dans un premier temps (mai 2003) son niveau de lancement (1.1 dollar/euro) et dépasser, dans un deuxième temps, cette barre et atteindre le 1.18 au mois de novembre 2003 (Figure(4.2)).

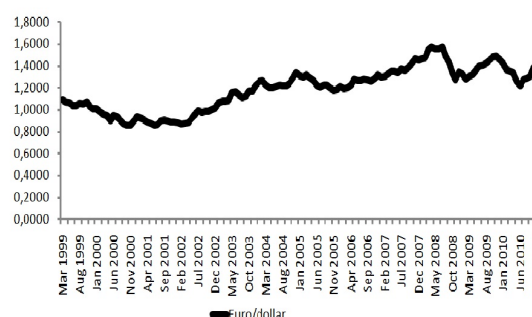


FIGURE 4.2 – L'évolution du taux de change mensuel Mars 1999-Octobre 2010

La Figure (4.2) présente l'évolution de taux de change. Depuis 1999, il a connu deux périodes de baisse (1999-2000 et 2009-2010), une période de hausse (2002-2008) et une période de stabilité (2000-2002).

La Figure (4.3) présente l'évolution de l'inflation en zone euro et le taux de change sur la période 1999-2010.

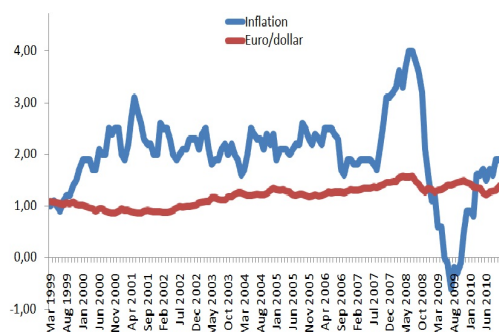


FIGURE 4.3 – L'évolution de l'inflation et du taux de change 1999-2010

La Figure (4.3) montre que les fluctuations de l'inflation et du taux de change sont liées. On peut remarquer que, bien que le taux de change manifeste une tendance à la hausse, l'inflation se comporte de façon instable sur cette période.

La relation entre le taux de change et l'inflation peut se traduire par plusieurs mécanismes. Le taux de change affecte l'inflation soit indirectement, du fait qu'il impacte les prix relatifs des biens domestiques et des biens étrangers et par conséquent affecte la demande interne, soit directement, dans la mesure où le taux de change exerce une influence sur les prix des biens importés, et par conséquent, sur l'ensemble des biens domestiques. On peut alors remarquer que l'impact de la variation du taux de change sur les prix domestiques passe par les fluctuations des prix des produits importés.

Plusieurs études empiriques se sont penchées, ces dernières années, à analyser la relation entre le taux de change et l'inflation. Choudhri et Hakura (2001, [32]), pour un échantillon de 71 pays ont trouvé que les variations du taux de change et des prix domestiques sont corrélées positivement avec les variations de l'inflation. Ce constat a été confirmé par Devereux et Yetman (2003,[55]).

B- Les indices boursiers :Dow Jones Industrial Average (DJIA) et le Nasdag

Le Dow Jones Industrial Average (DJIA)

Le Dow Jones Industrial Average (abrégé en DJIA) est le plus vieux indice des bourses de New York et du monde. Depuis sa création en 1884, le DJIA donne une idée syn-

thétisée sur le marché boursier américain. La valeur du DJIA a connu beaucoup de fluctuations. Il a atteint son plus haut niveau historique à 14 198.10 points le 11 octobre 2007 et sa plus forte baisse le 27 octobre 2008 à 8 175.77 points.(Figure(4.4)). La volatilité du DJIA peut être expliqué par plusieurs événements importants qui ont

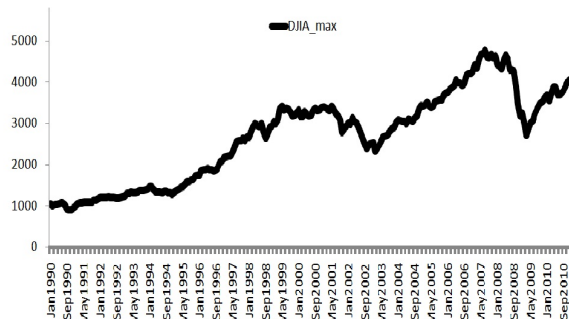


FIGURE 4.4 – l'évolution de l'indice DJIA de janvier 1999 à Décembre 2010

marqué son histoire :

- 24 octobre 1929 : Crise de 1929 ;
- 19 octobre 1987 : Crash d'octobre 1987 ;
- 2008 : Crise financière.

le Nasdaq

Le Nasdaq, sigle de National Association of Securities Dealers Automated Quotations, est le deuxième indice boursier dans le marché des actions aux États-Unis, en terme d'importance en volume. Le NASDAQ a été créé en 1971. Il cote aujourd'hui environ 3 200 valeurs, dont beaucoup ont vu leurs cours s'effondrer lorsque leurs paris technologiques ont échoué. La Figure (4.5) montre la nature volatile de l'indice Nasdaq, sur une période allant de mars 1990 à décembre 1999 : un record maximal de 5132.52 points en Mars 2000, une baisse progressive entre Avril 2000 à 4572.84 points et septembre 2003 à 1467.37.

La Figure(4.6) présente l'évolution des deux indices NASDAQ et DJIA sur la période de janvier 1999 à Décembre 2010. L'analyse de la relation (Figure (4.6)) indique qu'à court terme, la corrélation entre les deux indices, pourtant si différent dans leur composition et leur mode de calcul, est évidente.

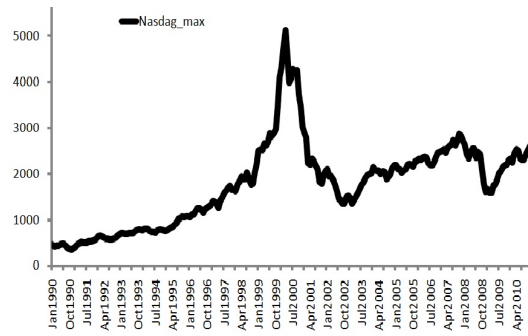


FIGURE 4.5 – l'évolution de l'indice Nasdag de janvier 1999 à Décembre 2010

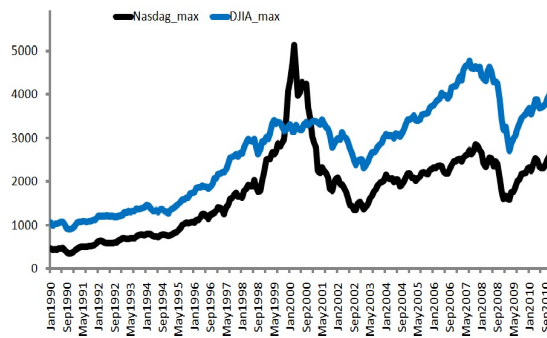


FIGURE 4.6 – l'évolution des indices DJIA et le Nasdag sur la période de janvier 1999 à Décembre 2010

4.3.2 Modélisation univariée des variables macroéconomique et indices boursiers

Inflation

Dans notre cas, l'inflation présente une tendance et un caractère de non-stationnarité (Figure(4.7)). Soit y_t la série de l'inflation, les observations du processus y_t avec $t = 1, \dots, n$ consécutives sont dépendantes. Nous suggérons donc de normaliser et d'appliquer une méthode de lissage sur les données. Soit la série normalisée $Y_t = \frac{y_t - \mu}{\sigma}$ de moyenne μ et d'écart-type σ .

Nous appliquons ensuite le lissage simple à notre série normalisée Y_t . Soit W_t la série

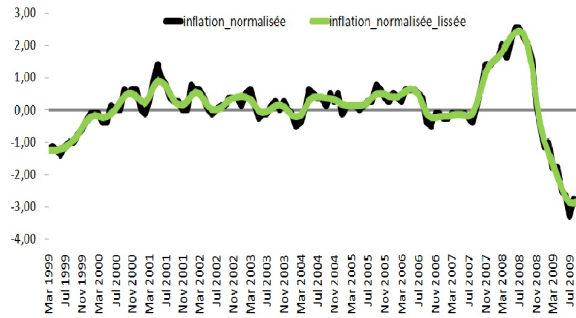


FIGURE 4.7 – Le graphique de l'inflation et inflation normalisée lissée

normalisée et lissée, le processus W_t étant stationnaire, la série peut être modélisée par un processus ARMA(p, q). La fonction d'autocorrélation partielle (PACF) présente trois pics significatifs (Figure(5.1)). Ainsi, nous pouvons dire que la série transformée est modélisée par un AR(3). En utilisant les données transformées de l'inflation de la zone euro, nous trouvons les estimations données dans le Tableau(4.1) :

Paramètres	Estimation des paramètres	Signification
ϕ_1	2,45	0,00000
ϕ_2	-2,12	0,00000
ϕ_3	0,65	0,00000

TABLE 4.1 – Tableau des résultats de l'estimation des paramètres du modèle AR(3)

Le modèle autorégressive AR(3) de l'inflation est donné par l'équation suivante :

$$W_t = 2,45 * W_{t-1} - 2,12 * W_{t-2} + 0,65 * W_{t-3} + \epsilon_{t_{inf}} \quad (4.17)$$

Où $\epsilon_{t_{inf}}$, avec $t_{inf} = 1, \dots, n$, une suite de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. $\epsilon_{t_{inf}}$ est appelé "Bruit Blanc".

L'analyse des résultats (Figure(5.2)) confirme que le modèle proposé décrit correctement les données, car les résidus du modèle ajustés ne sont pas corrélés. Nous notons que les modèles AR sont généralement utilisés pour décrire l'évolution de l'inflation (Waszink (2006,[215])).

La loi de probabilité de la variable aléatoire $\epsilon_{t_{inf}}$ est modélisée par une approche non paramétrique.

$$v_t = \frac{1}{n+1}rang(\epsilon_{t_{inf}}) \quad (4.18)$$

Où v_t est la probabilité empirique du vecteur aléatoire $\epsilon_{t_{inf}}$ et $Rang(\epsilon_{t_{inf}})$ est la statistique de Rang de $\epsilon_{t_{inf}}$, avec $t_{inf} = 1, \dots, n$.

Taux de Change Euro/Dollar

Les données du taux de change de la zone de l'étude présente également une tendance et un caractère de non stationnarité.

Soit $TCH_t = \frac{X_t - \mu}{\sigma}$, μ est la moyenne et σ l'écart-type des données. La série normalisée est stationnaire. La fonction d'autocorrelation partielle (PACF) (Figure (5.3)) présente deux pics significatifs. Pour le taux de change, c'est le modèle AR(2) qui permet de bien ajuster les données. Le Tableau (4.2) suivant présente les paramètres estimés du modèle :

Paramètres	Estimation des paramètres	Signification
ϕ_1	1,29	0,00000
ϕ_2	-0,31	0,00000

TABLE 4.2 – Tableau des résultats de l'estimation des paramètres du modèle AR(2)

Le modèle est donné par la relation suivante :

$$TCH_t = 1,29 * TCH_{t-1} - 0,31 * TCH_{t-2} + \epsilon_{t_{TCH}}$$

Où $\epsilon_{t_{TCH}}$, avec $t_{TCH} = 1, \dots, n$ est une suite de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. $\epsilon_{t_{TCH}}$ est un Bruit Blanc.

L'analyse des résultats (Figure(5.4)) confirme que le modèle proposé décrit correctement les données, car les résidus du modèle ajusté ne sont pas corrélés.

La loi de probabilité du vecteur aléatoire $\epsilon_{t_{TCH}} = \{\epsilon_{1_{TCH}}, \dots, \epsilon_{n_{TCH}}\}$ est donnée par :

$$u_t = \frac{1}{n+1}rang(\epsilon_{t_{TCH}}) \quad (4.19)$$

Où u_t est la probabilité empirique du vecteur aléatoire $\epsilon_{t_{TCH}}$ et $Rang(\epsilon_{t_{TCH}})$ est la statistique de Rang de $\epsilon_{t_{TCH}}$.

Les indices DJIA and NASDAQ

Les cours des indices boursiers DJIA et Nasdaq sont calculés sur différentes bases. En plus, les observations du maximum mensuel de chacun des indices ne sont pas indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). Ainsi, nous traitons les rendements normalisés au lieu des données brutes. Nous allons ainsi transformer les cours boursiers du DJIA et Nasdaq en rendements normalisés. Nous utilisons la formule suivante pour calculer le rendement d'un indice :

$$r_t = \frac{C_t - C_{t-1}}{C_{t-1}} \quad (4.20)$$

Où r_t est le rendement de l'indice, C_t et C_{t-1} sont les valeurs de l'indice à l'instant t et $t - 1$.

Ainsi, le rendement normalisé d'un indice est donné par :

$$r_{t_{normalisé}} = \frac{r_t - \mu}{\sigma} \quad (4.21)$$

Où μ et σ sont la moyenne et l'écart-type des rendements.

En utilisant les tests non paramétriques de Kolmogorov-Smirnov, on note que les rendements normalisés des indices DJIA et Nasdaq sont ajustés par les lois marginales normales de p-value 0,064 et 0,228 (respectivement).

Soient $X_{t_{Nasdaq}}$ et $Y_{t_{DJIA}}$ pour $t = 1, \dots, n$ les rendements normalisés des indices Nasdaq et DJIA.

$X_{t_{Nasdaq}} \sim N(0,0058683055; 0,0318915602)$ et $Y_{t_{DJIA}} \sim N(0,008590763; 0,0533745768)$

Nous utilisons par la suite les méthodes non paramétriques pour étudier la structure de dépendance entre les séries étudiées.

4.3.3 Modélisation de la dépendance

Étude de la dépendance

Les modèles univariés donnés plus haut fournissent des descriptions adéquates de l'inflation, du taux de Change et des indices boursiers DJIA et Nasdaq. Empiriquement, les différentes variables présentent une certaine dépendance. Si cette dépendance se confirme analytiquement, elle peut améliorer les prévisions.

Nous représentons les copules empiriques des différents couples de variables (Taux de Change, Inflation) et (Nasdaq, DJIA). La copule empirique C_n est une estimation cohérente de la copule sous-jacente C . Plusieurs définitions de la copule de Deheuvels existent, la version la plus courante attribue un poids de $\frac{1}{n}$ pour chaque paire (U_t, V_t) ,

où

$$U_t = \frac{1}{n+1}rang(X_t)$$

Avec $Rang(X_t)$ est la statistique de Rang de X_t , $t = 1, \dots, n$.

$$V_t = \frac{1}{n+1}rang(Y_t)$$

Avec $Rang(Y_t)$ est la statistique de Rang de Y_t , $t = 1, \dots, n$.

Nous utilisons la copule empirique (u_t, v_t) du couple (Taux de Change, Inflation), où

$$u_t = \frac{1}{n+1}rang(\epsilon_{t_{TC}})$$

et

$$v_t = \frac{1}{n+1}rang(\epsilon_{t_{inf}})$$

La figure (4.8) suivante représente le graphique du couple (u_t, v_t) de la paire (Taux de Change, Inflation).

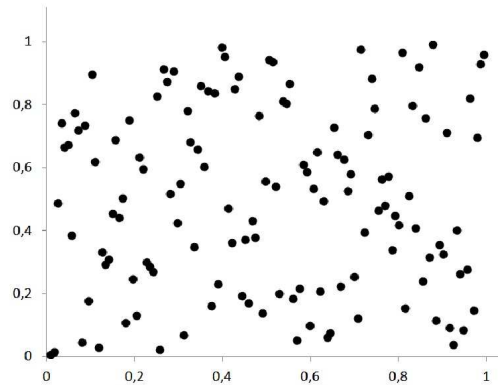


FIGURE 4.8 – Le graphique de la copule empirique du couple (Taux de Change, Inflation)

Pour le couple (Nasdaq, DJIA), la copule empirique est donnée par $(u_{t_{Nasdaq}}, v_{t_{DJIA}})$, où

$$u_{t_{Nasdaq}} = \frac{1}{n+1}rang(X_{t_{Nasdaq}})$$

et

$$v_{t_{DJIA}} = \frac{1}{n+1}rang(Y_{t_{DJIA}})$$

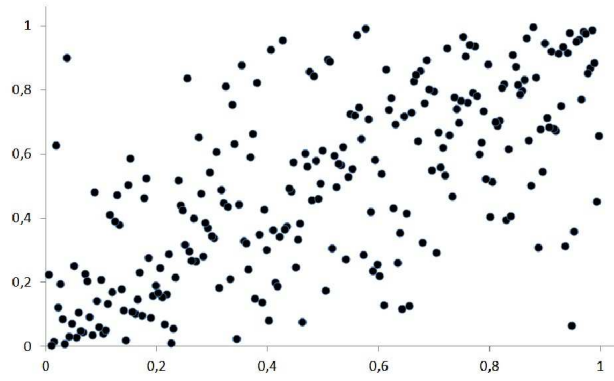


FIGURE 4.9 – Le graphique de la copule empirique du couple (Nasdag, DJIA)

La figure (4.9) représente le graphique de la copule empirique du couple $(u_{t_{Nasdag}}, v_{t_{DJIA}})$ de la paire (Nasdag, DJIA).

La figure(4.8) montre le graphique des paires (u_t, v_t) pour, $t = 1, \dots, n$, avec $n = 128$ observations. On remarque que le graphique n'a pas de tendance particulière. Les points sont repartis sur tout le graphe. On peut penser que cette dépendance est faible.

Contrairement aux variables macroéconomiques (Taux de Change, Inflation), le graphique du couple (Nasdag,DJIA) (Figure (4.9)) montre clairement une tendance croissante . Quelque soit les lois de probabilité, les variables aléatoires $X_{t_{Nasdag}}$ et $Y_{t_{DJIA}}$ évoluent positivement ensemble. En d'autres termes, les marges F et G de $X_{t_{Nasdag}}$ et $Y_{t_{DJIA}}$ ne peuvent pas être modélisées par une copule indépendante $C(u, v) = uv$. Pour vérifier ces différents jugements, on va mesurer la corrélation des vecteurs aléatoires (u_t, v_t) et $(u_{t_{Nasdag}}, v_{t_{DJIA}})$.

En utilisant Rho de Spearman, on trouve une valeur de corrélation de l'ordre de $\rho_n = 0,021$ pour le couple (u_t, v_t) qui est différent de zero. Pour le couple $(u_{t_{Nasdag}}, v_{t_{DJIA}})$, on a $\rho_n = 0,67$ qui est significativement différent de zero. Le test de Spearman est basé sur la statistique $(n-1)^{\frac{1}{2}}\rho_n$ qui suit une loi normale standard pour n assez grand sous l'hypothèse nulle d'indépendance (Capéraà et Genest, (1993, [25])). Le Tau de kendall, donne pour le couple (u_t, v_t) , $\tau_n = 0.010 < \rho_n = 0,02$ et pour le couple $(u_{t_{Nasdag}}, v_{t_{DJIA}})$, on a $\tau_n = 0,49 < \rho_n = 0,67$ qui sont significativement différents de zero. Le test est

basé sur la statistique $(\frac{9}{2}n^{\frac{n-1}{2n+5}})^{\frac{1}{2}}\tau_n$ qui suit une loi normale standard pour n assez grand sous l'hypothèse nulle d'indépendance.

Méthode d'identification des Copules

Dans de nombreux travaux, l'inférence statistique des copules passe d'abord par une analyse graphique des points (U_n, V_n) de la copule empirique où U_n et V_n sont les marges empiriques univariées. Cette approche graphique permet d'identifier les familles des copules paramétriques ayant la même structure de dépendance que la copule empirique. Les copules identifiées sont sélectionnées pour faire l'inférence statistique (Estimation des paramètres, Tests d'ajustement).

Dans cette section, nous utilisons une approche non paramétrique d'identification des copules paramétriques. Notre approche utilise une technique basée sur la Moyenne Quadratiques des Erreurs (SME) entre la copule empirique de Deheuvels et la copule paramétrique en fixant les marges empiriques issues des données. Pour implémenter notre approche, nous utilisons les différentes étapes suivantes :

1. Construire les marges empiriques univariées .
 - Soit $u_n(i) = \frac{Rang(X_i)}{n+1}$, $Rang(X_i)$ est la statistique de Rang de X_i , $i = 1, \dots, n$
 - Soit $v_n(i) = \frac{Rang(Y_i)}{n+1}$, $Rang(Y_i)$ est la statistique de Rang de Y_i , $i = 1, \dots, n$

2. Construire la Copule Empirique.

Soit la copule empirique C_n définit par :

$$\begin{aligned} C_n : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ (u, v) &\longrightarrow C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(u_n(i) \leq u, v_n(i) \leq v)} \end{aligned}$$

Où $u_n(i)$ et $v_n(i)$ sont les marges empirique définies dans 1)

3. Construire la copule paramétrique.

Soit la copule paramétrique C_θ définie par :

$$\begin{aligned} C_\theta : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ (u_n(i), v_n(i)) &\longrightarrow C_\theta(u_n(i), v_n(i)) \end{aligned}$$

Où θ est le paramètre de la copule et $u_n(i)$ et $v_n(i)$ sont les marges empirique définies dans 1) avec, $i = 1, \dots, n$.

4. Calculer la Moyenne Quadratique des Erreurs (SME)

Soit $\theta_j \in \Theta$ où Θ est l'intervalle du paramètre de la copule paramétrique C_θ . On

pose $\theta_j = \theta_0 + j * \Delta$ avec $1 \leq j \leq m$. On calcule ensuite la Moyenne Quadratique des Erreurs comme suit :

$$SME_n(C_{\theta_j}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (C_n(u_n(i), v_n(i)) - C_{\theta_j}(u_n(i), v_n(i)))^2$$

Pour un θ_j fixé, si $SME_n(C_{\theta_j}) \rightarrow 0$ alors la copule C_{θ_j} est sélectionnée.

Cette méthode permet de faire un choix restreint des familles de copules à utiliser pour faire l'inférence statistique. Elle nous donne aussi une estimation du paramètre de la copule. Cette estimation peut être utilisée comme valeur d'initialisation pour l'estimation des paramètres des copules.

Notre méthode sera appliquée aux différentes copules présentées dans le tableau(4.3).

Ces copules sont les plus utilisées en finance et en économie.

On a $\tilde{u} = -\ln u$, $\tilde{v} = -\ln v$, $\vartheta(u, v; \theta) = \Phi(\frac{1}{\theta} + 0.5\theta \ln(\frac{\ln u}{\ln v}))$ et $\xi(w, \theta) = \vartheta(w, 1w; \theta)$.

Copules	θ	C(u,v)
$C^\perp$		uv
Gumbel	$[1, \infty)$	$\exp(-(\tilde{u}^\theta + \tilde{v}^\theta)^{\frac{1}{\theta}})$
Clayton	$\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$	$\max([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-\frac{1}{\theta}}, 0)$
Frank	$\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{\theta} \ln(1 + \frac{(\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)}{\exp(-\theta) - 1})$
Gaussienne	$[-1, 1]$	$\Phi_\Sigma(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$
Student	$[-1, 1]$	$t_{\Sigma, \nu}(t_\nu^{-1}(u), t_\nu^{-1}(v))$
Plackett	$(\theta > 0, \theta \neq 1)$	$\frac{(1+(\theta-1)(u+v)) - \sqrt{(1+(\theta-1)(u+v))^2 - 4uv\theta(\theta-1)}}{2(\theta-1)}$
Galambos	$[0, \infty)$	$uv \exp((\tilde{u}^{-\theta} + \tilde{v}^{-\theta})^{\frac{1}{\theta}})$
<i>Hüsler – Reiss</i>	$[0, \infty)$	$\exp(-\tilde{u}\vartheta(u, v; \theta) - \tilde{v}\vartheta(u, v; \theta))$

TABLE 4.3 – Les copules les plus utilisées en Finance

Nous appliquons notre approche en parcourant tout l'intervalle du paramètre de chaque copule avec le pas $\Delta = 0.02$ pour les couples (Taux de Change, Inflation) et (Nasdaq, DJIA). Nous résumons les résultats dans les tableaux(4.4), (4.5)).

copules	θ	SME
Ind		0,000184855
Gumbel	1,02	0,000174851
Clayton	0,06	0,00016844
Frank	0,17	0,000176671
Normale	0,04	0,000173639
Student	0,04	0,000181598
Plackett	1,09	0,000176673
Galambos	0,2	0,000173572
Hürler-Reiss	0,34	0,000184114

TABLE 4.4 – Les résultats de la Moyenne Quadratique des Erreurs pour le couple (Taux de Change, Inflation)

Les valeurs de la Moyenne Quadratique des Erreurs (Tableau(4.4)) sont proches pour les différentes familles de copules. Ce résultat illustre bien la dépendance faible entre les résidus ϵ_{TCH} et ϵ_{inf} du couple (Taux Change, Inflation) car ces différentes familles de copules ont un comportement similaire pour les petites valeurs du paramètre θ . Ces copules captent bien la dépendance faible pour les petites valeurs du paramètre θ ($\theta \rightarrow 0$ ou $\theta \rightarrow 1$). Dans la suite, nous utiliserons 6 modèles de copules : Clayton, Galambos, Normale, Gumbel, Frank et Plackett pour faire l'inférence statistique de la paire (Taux de Change, Inflation).

Nous présentons les résultats pour la paire (Nasdag, DJIA) de la méthode dans le Tableau (4.5) suivant.

copules	θ	SME
Ind		0,006380719
Gumbel	2,08	0,000180675
Clayton	2,12	0,000175764
Frank	5,7	0,0000759739
Normale	0,72	0,00006463813
Student	0,72	0,00006726575
Plackett	11,4	0,0000600368
Galambos	1,38	0,000183669
Hürler-Reiss	0,72	0,00444

TABLE 4.5 – Les résultats de la Moyenne Quadratique des Erreurs pour le couple (Nasdag, DJIA)

Les résultats du Tableau 4.5 montrent que les copules Plackett, Normale, Student et Frank ont les plus petites valeurs de SME. Ces copules seront utilisées pour faire l'inférence statistique pour le couple (Nasdag, DJIA). Nous représentons les différents graphiques de la Moyenne des Erreurs Quadratiques en fonction du paramètre de θ pour le couple (Nasdag, DJIA). Les Figures (5) sont représentées sur une partie de l'intervalle du paramètre θ .

Estimation des Paramètres et selection de la copule adéquate

Pour faire le choix de la copule C , nous avons considéré plusieurs familles des copules couramment utilisées en finance. En utilisant les méthodes de présélection des copules décrite précédemment, notre choix s'est porté sur six familles des copules pour le couple (Taux de change, Inflation) et quatre familles pour le couple (Nasdag, DJIA). Pour chaque famille de copules, nous utilisons la méthode d'inversion du Tau de Kendall (Grégoire et al. (2008, [111])) pour l'estimation des paramètres. Plus précisément, la valeur théorique $\tau(\theta)$ est calculée en exploitant la relation existante entre le tau de kendall et le paramètre des copules. Pour chaque copule sélectionnée par la méthode d'identification, nous résolvons l'équation $\tau(\theta) = \tau_n$ pour obtenir θ_n . Les tableaux (4.6) et (4.7) énumèrent les expressions de θ en fonction de τ pour les différentes familles des copules choisies pour les deux couples (Taux de Change, Inflation) et (Nasdag, DJIA), ainsi que les estimations obtenues en résolvant l'équation $\tau(\theta) = \tau_n$.

Genest et al (2008, [101]) ont fait une étude comparative sur plusieurs tests d'ajustement pour retenir la meilleure copule. Ces auteurs ont montré que le test basé sur la

Familles	Formules	θ_n
Clayton	$\theta = \frac{2\tau}{1-\tau}$ pour $\tau > 0$	0,02
Gumbel	$\theta = 1 - \frac{1}{\tau}$	1,01
Frank	obtenu numériquement	0,09
Normale	$\theta = \sin(\frac{\pi\tau}{2})$	0,015
Plackett	obtenu numériquement	1,04
Galambos	obtenu numériquement	0,16

TABLE 4.6 – Tableau de l'estimation des paramètres des copules du couple (Taux de Change, Inflation)

Familles	Formules	θ_n
Frank	Obtenu numériquement	5,53
Plackett	obtenu numériquement	10,67
Normale	$\theta = \sin(\frac{\pi\tau}{2})$	0,69
Student	$\theta = \sin(\frac{\pi\tau}{2})$	0,69

TABLE 4.7 – Tableau de l'estimation des paramètres des copules du couple (Nasdag, DJIA)

statistique de Cramer-von Mises est le meilleur test. En adoptant la même approche de Genest et al (2008, [101]), on a les différentes copules avec leurs p-values. Le tableaux suivants nous donnent les p-values des différents modèles.

Familles	P-values
Clayton	0,3601
Gumbel	0,3402
Frank	0,2652
Normale	0,3332
Plackett	0,2522
Galambos	0,03746

TABLE 4.8 – Tableau de P-value couple (Taux de change, Inflation) pour les différentes familles de copules

Le tableau (4.8) présente les P-values que nous avons obtenues. En particulier, nous constatons les meilleures p-value sont : les $P \approx 0,36$ pour la copule Clayton de para-

mètre $\theta = 0,02$, $P \approx 0,34$ pour la copule Gumbel de paramètre $\theta = 1,01$ et $P \approx 0,33$ pour la copule normale de paramètre $\rho = 0,015$.

En utilisant l'outil graphique d'ajustement le qqplot (Figure (5.12)), une description adéquate de la dépendance du vecteur aléatoire (u_t, v_t) du couple (Taux de change, Inflation) est proposée par les différents modèles suivants : Les équations suivantes, représentent les modèles de copules retenues :

$$C_{0,02}(u_t, v_t) = (u_t^{-0,02} + v_t^{-0,02} - 1)^{-\frac{1}{0,02}}, \quad (4.22)$$

$$C_{1,01}(u_t, v_t) = \exp(-((- \log u_t)^\theta + (- \log v_t)^\theta)^{\frac{1}{\theta}}) \quad (4.23)$$

$$\Phi_{0,015} = (\phi^{-1}(u_t), \phi^{-1}(v_t)) \quad (4.24)$$

Les modèles (4.22),(4.23) et (4.24) donnent une meilleure description des données du couple (Taux de Change, Inflation) car les copules Clayton ($\theta \rightarrow 0$), Gumbel ($\theta \rightarrow 1$) et Normale ($\rho \rightarrow 0$) décrivent la dépendance faible entre variable aléatoire. La dépendance faible est bien modélisée par ces familles de copules pour les petites valeurs du paramètre θ . Ces copules ont été beaucoup utilisées en finance pour modéliser la dépendance Waszink (2006, [215]).

Le tableau 4.9 suivant nous donne les p-values des différents modèles du couple $(X_{t_{Nasdaq}}, Y_{t_{DJIA}})$:

Familles	P-value
Frank	0,3252
Placket	0,5619
Normale	0.30
Student	0,2463

TABLE 4.9 – Tableau de P-value du couple (Nasdag, DJIA) pour les différentes familles de copules

Le Tableau(4.9) nous présente les p-values obtenues des différentes familles de copules. Nous remarquons que les $P \approx 0,51$ pour la copule de Plackett de paramètre $\theta = 10,67$, $P \approx 0,33$ pour la copule de Frank de paramètre $\theta = 5,53$, $P \approx 0,30$ pour la copule Normale de paramètre $\theta = 0,69$ et $P \approx 0,28$ pour la copule de Student de paramètre $\theta = 0,69$. On peut également noter la copule de Plackett donne la plus grande P-value, suivie de la copule de Frank. Les copules de Normales et Student qui sont caractérisées par une dépendance linéaire, ont été acceptées avec des p-value inférieures à celle de Plackett et Frank.

Les marges F et G sont des lois normales, ceci confirme bien le fait que la copule normale soit acceptée par nos données. En appliquant l'outil graphique d'ajustement le qqplot (Figure(5.13)). On peut résumer la description de la dépendance du couple (Nasdag, DJIA) par les modèles suivants : Les équations suivantes, représentent les modèles de copules retenues :

$$\begin{aligned} C_{10,67}(u_t, v_t) &= \frac{(1 + (9, 67)(u_t + v_t)) - \sqrt{(1 + (9, 67)(u_t + v_t))^2 - 412,72 * u_t v_t}}{19,34} \\ C_{5,53}(u_t, v_t) &= -\frac{1}{5,53} \ln \left\{ 1 + \frac{(\exp(-5,53 * u_t) - 1)(\exp(-5,53 * v_t) - 1)}{\exp(-5,53) - 1} \right\} \\ C_{0,69}(u_t, v_t) &= \Phi_{0,69}(\phi^{-1}(u_t), \phi^{-1}(v_t)) \end{aligned}$$

Les trois modèles représentent respectivement la copule de Plackett, Frank et Normale. Ces résultats sont cohérents avec les récentes études qui utilisent ces différentes copules pour modéliser la dépendance entre variables aléatoires (Waszink (2006, [215]), Breymann et al (2003, [22])). Ces copules présentent des caractéristiques différentes en termes de dépendance. Les copules de Plackett, Frank et Normale ont une dépendance au niveau de la fonction de répartition. Une autre caractéristique importante des copules de Frank est la dépendance non-linéaire entre $X_{t_{Nasdag}}$ et $Y_{t_{DJIA}}$. La copule Normale modélise la dépendance linéaire entre les variables. La copule de Plackett capte une forme générale de la dépendance, mais elle est plus appropriée pour la dépendance linéaire. Cela traduit bien la relation entre les deux indices étudiés car ils évoluent ensemble dans le temps. Rockinger et Jondeau (2003, [22]) ont utilisé la copule Plackett et une mesure de dépendance pour vérifier si la dépendance linéaire varie avec le temps. Un inconvénient de la copule Plackett, c'est qu'elle ne peut pas être facilement étendue pour les dimensions plus grandes que deux.

Dans la suite, nous utiliserons les différentes familles de copules ajustées aux données des couples (Inflation, Taux de change) et (Nasdag, DJIA) pour faire la prévision. Nous comparons ensuite les résultats des prévisions des copules avec les prévisions issues des modèles AR.

4.3.4 Prévision

Les décideurs s'intéressent toujours à anticiper l'évolution des différents agrégats financiers et macroéconomiques. Cette préoccupation nous a conduit à compléter notre analyse en cherchant la meilleure copule qui permet à la fois, une bonne description des données et une meilleure prévision. Ainsi, les copules retenues lors de la première

phase d'analyse vont être comparées selon leurs performances en terme de prévision. Les valeurs prédites issues des copules retenues, seront comparées à la fois, aux données réelles retenues et valeurs issues des modèles autorégressifs.

Prévision des variables macroéconomiques

Nous utilisons les quantiles issus des copules (équation(4.8)) ajustées pour avoir la prévision de l'inflation transformée(inflation normalisée et lissée). La $p^{ième}$ C-quantile de y_t conditionnellement à x_t pour le couple (u_t, v_t) du vecteur aléatoire $(\epsilon_{t_{TCH}}, \epsilon_{t_{inf}})$ est donnée par :

$$\hat{y} = G_Y^{[-1]}(\hat{C}_{2|1}^{-1}(F_X(x), p; \hat{\theta})) \quad (4.25)$$

Où $\hat{C}_{2|1}^{-1}$ est l'inverse partiel de $\hat{C}_{2|1}$ (la définition(4.2.2)) par rapport au second argument et $G_Y^{[-1]}$ est l'inverse généralisé de G_Y . G_Y est la loi de probabilité empirique notée v_t de la variable aléatoire $\epsilon_{t_{inf}}$. Nous résumons les étapes de la prévision en ce qui suit :

1. Identifier la copule $C_{\hat{\theta}}$ mieux ajustée au couple (u_t, v_t) du vecteur aléatoire $(\epsilon_{t_{TCH}}, \epsilon_{t_{inf}})$ avec $t = 1, \dots, n$.
2. Simuler ν échantillons indépendants de taille K , associés à $u(t)$, en se basant sur la copule ajustée $C_{\hat{\theta}}$. Calculer u_t^{sim} pour $t = 1, \dots, n, n+1, \dots, K$, donné par :

$$u_t^{sim} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} u_i(t)$$

3. Remplacer dans la relation (4.25) $F_X(x)$ par u_t^{sim} et obtenir :

$$\hat{\epsilon}_{t_{inf}} = G_{\epsilon_{t_{inf}}}^{[-1]}(\hat{C}_{2|1}^{-1}(u_t^{sim}, p; \hat{\theta}))$$

avec $p = 0,5$

4. Pour $t = n+1, \dots, K$, calculer les valeurs du processus stationnaire W_t en remplaçant dans la relation (4.17) la variable aléatoire $\epsilon_{t_{inf}}$ par $\hat{\epsilon}_{t_{inf}}$. Ainsi :

$$\widehat{W}_t = 2,45 * W_{t-1} - 2,12 * W_{t-2} + 0,65 * W_{t-3} + \hat{\epsilon}_{t_{inf}}$$

Pour notre cas, nous avons calculé les prévisions pour 6 mois, c'est à dire $K = n+6$. Les copules sont Clayton, Normale et Gumbel. Les résultats sont résumés dans le tableau (4.12) suivant :

Les prévisions de la variable inflation transformée sont représentées sur la figure (4.10)).

Valeur observée	AR3	Clayton	Normale	Gumbel
-1,99	-2,04591	-2,05508	-2,04301	-2,05093
-1,58	-1,56701	-1,584326	-1,5525645	-1,5770485
-1,33	-1,1344	-1,2141291	-1,134001825	-1,142987225
-1,05	-0,79744	-0,986707175	-0,842204231	-0,794040381
-0,71	-0,57551	-0,700920787	-0,677113423	-0,552787542
-0,49	-0,46278	-0,426900632	-0,606826101	-0,417865566

TABLE 4.10 – Tableau des prévisions des copules ajustées et du modèle Autorégressif AR

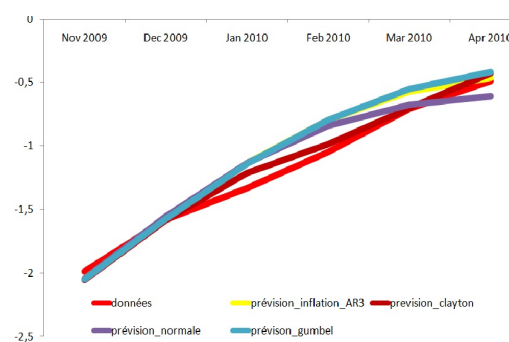


FIGURE 4.10 – Graphique des prévisions issues des modèles ajustés

La figure(4.10) montre que les prévisions issues des deux techniques (copules et modèles des séries chronologiques) sont très proches des valeurs observées. Ce résultat est dû au fait que les copules ont été ajustées avec les résidus issus des modèles autorégressifs AR. Par construction, les résidus sont des valeurs très petites ; par conséquent, la prévision des valeurs issues des copules sont très proches de celles des modèles autorégressifs AR. L'erreur moyenne quadratique permet de confirmer que la copule de Clayton donne, sensiblement, de bons résultats par rapport aux modèles autorégressifs AR et aux copules de Gumbel et la Normale.

Modèles	AR	Clayton	Normale	Gumbel
MSE (%)	0,020694845	0,004291688	0,016647833	0,022354902

TABLE 4.11 – Tableau de l'Erreur Moyenne Quadratique de la prévision de l'Inflation lissée des copules et du modèle Autorégressifs AR

Ainsi, la copule de Clayton permet de mieux décrire la structure de la dépendance entre le taux de change et l'inflation pendant la période d'étude.

Prévision de l'indice DJIA

Pour avoir la prévision de l'indice DJIA, nous appliquons le même algorithme précédemment décrit, avec les copules retenues de Plackett, Frank et la Normale ajustées. Le quantile pour ces données qui ne sont pas autocorrélées, est obtenu par la relation suivante :

$$\hat{Y}_{t_{DJIA}} = G_{Y_{t_{DJIA}}}^{[-1]}(\hat{C}_{2|1}^{-1}(u_{t_{Nasdaq}}^{sim}, p; \hat{\theta}))$$

Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Valeur observée	Plackett	Frank	Normal	Modèle AR2
-0,048597326	-0,045360757	-0,042001443	-0,047500571	-0,014446446
0,004232477	-0,010202909	-0,011125032	0,026642929	-0,001861105
0,00682383	0,002136674	0,001735752	0,018233663	-0,00186354
0,018084268	0,033540462	0,034475126	0,007616208	-0,001859242
0,031724973	0,040972394	0,041586174	0,029920806	-0,001853356
0,020069296	0,02614944	0,027049213	0,021049957	-0,001846909
0,014702057	0,027584671	0,028513511	0,006941282	-0,001840421

TABLE 4.12 – Tableau des prévisions des copules ajustées et du modèle Autorégressif AR

On représente sur la figure(4.11) suivante, les prévisions sur sept mois de l'indice DJIA pour les différentes copules ajustées :

Les prévisions trimestrielles de l'indice boursier DJIA des différentes copules ajustées sont clairement meilleures que celles obtenues par les modèles des séries chronologiques. Ces résultats montrent les performances des copules par rapport aux modèles AR. Ceci est confirmé par l'erreur moyenne quadratique (Tableau (4.13)).

Modèles	Plackett	Frank	Normal	Modèle AR2
MSE (%)	0,000109738	0,000130089	0,000115377	0,000508301

TABLE 4.13 – Tableau de l'Erreur Moyenne Quadratique de la prévision issue des copules et du modèle AR

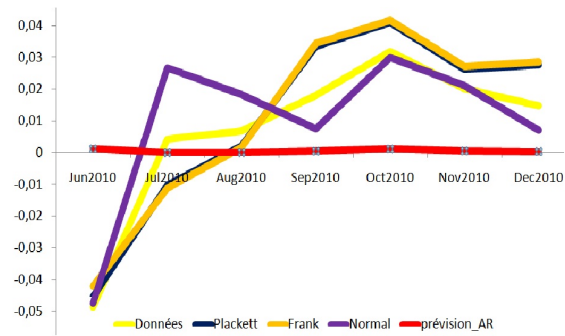


FIGURE 4.11 – Comparaison des différentes techniques de prévision de l'indice DJIA

A partir du Tableau (4.13), on constate que la copule Plackett donne une meilleure qualité de prévision car elle a la plus petite moyenne quadratique des erreurs. Nous pouvons affirmer que la copule Plackett décrit mieux l'évolution de la dépendance entre les indices boursiers DJIA et Nasdag pour la période d'étude. La copule Plackett capte une forme générale de la dépendance. Ainsi la dépendance manifestée n'est pas locale (au niveau des queues) mais, elle est globale.

4.4 Conclusion

Les cas d'études présentés lors de ce chapitre, ont montré les performances des copules par rapport aux modèles des séries chronologiques. Les performances se manifestent en terme de la bonne description des données et des prévisions.

Chapitre 5

Conclusion Générale et Perspectives

Notre thèse présente une contribution à la modélisation en utilisant la théorie des copules.

La première partie de cette thèse a traité la modélisation des risques financiers dans le cas unidimensionnel en utilisant la théorie des valeurs extrêmes.

La deuxième partie, quant à elle, est consacrée aux problématiques liées à la structure de dépendance entre les risques dans le cas bidimensionnel, en utilisant les copules.

Dans la première partie, nous avons mis l'accent sur la problématique la sélection du seuil dans l'approche POT, en développant des algorithmes numériques.

Dans la deuxième partie, nous avons abordé la problématique de la modélisation du risque financier dans un cadre bivarié. Nous avons traité deux cas différents : séries autocorrélées et non autocorrélées. Nous avons utilisé les copules conditionnelles pour estimer les quantiles conditionnels et avoir des prévisions à court terme, pour des séries financières et macroéconomiques. Les résultats obtenus dans cette partie ont montré que les prévisions issues des copules sont meilleures par rapport aux modèles autorégressifs AR.

Les copules ont été introduites en finance appliquée, pour permettre l'utilisation d'une gamme plus étendue de lois décrivant l'évolution jointes des données observées. Les copules représentent un outil flexible qui permet de modéliser plusieurs structures de dépendance (dépendance extrême, asymétrie, etc.)

Malgré ses performances, la théorie des copules n'est pas pleinement utilisée. Ainsi, nous souhaitons dans l'avenir explorer d'autres problématiques liées à la théorie des copules. L'objectif serait de calculer une VaR, en combinant les copules et l'approche POT. Nous projetons combiner les modèles de régression non linéaire et la théorie des copules pour prévoir des agrégats macro-économiques.

Bibliographie

- [1] Alsina, C., Frank, M. J. and Schweizer, B. *Associative Functions on Intervals : A Primer of Triangular Norms* . World Scientific, Hackensack, in press, 2005.
- [2] Armstrong, W. H., Collins, M. J., and Snyder, N. P. *Trends in flood discharge and peaks over threshold per water year on climate sensitive rivers in the northeastern United States*. American Geophysical Union, San Francisco, CA., 2011.
- [3] Ane, T. et Kharoubi, C. *Dependence Structure and Risk Measure*. Journal of Business, 2003, 76(3), 411-438.
- [4] Atyeo, J. and Walshaw, D. *A hierarchical model for extreme rainfall incorporating regional variation, temporal trend and local dependence*. Applied Statistics, 2011.
- [5] Backus, D. K. and Zin, S. E. *Long Memory Inflation Uncertainty : Evidence from the Term Structure of Interest Rates Money*. Credit and Banking, 1993, 25, 681-708.
- [6] Baillie, R. T., Bollerslev, T. and Mikkelsen, H. O. *Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*. Journal of Econometrics, 1996, 74, 3-30.
- [7] Balkema, A. and de Haan, L. *Residual life time at a great age*. Annals of Probability, 1974, 2(5), 792-804.
- [8] Barbe, P., Genest, C., Ghouli, K. et Rémillard, B. *On Kendall's process*. J. Multivariate Anal., 1996, 58(2), 197-229.
- [9] Bee, M. *Dynamic value-at-risk models and the peaks-over-threshold method for market risk measurement : an empirical investigation during a financial crisis*. The Journal of Risk Model Validation, 2012, 6(2), 3 ?45.
- [10] Beirlant, J., Dierckx, G., Guillou, A. and Starica, C. *On exponential representations of log-spacings of extreme order statistics*. Extremes, 2002, 5(2), 157-180.
- [11] Beirlant, J., Dierckx, G. and Guillou, A. *Estimation of the extreme value index and regression on generalized quantile plots*. Annals of Statistics, 2005, 11(6), 949-970
- [12] Beirlant, J., Goetgebeur, Y., Segers, J. and Teugels, J. *Statistics of Extremes : Theory and Applications*. Chichester : Wiley, 2004.

- [13] Beirlant, J., Jozef, L. T. and Petra, V. *Practical analysis of extreme values*. Leuven, the Netherlands : Leuven University Press, 1996.
- [14] Beirlant, J., Teugels, J. and Vynckier, P. *Practical Analysis of Extreme Values*. Leuven University Press, 1996.
- [15] Beguera, S. *Uncertainties in partial duration series modelling of extremes related to the choice of the threshold value*. J. Hydrol., 2005, 303(1-4), 215-230.
- [16] Bollerslev, T. *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*. Journal of Econometrics, 1986, 31, 307-327.
- [17] Bollerslev, T. , Mikkelsen, H. O. *Modeling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility*. Journal of Econometrics, 1996, 73, 151-184.
- [18] Booth et Broussard. *Setting NYSE circuit breaker triggers*. Journées de l'AFFI, Grenoble, 1997.
- [19] Bouyé, E., Durrleman, V., Nikeghbali, A., Riboulet, G. et Roncalli, T. *Copulas for Finance : A reading guide and some applications*. GRO, Credit Lyonnais, 2000
- [20] Bouyé, E et Mark, S. *Dynamic copula quantile regression and tail area dynamic dependence in Forex markets*. The European Journal of Finance, 2009, 15(7-8), 721-750.
- [21] Box, G. E. P. and Jenkins, G. *Times series analysis, Forecasting and control*. Holden-Day, San Francisco, 1970, 537.
- [22] Breymann, W., Dias, A. et Embrechts, P. *Dependence structures for multivariate high-frequency data in finance*. Quant. Finance, 2003, 3, 1-14.
- [23] Cambanis, S., Huang, S. and Simons, G. *On the theory of elliptically contoured distributions*. J. Multivariate Anal., 1981, 11(3), 368-385.
- [24] Capéraà, P. and Fougères, A.-L. *Estimation of a bivariate extreme value distribution*. Extremes, 2000, 3(4), 311-329.
- [25] Capéraà, P. and Genest, C. *Spearman's ρ is larger than Kendall's τ for positively dependent random variables*. J. Nonparametr. Statist., 1993, 2(2), 183-194.
- [26] Castillo, E. *Extreme Value Theory in Engineering*. Academic Press, New York, 1988.
- [27] Charpentier, A. et Juri, A. *Limiting dependence structures for tail events, with applications to credit derivatives*. J. Appl. Probab., 2006, 43(2), 563-586.
- [28] Chavez-Demoulin, V., Embrechts, P. and Sardy, S. *Extreme-quantile tracking for financial time series*. J. Econom. In press, 2013b.

- [29] Chen, S. X. and Huang, T.-M. *Nonparametric estimation of copula functions for dependence modelling*. Canad. J. Statist., 2007, 35(2), 265-282.
- [30] Cherubini, U. et Luciano, E. *Value-at-risk Trade-off and Capital Allocation with Copulas*. Economic Notes, 2001, 30(2), 235-256.
- [31] Christidis, N., Stott, P. A. and Brown, S. J. *The role of human activity in the recent warming of extremely warm daytime temperatures*. Journal of Climate, 2011, 24, 1922-1930.
- [32] Choudhri, E. U. and Hakura, D. S. *Exchange Rate Pass-Through to Domestic Prices : Does the Inflationary Environment Matter ?*. Document de travail no 01/194, Fonds monétaire international, 2001.
- [33] Choulakian, V. and Stephens, M. A. *Goodness-of-fit tests for the generalized Pareto distribution*. Technometrics, 2001, 43, 478-484.
- [34] Coles, S. G. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer-Verlag, 2001.
- [35] Coles, S. G. and Tawn, J. A. *Statistical methods for multivariate extremes : an application to structural design (with Discussion)*. Appl. Statist, 1994, 43, 1-48.
- [36] Coles, S. G. and Walshaw, D. *Directional modeling of extreme wind speeds*. Appl. Statist., 1994, 43, 139-157.
- [37] Dahan, E. and Mendelson, H. *An Extreme-Value Model of Concept Testing*. Management Science, 2001.
- [38] Dall'Aglio. G. *Sugli estremi dei momenti delle funzioni de ripartizione doppia*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl Sci., 1956, 10, 35-74.
- [39] Danielsson, J., de Haan, L. and de Vries, C. G. *Using a bootstrap method to choose the sample fraction in tail index estimation*. Journal of Multivariate Analysis, 2001, 76, 226-248.
- [40] Danielsson, J. and de Vries, C. G. *Tail index estimation with very high frequency data*. Journal of Empirical Finance, 1997, 4, 241-257.
- [41] Davis, R. and Resnick, S. *Tail estimates motivated by extreme value theory*. Annals of Statistics, 1984, 12(4), 1467-1487.
- [42] Davison, A. C. *A statistical model for contamination due to long-range atmospheric transport of radionuclides*. Thèse de doctorat, Department of Mathematics, Imperial College of Science and Technology, London, 1984.
- [43] Davison, A. C. and Smith, R. L. *Models for exceedances over high thresholds*. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 1990, 52, 393-442.

- [44] De Haan, L. *On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes*. Mathematical Centre Tracts, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1970, 32.
- [45] De Haan, L. and Ferreira, A. *Extreme value theory*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York. An introduction, 2006.
- [46] De Haan, L. and Peng, L. *Comparison of tail index estimators*. Statistica Neerlandica, 1998, 52(1), 60-70.
- [47] De Haan, L. and Resnick, S. I. *A simple asymptotic estimate for the index of a stable distribution*. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 1980, 42, 83-87.
- [48] De Haan, L. and Rootzén, H. *On the estimation of high quantiles*. J. Statist. Plann. Inference, 1993, 35(1), 1-13.
- [49] Deheuvels, P. *Caractérisation complète des lois extrêmes multivariées et de la convergence des types extrêmes*. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 1978, 23, 1-37.
- [50] Deheuvels, P. *La fonction de dépendance empirique et ses propriétés. Un test non paramétrique d'indépendance*. Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.(5), 1979b, 65(6), 274-292.
- [51] Deheuvels, P. *Multivariate tests of independence*. In Analytical methods in probability theory (Oberwolfach, 1980), Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1981c, 861, 42-50.
- [52] Deidda, R. *A multiple threshold method for fitting the generalized Pareto distribution to rainfall time series*. Hydrol. Earth Syst. Sci. Discuss, 2010, 7, 4957-4994.
- [53] Dekkers, A. L. M. and De Haan, L. *Optimal choice of sample fraction in extreme-value estimation*. J. Multivariate Anal., 1993, 47(2), 173-195.
- [54] Dekkers, A. L. M., Einmahl, J. and De Haan, L. *A moment estimator for the index of an extreme-value loi*. Ann. Statist., 1989, 17, 1833-1855.
- [55] Devereux, M. B. and Yetman, J. *Predetermined Prices and the Persistent Effects of Money on Output*. Journal of Money, Credit and Banking, 2003, 35(5), 729-741.
- [56] Déqué, M. *Frequency of precipitation and temperature extremes over France in an anthropogenic scenario : Model results and statistical correction according to observed values*. Glob. and Plan. Change, 2007, 57, 16-26, doi :10.1016/j.gloplacha.2006.11.030.
- [57] Diebold, F. X., Rudebusch, G. D. *Long Memory and Persistence in Aggregate Output*. Journal of Monetary Economics, 1989, 24, 189-209.
- [58] Diebold, F. X., Rudebusch, G. D. (1991) *Is Consumption too Smooth ? Long Memory and the Deaton Paradox*. Review of Economics and Statistics, LXXIII, 1-9.

- [59] Diebolt, J., Guillou, A. and Rached, I. *Approximation of the distribution of excesses through a generalized probability-weighted moments method*. J. Statist. Plann. Inference, 2007, 137, 841-857.
- [60] Ding, Z. and Granger, C. W. J. *Modeling Volatility Persistence of Speculative Returns : A New Approach*. Journal of Econometrics, 1996, 73, 185-215.
- [61] Dobrić, J. and Schmid, F. *A goodness of fit test for copulas based on Rosenblatt's transformation*. Comput. Statist. Data Anal., 2007, 51(9), 4633-4642.
- [62] Dowd, K. *Copulas in Macroeconomics*. Journal of International and global Economic Studies, 2008, 1(1), 1-26.
- [63] Draisma, G., Drees, H., Ferreira, A. and de Haan, L. *Bivariate tail estimation : dependence in asymptotic independence*. Bernoulli, 2004, 10(2), 251-280.
- [64] Drees, H. and Huang, X. *Best attainable rates of convergence for estimators of the stable tail dependence function*. J. Multivariate Anal., 1998, 64(1), 25-47.
- [65] Dupuis, D. J. *Exceedances over high thresholds : a guide to threshold selection* *Extremes*. 1999, 1 (3), 251-261.
- [66] Einmahl, J. H. J., de Haan, L. and Li, D. *Weighted approximations of tail copula processes with application to testing the bivariate extreme value condition*. Ann. Statist., 2006, 34(4), 1987-2014.
- [67] Einmahl, J. H. J., Krajina, A. et Segers, J. *A method of moments estimator of tail dependence*. Bernoulli, 2008, 14(4), 1003-1026.
- [68] Einmahl, J. H. J. and Smeets S. G. W. R. *Ultimate 100m world records through extreme-value theory*. Statistica Neerlandica, 2011, 65(1), 32-42.
- [69] El-Aroui, M.-A. and Diebolt, J. *On the use of the peaks over thresholds method for estimating out-of-sample quantiles*. Comput. Statist. Data Anal., 2002, 39(4), 453-475.
- [70] El Adlouni, S. and Ouarda, B. M. J., *Frequency Analysis of Extreme Rainfall Events*. Chapitre du livre "Rainfall : State of the Science", American Geophysical Union (AGU). Geophysical Monograph Series., 2010, 191, 287.
- [71] Elena, D. B. *Thèse intitulé : Modélisation de la dépendance et mesures de risque multidimensionnelles*. Université Claude Bernard Lyon I, Laboratoire Science Actuarielle Financière, 2011.
- [72] Embrechts, P., Klppelberg, C. and Mikosch, T. *Modelling Extremal Events for Finance and Insurance* . Berlin : Springer-Verlag, 1997.
- [73] Embrechts, P., McNeil, A., Straumann, D. *Correlation : Pitfalls and alternatives A short Non-technical article* . RISK Magazine, 1999, 12(5), 69-71.

- [74] Embrechts, P., Resnick, S. and Samorodnitsky, G. *Extreme value theory as a risk management tool*. North American Actuarial Journal, 1999, 26, 30-41.
- [75] Engle, R. F. *GARCH 101 : An Introduction to the Use of ARCH/GARCH models in Applied Econometrics*. Journal of Economic Perspectives, 2001, 15(4), 157-168.
- [76] Engel, R. F., et Russell, J. R. *Autoregressive conditional Duration : A new model for irregularly spaced transaction data*. Econometrica, 1998, 66(5), 1127-1162.
- [77] Fadhila, L. *Thèse intitulée : Modélisation de la dépendance par les copules et applications*. Université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, 2011.
- [78] Fang, K.-T., Kotz, S. and Ng, K.-W. *Symmetric Multivariate and Related Distribution*. Chapman et Hall, London, 1990.
- [79] Favre, A.-C., El Adlouni, S., Perreault, L., Thiémondge, N. et Bobée, B. *Multivariate hydrological frequency analysis using copulas*. Water Resources Research., 2004, 40(1), W01101.
- [80] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. Wiley, 1968.
- [81] Fermanian, J. -D. *Goodness-of-fit tests for copulas*. J. of Multivariate Anal., 2005, 95(1), 119-152.
- [82] Fermanian, J.-D., Radulović, D. and Wegkamp, M. *Weak convergence of empirical copula processes*. Bernoulli, 2004, 10, 847-860.
- [83] Fernàndez, V. *Extreme Value Theory and Value at Risk*. Revista de Análisis Económico, 2003a. 18-1, 57-85.
- [84] Fernàndez, V., 2003b. *Extreme Value Theory : Value at Risk and Returns Dependence Around the World*. Documentos de Trabajo 161, Centro de Economía Aplicada, Universidad de Chile.
- [85] Féron, R. *Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données, cas de l'espace à trois dimensions*. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 1956, 5, 3-12.
- [86] Fisher, R. and Tippett, L. *Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample*. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1928, 24, 180-190.
- [87] Frees, E. W. et Valdez, E. *Understanding Relationships Using Copulas*. North American Actuarial Journal, 1998, 2(1), 1-25.
- [88] Fréchet, M. *Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données*. Ann. Univ. Lyon, 3e sér. A, 1951, 14, 53-77.
- [89] Galambos, J. *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*. Second ed., Malabar, Florida, Robert E. Krieger, 1987.

- [90] Gänssler, P. et Stute, W. *Seminar on Empirical Processes*. Birkhäuser, Basel, 1987.
- [91] Garavaglia, F. *Méthode SCHADEX de prédétermination des crues extrêmes*. Université Joseph Fourier de Grenoble, Grenoble, 2011, 389.
- [92] Geert van der, W. *Using Copulas in Risk Management*. Thèse de Master, 2003
- [93] Geffroy, J. *Contribution à la théorie des valeurs extrêmes*. Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris, 1958, 7, 37-185.
- [94] Geluk, J. and de Haan, L. *Regular variation, extensions and Tauberian theorems*. CWI Tract 40, Amsterdam, 1987.
- [95] Gençay, R. and Selçuk, F. *Extreme value theory and value-at-risk : Relative performance in emerging markets*. International Journal of Forecasting, 2004, 20, 287-303.
- [96] Genest, C. *Frank's family of bivariate distributions*. Biometrika, 74(3), 1987, 549-555.
- [97] Genest, C., Favre, A. C., Béliveau, J. et Jacques, C. *Meta elliptical copulas and their use in frequency analysis of multivariate hydrological data*. Water Resources Research, 2007, 43, W09401,.
- [98] Genest, C., Ghouli, K., and Rivest, L.-P. *A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distribution*. Biometrika, 1995, 82(3), 543-552.
- [99] Genest, C. and Mackay, R. J. *The joy of copulas : Bivariate distributions with uniform marginals*. The American Statistician, 40, 1986, 280-283.
- [100] Genest, C., Quessy, J.-F. et Rémillard, B. *Goodness-of-fit procedures for copula models based on the probability integral transformation*. Scandinavian Journal of Statistics, 2006, 33, 337-366.
- [101] Genest, C. et Rémillard, B. *Validity of the parametric bootstrap for goodness-of-fit testing in semiparametric models*. Annales de l'Institut Henri Poincaré : Probabilités et Statistiques, 2008, 44, 1096-1127.
- [102] Genest, C., Rémillard, B. and Beaudoin, D. *Goodness-of-fit tests for copulas : A review and a power study*. Insurance : Mathematics and Economics, Elsevier, 2009, 44(2), 199-213.
- [103] Genest, C. and Rivest, L.-P. *Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas*. Journal of the American Statistical Association, 1993, 88, 1034-1043.
- [104] Genest, C. and Segers, J. *Rank-based inference for bivariate extreme-value copulas*. Ann. Statist., 2009, 37, 2990-3022.

- [105] Ghoudi, K. and Rémillard, B. *Empirical processes based on pseudo-observations.II. The multivariate case. In Asymptotic Methods in Stochastics.* Amer. Math. Soc. 2004, 44, 381-406.
- [106] Gijbels, I. et Mielniczuk, J. *Estimating the density of a copula function.* Comm. Statist. Theory Methods, 1990, 19(2), 445-464.
- [107] Giot, P. and Laurent, S. *Value-at-risk for long and short trading positions.* Journal of Applied Econometrics, 2003, 18(6), 641-663.
- [108] Gnedenko, B. *Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire.* Annals of Mathematics, 1943, 44(3), 423-453.
- [109] Godambe, V. P. *On ancillarity and fisher information in the presence of nuisance parameter.* Biometrika, 1984, 71(3), 626-629.
- [110] Granger, C. W. J. *Time Serie Concepts for Conditional Distributions.* Oxford Bulletin of Economics and Statistic, 2003, 65(1), 689-701.
- [111] Grégoire, V., Genest, C. and Gendron, M. *Using copulas to model price dependence in energy markets.* Energy Risk, 2008, 5(5), 58-64.
- [112] Guillou, A. and Willems, P. *Application de la théorie des valeurs extrêmes en hydrologie RSA.* LIV, 2006, 2, 5-31.
- [113] Gumbel, E. J. *Statistics of Extremes.* Columbia University Press, New-York, 1958.
- [114] Gudendorf, G and Serges, J. *Nonparametric estimation of an extreme-value copula in arbitrary dimensions.* arXiv :0910.0845, 2009.
- [115] Haeusler, E. and Teugels, J. *On asymptotic normality of Hill's estimator for the exponent of regular variation .* Annals of Statistics, 1985, 13(2), 743-756.
- [116] Hall, P. *On some simple estimates of an exponent of regular variation.* J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 1982, 42, 37-42.
- [117] Hall, P. *Using the bootstrap to estimate mean squared error and select smoothing parameter in nonparametric problems.* J. Multivariate Anal., 1990, 32, 177-203.
- [118] Hall, P. and Welsh, A., H. *Adaptive estimate of parameters of regular variation.* Ann. Statist., 1985, 13, 331-341.
- [119] Harvey, A. C. *Time Series Models.* Oxford, Philip Allan, 1981.
- [120] Harvey, A. C. and Philips, G. D. A. *Maximum likelihood estimation of regression models with autoregressive-moving average disturbances.* Biometrika, 1979, 66, 49-58.
- [121] Hill, B. M. *A simple general approach to inference about the tail of a Loi.* Annals of Statistics, 1975, 5, 1163-1174.

- [122] Hoeffding, W. *Masstabinvariante Korrelationstheorie*. Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin 5 Heft, 1940, 3, 179-233 [Reprinted as Scale-invariant correlation theory. In : Fisher NI, Sen PK (eds) The Collected Works of Wassily Hoeffding. Springer, New York pp 57-107]
- [123] Hoeffding W. *Masstabinvariante Korrelationsmasse für diskontinuierliche Verteilungen*. Arkiv für matematischen Wirschaften und Sozialforschung, 1941, 7, 49-70 [Reprinted as Scale-invariant correlation measures for discontinuous distributions. In : Fisher NI, Sen PK (eds) The Collected Works of Wassily Hoeffding. Springer, New York pp 109-133].
- [124] Hols et De Vries *The limiting distribution of extremal exchange rate returns*. Journal of Applied Econometrics, 1991, 6, 287-302.
- [125] Hosking, J. and Wallis, J. *Parameter and quantile estimation for the generalized Pareto loi*. Technometrics, 1987, 29, 339-349.
- [126] Huang, X. *Statistics of bivariate extreme values*. Thèse de doctorat, Erasmus University Rotterdam, Tinbergen Institute, 1992.
- [127] Jansen, D. W. and de Vries, C. G. *On the frequency of large stock returns : putting booms and busts into perspective*. review of Economics and Statistics, 1991, 73, 18-24 .
- [128] Jenkinson, A. F. *The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements*. The Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 1955, 81(384), 158-171.
- [129] Joe, H. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman et Hall, London, 1997.
- [130] Joe, H. and Xu, J. *The estimation method of inference functions for margins for multivariate models*. University of British Columbia, Department of Statistics, 1996, Technical Report, 166.
- [131] Johnston, M., *Extending the Basel II Approach to estimate capital requirements for equity investments*. Journal of Banking and Finance, 2009, 33, 1177-1185.
- [132] Jondeau, E. and Rockinger, M. *Testing for differences in the tails of stock-market returns*. Journal of Empirical Finance, 2003, 10(5), 559-581.
- [133] Jouini, M. N. and Clemen, R. T. *Copula models for aggregating expert opinions*. Oper. Res., 1996, 44(3), 444-457
- [134] Juri, A. et Wüthrich, M. V. *Tail dependence from a distributional point of view*. Extremes, 2004, 6(3), 213-246.

- [135] Katz, R. W., Parlange, M. B. and Naveau, P. *Statistics of extremes in hydrology*. Advances in Water Resources, 2002, 25, 1287-1304.
- [136] Kawas, M. L. and Moreira, R. G. *Characterization of product quality attributes of tortilla chips during the frying process*. Journal of Food Engineering, 2001, 47, 97-107.
- [137] Kimeldorf, G. and Sampson, A. *One-parameter families of bivariate distributions with fixed marginals*. Comm Statist A-Theory Methods, 1975a, 4(3), 293-301
- [138] Klajnmic, H. *Niveaux de retour pour les vitesses extrêmes des vents*. XXXVes Journées de Statistique, Lyon, 2003.
- [139] Klugman, S. and Parsa, R. *Fitting bivariate loss distributions with copulas*. Insurance Math. Econom., 1999, 24(1-2), 139-148.
- [140] Lang, M., Ouarda, T. B. M. J., et Bobée, B. *Towards operational guidelines for over-threshold modeling*. J. Hydrol, 1999, 225, 103-117.
- [141] Leadbetter, M. R., Lindgren, G. and Rootzén, H. *Extremes and related properties of random sequences and processes*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York. 1983.
- [142] Ledford, A. W. and Tawn, J. A. *Statistics for near independence in multivariate extreme values*. Biometrika, 1996, 83(1), 169-187.
- [143] Li, D. X. *On default correlation : a copula function approach*. Working, The Riskmetrics Group, 2000, 99-07.
- [144] Lo, A. W. *Long-Term Memory in Stock Market Prices*. Econometrica, 1991, 59, 1279-1313.
- [145] Longin, F. *Booms and Crashes. Application of Extreme Value Theory to the U.S. Stock Market*. Institute of Finance and Accounting, London Business School. IFA Working Paper, 1993, 179-93.
- [146] Longin, F. *Optimal margin level in futures markets : a parametric Extremebased method*. Seventh Annual European Futures Research Symposium, Bonn - Allemagne, 1994.
- [147] Longin, F. M. *The asymptotic distribution of extreme stock market returns*. Journal of Business, 1996, 69, 383-408.
- [148] Longin, F. M. *Value at risk : Une nouvelle approche fondée sur les valeurs extrêmes*. Annales d'économie et de statistique, 1998, 52, 23-51.
- [149] Longin, F. M. *From value at risk to stress testing : The extreme value approach*. Journal of Banking and Finance, 2000, 24, 1097-1130.

- [150] Magadia, J. *Value-at-Risk Modeling via the Peaks-over-Threshold Approach*. Annual BSP?UP Professorial Chair Lectures, Bangko Sentral ng Pilipinas Malate, Manila, 2010, 6.
- [151] Magnus, J. R. *Maximum Likelihood estimation of GLS model with unknown parameters in the disturbances covariance matrix*. Journal of Econometrics, 1978, 7, 281-321.
- [152] Mandelbrot, B. *The Variation of Certain Speculative Prices*. The Journal of Business, 1963, 36(4), 394-419.
- [153] Marimoutou, V., Raggad, B. and Trabelsi, A. *Extreme Value Theory and Value at Risk : Application to Oil Market*. Energy Economics, 2009, 31, 519-530.
- [154] Mason, D. *Laws of large numbers for sums of extreme values*. Annals of Probability, 1982, 10(3), 754-764.
- [155] Matthys, G., and Beirlant, J. *Estimating the extreme value index and high quantiles with exponential regression models*. Statistica Sinica, 2003, 13, 853-880
- [156] Mervin, A. Daub. *Canadian economic forecasting : in a world where all's unsure*, 1983, 236.
- [157] McNeil, A. J. *Estimating the tails of loss severity distributions using extreme value theory*. ASTIN Bulletin, 1997, 27, 1117-1137.
- [158] McNeil, A. J. *Calculating quantile risk measures for financial time series using extreme value theory*. Department of Mathematics, ETH. Swiss Federal Technical University E-Collection, 1998, [<http://ecollection.ethbib.ethz.ch/>].
- [159] McNeil, A. J. *Extreme value theory for risk managers*. preprint, ETH, Zurich, 1999.
- [160] McNeil, A. J. and Frey, R. *Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series : An extreme value approach*. Journal of Empirical Finance, 2000, 7, 271-300.
- [161] McNeil, A. J. and Saladin, T. *The peaks over thresholds method for estimating high quantiles of loss lois*. Department of Mathematic ETH Zurich, 1997.
- [162] Moore, D. S., Spruill, M. C. *Unified large-sample theory of general chi-squared statistics for tests of fit*. Ann Statist, 1975, 3(3), 599-616.
- [163] Nelsen, R. B. *An introduction to Copulas*. Lecture Notes in Statistics, Springer Verlag, New-York. 1999, 139.
- [164] Nelsen, R. B. *An Introduction to Copulas*. second edition, Springer Series in Statistics, 2006.

- [165] Newbold, P. *The exact likelihood function for a mixed autoregressivemoving average process*. Biometrika, 1974, 61, 423-26.
- [166] Nguiffo-Boyom, M. *Un indicateur de retournement conjoncturel pour la France : une application du modèle à facteur avec changement de régime*. Économie et Prévision, 2006, 1(172), 162.
- [167] Nwogugu, M. C. I. *Further Critique of GARCH/ARMA/VAR/Stochastic-Volatility Models*. Applied Mathematics and Computation, 2006, 182(2), 1735-1748.
- [168] Omelka, M., Gijbels, I. et Veraverbeke, N. *Improved kernel estimation of copulas : weak convergence and goodness-of-fit testing*. Ann. Statist., 2009, 37(5B), 3023-3058.
- [169] Osakwe, P. N. *L'Afrique subsaharienne et la crise financière mondiale*. International Centre for Trade and Sustainable Development, 2008, 7(10).
- [170] Paul, T., Yuzhi, C., Reeve, D. and Stander, J. *Automated threshold selection methods for extreme wave analysis*. Journal of Time, Coastal Engineering, 2009, 1013-1021.
- [171] Panchenko, V. *Goodness-of-fit test for copulas*. Physica A, 2005, 355(1), 176-182.
- [172] Patton, A. J. *Modelling Time-Varying Exchange Rate Dependence Using the Conditional Copula*. PhD thesis, Department of Economics, UCSD, 2001.
- [173] Pickands, J. *Statistical inference using extreme order statistics*. Annals of Statistics, 1975, 3(1) :119-131.
- [174] Plackett, R. L. *A class of bivariate distributions*. Journal of the American Statistical Association, 1965, 60(310), 516-522.
- [175] Prevosto, M. *Comparaison de méthodes de simulation non linéaire de la surface libre en vagues irrégulières pour la prédiction de hauteurs extrêmes*, Ifremer, TMSI/IDM/COM 03-0H1, 2003.
- [176] Raggad, B. *Gestion des risques : théorie et application au marché pétrolier*. Thèse, Institut Supérieur de Gestion de Tunis, Université de Tunis, 2007.
- [177] Raillard, N. *Thèse de doctorat intitulée : Comportements extrêmes de processus spatio temporels. Application en océanographie et météorologie*. Université de Rennes 1, 2011.
- [178] Reiss, R.-D. and Thomas, M. *Statistical Analysis of Extreme Value with Applications to Assurance, Finance, Hydrology and Other Fields*. Basel, Birkhauser, Verlag, 2001.
- [179] Reiss, R.-D. and Thomas, M. *Statistical analysis of extreme values with applications to insurance, finance, hydrology and other fields*. Birkhäuser Verlag, Basel, third édition, 2007.

- [180] Resnick, S. I. *Extreme values, regular variation, and point processes*. Springer-Verlag, New York, Applied Probability, 1987, 4, 320.
- [181] Roberts, S. J. *Extreme value statistics for novelty detection in biomedical data processing*. IEEE proceedings, Science Measurement and Technology, 2000, 147.
- [182] Rockafellara, R. T. and Stanislav, U. *Conditional value-at-risk for general loss distributions*. Journal of Banking and Finance, 2002, 26(7), 1443-1471
- [183] Rosenblatt, M. *Remarks on a multivariate transformation*. Ann. Math. Statist., 1952, 23(3), 470-472.
- [184] Rosbjerg, D. *On the annual maximum distribution in dependent partial duration séries*. Stochastic Hydrol. Hydraul., 1987, 1, 3-16.
- [185] Rootzen, H. and Tajvidi, N. *Extreme value statistics and wind storm losses : a case study*. Scandinavian Actuarial Journal, 1997, 70-94.
- [186] Scaillet, O. *The Origin and Development of Value-at-Risk, dans Modern Risk Management. A History*, 2003, 151-159
- [187] Schweizer, B. and Wolff, E. F. *On nonparametric measures of dependence for random variables*. Ann. Statist., 1981, 9(4), 879-885.
- [188] Seeley, R. T. *Fubini implies Leibniz implies $F_{yx}=F_{xy}$* . Am Math Monthly, 1961, 68, 56-57.
- [189] Shea, G. S. *Uncertainty and Implied Variance Bounds in Long Memory Models of the Interest Rate Term Structure*. Empirical Economics, 1991, 16, 287-312.
- [190] Shih, J. H and Louis, T. A. *Inferences on the asociation parameter in copula models for bivariate survival data*. Biometrics, 1985, 51(4), 1384-1399.
- [191] Shorack, G. R. and Wellner, J. A. *Empirical Processes with Applications to Statistics*. Wiley, New York, 1986.
- [192] Sibuya, M. *Bivariate extreme statistics*. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 1960, 11(2), 195-210.
- [193] Silva, A. T., Portela, M. M., and Naghettini, M. *Nonstationarities in the occurrence rates of flood events in Portuguese watersheds*. Hydrol. Earth Syst. Sci., 2012, 16, 241-254.
- [194] Sklar, A. *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 1959, 8, 229-231.
- [195] Skřivánková, V. and Juhás, M. *EVT methods as risk management tools*. 6th International Scientific Conference Managing and Modelling of Financial Risks, Ostrava, 2012.

- [196] Smith, R. L. *Statistics of extreme values*. In Bulletin of the International Statistical Institute : Proceedings of the 45th Session(Amsterdam), Book 4, 1985, 26(1), 1-17.
- [197] Smith, R. L. *Extreme value statistics in meteorology and the environment*. In environmental Statistics, Chapter 8, NSF-CBMS conference notes, 2001, 300-357.
- [198] Smith, R. L. *Statistics of extremes, with application in environment*. insurance and finance, 2003.
- [199] Smith, J. A., Day, G. N., Kane, M. D. *Nonparametric framework for long-range streamflow forecasting*. J. Water Resour. Plann. Manage., 1992 118, 82-91.
- [200] SOWELL, F. *Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models*. Journal of Econometrics, 1992a 53, 165-188.
- [201] SOWELL, F. *Modeling Long-Run Behavior with the Fractional ARIMA Model*. Journal of Monetary Economics, 1992b, 29, pp. 277-302.
- [202] Spearman, C. *General Intelligence, Objectively Determined and Measure* STOR. The American Journal of Psychology, 1904, 15, 201-293.
- [203] Stock, H. J. and Watson, M. W. *Forecasting Inflation*. Journal of Monetary Economics, 1999, 44(2), 293-355.
- [204] Tiago de Olivera, J. *Extremal distributions*. Revista da Fac. Ciencias, Univ.Lisboa, 1958, 299-310.
- [205] Thompson, M. L., Reynolds, J., Cox, L. H., Guttorp, P. and Sampson, P. D. *A review of statistical methods for the meteorological adjustment of the tropospheric ozone*. Atmospheric Environment, 2001.
- [206] Todorovic, P. and Zelenhasic, E. *A stochastic model for flood analysis*. Water Resour. Res., 1970, 6(6), 1641-1648.
- [207] Todorovic, P. and Rousselle, J. *Some problems of flood analysis*. Water Resour. Res. 1971, 7(5), 1144-1150.
- [208] Tryon, R. G. and Cruse T. A. *Probabilistic mseomechanics for high cycle fatigue life prediction*. Journal of Engineering Materials and Technology-Transactions of the AMSE, 2000, 122, 209-214.
- [209] Tsai, M.-S. and Chen, L.-C. *The calculation of capital requirement using Extreme Value Theory*. Economic Modelling, 2011, 28, 390-395.
- [210] Tsukuhara, H. *Semiparametric estimation in copula models*. Canad. J. Statist., 2005(3), 33, 357-375.

- [211] Van den Goorbergh, R. W. J., Genest, C. and Werker, B. J. M. *Bivariate Option Pricing Using Dynamic Copula Models*. Insurance : Mathematics and Economics, 2005, 37(1), 101-114.
- [212] Veronica, B. M., and Milan, O. *Analysis of extreme hydrological events on the danube using the peak over threshold method*. J. Hydrol. Hydromechanics, 2010, 58(2), 88-101.
- [213] Wang, Q. J. *The POT model described by the generalized Pareto distribution with Poisson arrival rate*. J. Hydrol., 1991, 129(1-4), 263-280.
- [214] Wang, W., Wells, M. T. *Model selection and semiparametric inference for bivariate failure-time data*. J. Amer. Statist. Assoc., 2000, 95(449), 62-76.
- [215] Waszink, H. *Modelling Dependence of Interest, Inflation and Stock Market returns*. Waszink Actuarial Advisory Ltd, CAS 2006.
- [216] Widder, D. V. *The Laplace Transform*. Princeton University Press, Princeton, 1941.
- [217] Wüthrich, M. V. *Bivariate extension of the Pickands-Balkema-de Haan theorem*. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 2004, 40(1), 33-41.
- [218] Xiangxian, Z. and Wenlei, Ge. A. *New Method to Choose the Threshold in the POT Model*. icise, First International Conference on Information Science and Engineering, 2009, 750-753.
- [219] Zhang, J. and Guégan, D., *Pricing bivariate option under GARCH processes with time-varying copula*. Insurance : Mathematics and Economics, Elsevier, 2008, 42(3), 1095-1103.
- [220] Zoglat, A., El Adlouni, S., Ezzahid, E., Amar, A., Okou, G. C. and Badaoui, F. *Statistical methods to expect extreme values : Application of POT approach to CAC40 return index*. International Journal of Statistics and Economics, 2013, 10 (1), 1-13.
- [221] Zoglat, A., El Adlouni, S., Badaoui, F., Amar, A. and Okou, G. C. *Managing hydrological risk with extreme modeling : application of peaks over threshold model to the Lekkous basin*. Journal of Hydrologic Engineering, Accepté, Mars 2014.
- [222] Zwiers, F., Zhang, X. and Feng, Y. *Anthropogenic influence on long return period daily temperature extremes at regional scales*. Journal of Climate, 2011, 24, 881-892.

Annexe

La Liste des Figures

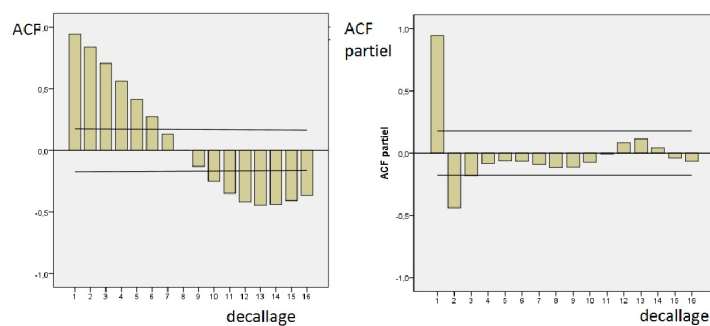


FIGURE 5.1 – Graphique de ACF et PACF pour l'inflation transformée

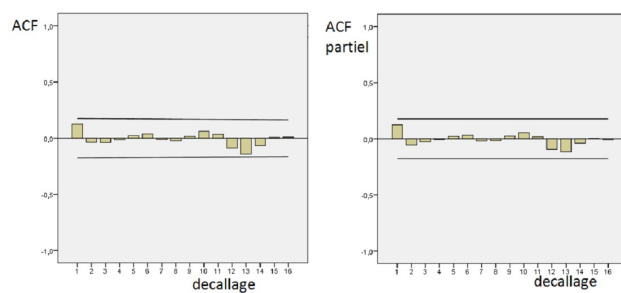


FIGURE 5.2 – Graphique de ACF et PACF des résidus du modèle AR3

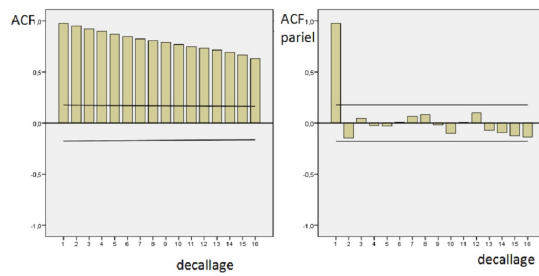


FIGURE 5.3 – Graphique de ACF et PACF du Taux de change normalisé

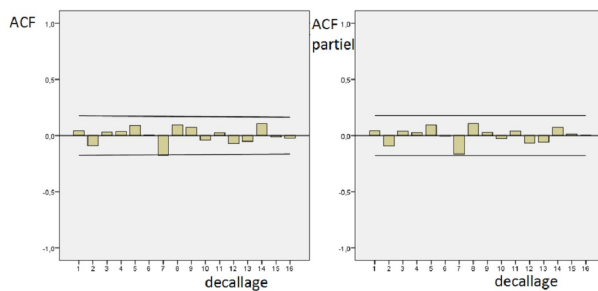


FIGURE 5.4 – Graphique de ACF et PACF des résidus du modèle AR2

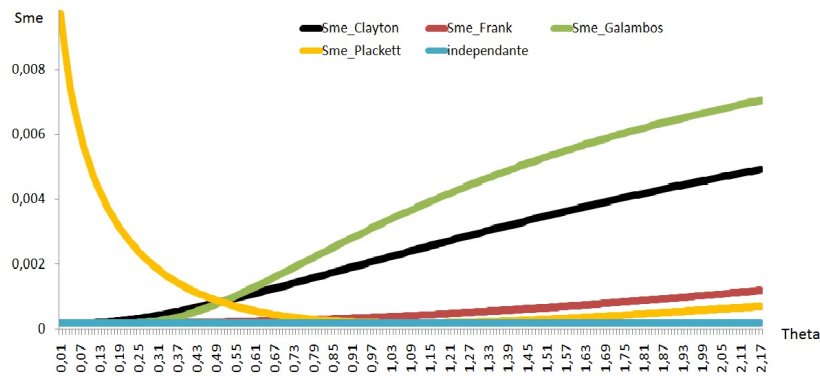


FIGURE 5.5 – Graphique de la Moyenne des Erreurs Quadratiques (Sme) des copules Clayton, Plackett, Galambos, Frank et Independante du couple (Taux de Change, Inflation)

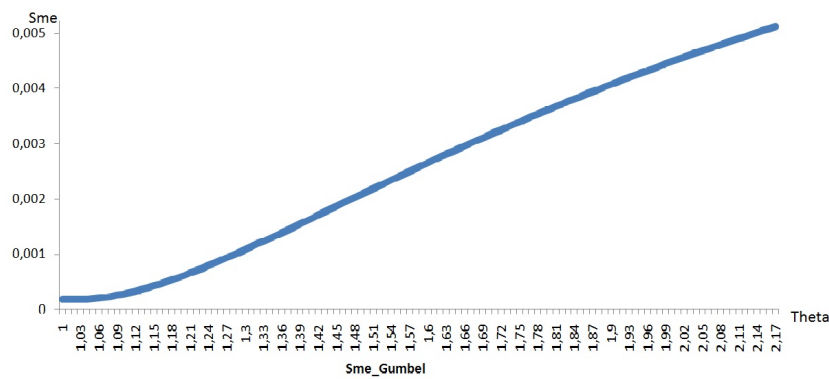


FIGURE 5.6 – Graphique de la Moyenne des Erreurs Quadratiques (Sme) de la copule Gumbel du couple(Taux de Change, Inflation)

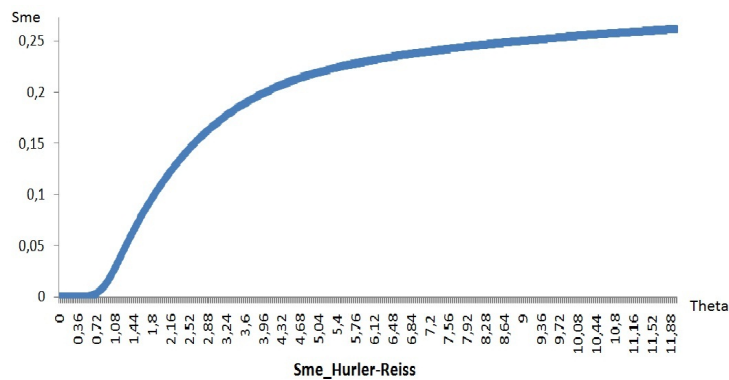


FIGURE 5.7 – Graphique de la Moyenne des Erreurs Quadratiques (Sme) de la copule Hurler-Reiss du couple (Taux de Change, Inflation)

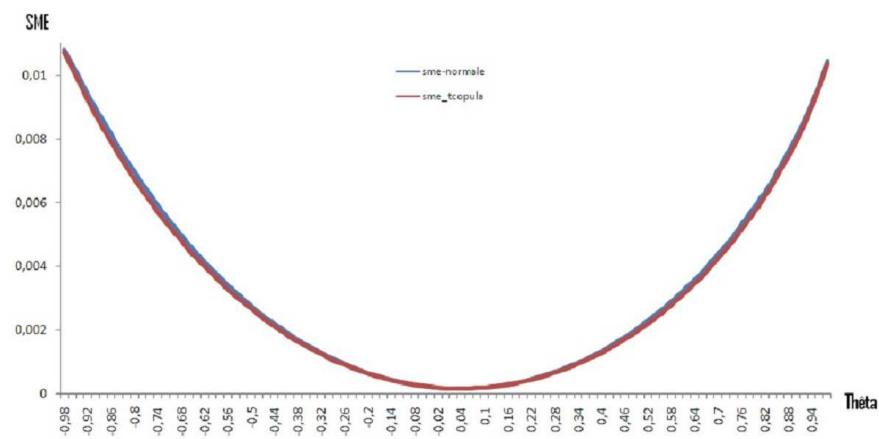


FIGURE 5.8 – Graphique de la Moyenne des Erreurs Quadratiques (Sme) des copules Normale et Student du couple (Taux de Change, Inflation)

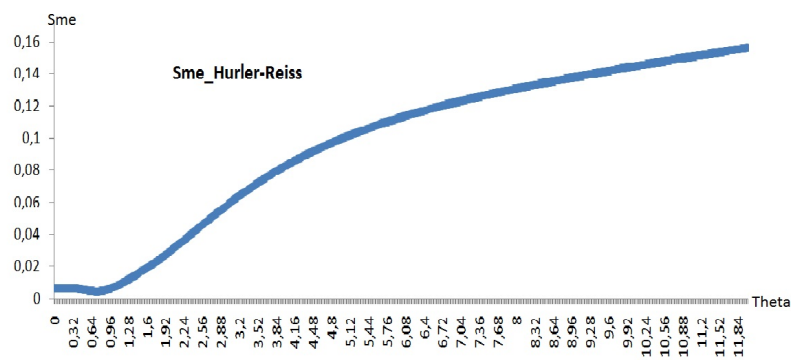


FIGURE 5.9 – Graphique de la Moyenne des Erreurs Quadratiques (Sme) de la copule Hurler-Reiss du couple (Nasdag, DJIA)

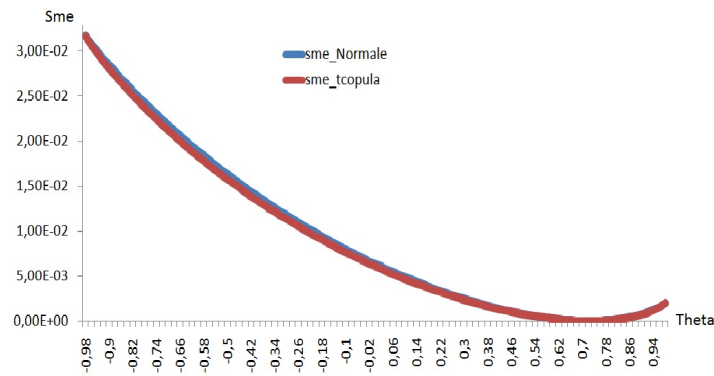


FIGURE 5.10 – Graphique de la Moyenne des Erreurs Quadratiques (Sme) des copules Normale et Student pour le couple (Nasdag, DJIA)

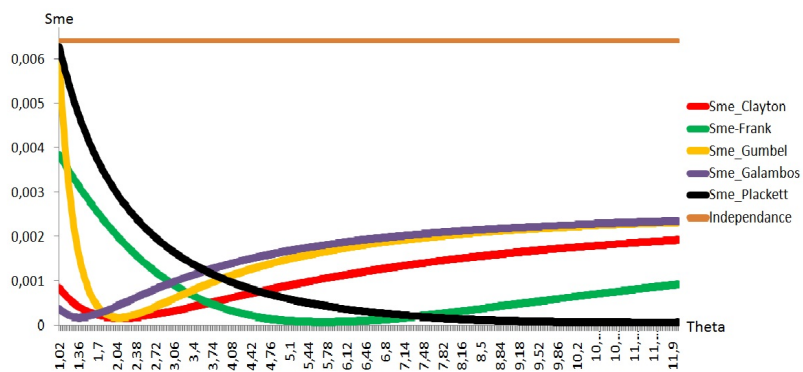


FIGURE 5.11 – Graphique de la Moyenne des Erreurs Quadratiques (Sme) des copules Clayton, Plackett, Galambos, Gumbel, Frank et Indépendante du couple (Nasdag, DJIA)

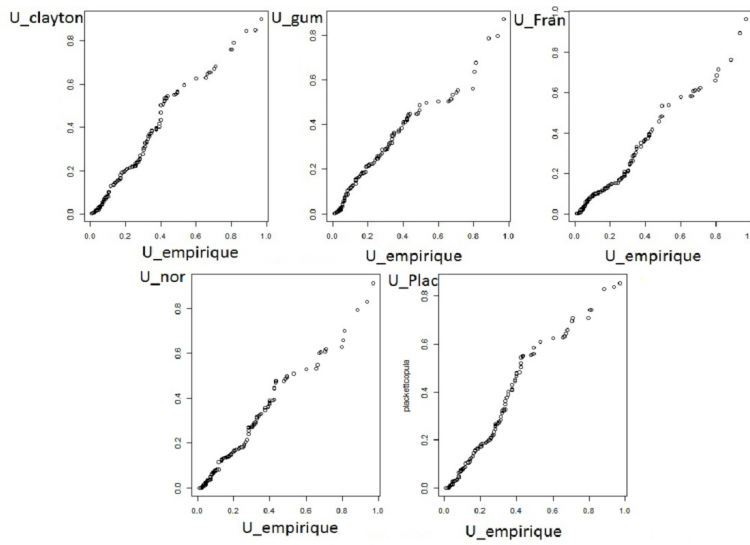


FIGURE 5.12 – Graphique qqplot des copules de Clayton, Gumbel, Frank, Normale et Plackett

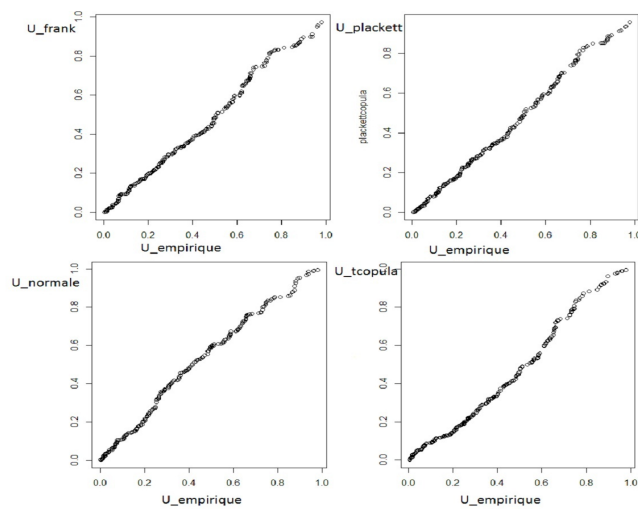


FIGURE 5.13 – Graphique qqplot des copules de Frank, Plackett, Normale et tcopula