NOTES DE COURS
DE MATHEMATIQUES FINANCIERES

LE CALCUL FINANCIER ET LA NOTION DE LA VALEUR TEMPORELLE DE L'ARGENT

Enseignants : Walid KHOUFI & Inès DAMI
Ecole Supérieure de Commerce de Sfax

A l'usage des étudiants de la deuxième année
Sciences de Gestion & Etudes Comptables

Dernière mise à jour : Septembre 2004

OBJECIF DU COURS

Ce cours vise à présenter les différents éléments du calcul financier et d'expliquer la notion de la valeur temporelle de l'argent. Il fait apparaître principalement cinq préoccupations :

- La différence entre les différents types d'intérêts (intérêt simple, intérêt composé).
- La différence entre les situations d'actualisation et de capitalisation.
- La méthode de calcul de la valeur future et la valeur présente d'une somme ou d'une suite d'annuités.
- Les grands domaines d'application du calcul financier.
- Les tableaux d'amortissement des emprunts.

CONTENU

Pour atteindre les objectifs d'apprentissage, le contenu du cours est structuré en trois chapitres :

Chapitre 1 : Intérêt, Capitalisation et Actualisation.
Chapitre 2 : Les annuités.
Chapitre 3 : Les emprunts indivis et les emprunts obligataires.

Chacun des chapitres comporte des applications permettant à l'étudiant de bien assimiler le contenu du cours. Des exercices et des problèmes à la fin de chaque chapitre permettront à l'étudiant de tester ses connaissances.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ANSION G. et HOUBEN T., Mathématiques financières, Armand Colin, 1989.

BOISSONADE M., *Mathématiques financières*, Armand Colin, 1998.

BONNEAU P. et WISZNIAK M., *Mathématiques financières approfondies*, Dunod, 1998.

CHOYAKH M., Mathématiques financières, CLE, 1998.

DEFFAINS-CRAPSKY C., Mathématiques financières, Bréal, 2003.

ELLOUZE A., Mathématiques financières, CLE, 2000.

HELLARA S., Mathématiques financières, Ets. Ben abdellah, 1997.

JUSTENS D. et ROSOUX J., Introduction à la mathématique financière, De Boeck University, 1995.

MASEIRI W., *Mathématiques financières*, Sirey, 1997.

PIERMAY M., LAZIMI A. et HEREIL O., Mathématiques financières, Economica, 1998.

QUITTARD-PINON F., Mathématiques financières, ems, 2002.

SRAIRI S., Manuel de mathématiques financières, CLE, 1997.

PREMIER CHAPITRE

INTERET, CAPITALISATION ET ACTUALISATION

1. DEFINITION ET JUSTIFICATION DE L'INTERET

1.1. Définition de l'intérêt

L'intérêt peut être défini comme la rémunération d'un prêt d'argent.
C'est le prix à payer par l'emprunteur au prêteur, pour rémunérer le service rendu par la mise à disposition d'une somme d'argent pendant une période de temps.
Trois facteurs essentiels déterminent le coût de l'intérêt:

- la somme prêtée,
- la durée du prêt,
- et le taux auquel cette somme est prêtée.

Il y a deux types d'intérêt: l'intérêt simple et l'intérêt composé.

1.2. Justification de l'intérêt

Plusieurs raisons ont été avancées pour justifier l'existence et l'utilisation de l'intérêt, parmi lesquelles on peut citer :

- *La privation de consommation*: Lorsqu'une personne (le prêteur) prête une somme d'argent à une autre (l'emprunteur), elle se prive d'une consommation immédiate. Il est ainsi normal qu'elle reçoive en contrepartie une rémunération de la part de l'emprunteur pour se dédommager de cette privation provisoire.
- *La prise en compte du risque*: Une personne qui prête de l'argent, le fait pour une durée étalée dans le temps. Elle court, dès lors, un risque inhérent au futur. La réalisation de ce risque résulte au moins des éléments suivants :
    - l'insolvabilité de l'emprunteur : dans le cas où l'emprunteur se trouve incapable de rembourser sa dette, lorsque celle-ci vient à échéance, le prêteur risque de perdre l'argent qu'il a déjà prêté. Il est alors normal qu'il exige une rémunération pour couvrir le risque encouru et dont l'importance sera appréciée en fonction de la probabilité de non remboursement.
    - l'inflation : entre la date de prêt et la date de remboursement, la valeur du prêt peut diminuer à la suite d'une érosion monétaire connue également sous le nom d'inflation. Le prêteur peut donc exiger une rémunération pour compenser cet effet.

2. CAPITALISATION ET ACTUALISATION

2.1. Principe

D'après ce qui précède, le taux d'intérêt apparaît comme le taux de transformation de l'argent dans le temps. Cette relation entre temps et taux d'intérêt signifie que deux sommes d'argent ne sont équivalentes que si elles sont égales à la même date.
Dès lors, pour pouvoir comparer deux ou des sommes disponibles à différentes dates le passage par les techniques de calcul actuariel (capitalisation et actualisation) devient nécessaire.

2.2. L'ACTUALISATION

L'actualisation est une technique qui consiste à faire reculer dans le temps une valeur future pour calculer sa valeur présente appelée *Valeur Actuelle*.
La valeur actuelle C_0 d'une somme d'argent C_1 disponible dans une année et placée au taux t, est donnée par la formule suivante:

$$C_0 = C_1 (1 + t)^{-1}$$

Dès lors, la valeur actuelle C_0 d'une somme d'argent C_n disponible dans n années d'intervalle et placée au taux t est égale à:

$$\boxed{\mathbf{C_0 = C_n (1 + t)^{-n}}}$$

$t_0 \longleftarrow t_n$

Valeur actuelle	Actualisation	Valeur future
C_0 = ?		C_n
$C_0 = C_n (1+t)^{-n}$		

2.3. LA CAPITALISATION

Contrairement à l'actualisation, la capitalisation consiste à faire avancer dans le temps une valeur présente pour calculer sa valeur future appelée aussi *Valeur Acquise*.
La valeur acquise C_1 d'une somme d'argent présente C_0 capitalisée au taux t pendant une année est égale à:

$$C_1 = C_0 (1 + t)$$

Dès lors, la valeur future C_n d'une somme d'argent présente C_0 disponible après n années et placée au taux t est égale à:

$$\boxed{\mathbf{C_n = C_0 (1 + t)^{n}}}$$

$t_0 \longrightarrow t_n$

Valeur actuelle	Capitalisation	Valeur future
C_0		C_n = ?
		$C_n = C_0 (1+t)^n$

3. L'INTERET SIMPLE

3.1. Principe et champ d'application

L'intérêt simple se calcule toujours sur le principal. Il ne s'ajoute pas au capital pour porter lui même intérêt. L'intérêt simple est proportionnel au capital prêté ou emprunté. Il est d'autant plus élevé que le montant prêté ou emprunté est important et que l'argent est prêté ou emprunté pour longtemps. Il est versé en une seule fois au début de l'opération, c'est à dire lors de la remise du prêt, ou à la fin de l'opération c'est à dire lors du remboursement.
L'intérêt simple concerne essentiellement les opérations à court terme (inférieures à un an).

3.2. Calcul pratique

Soit,

C : le montant du capital prêté ou emprunté en dinar (valeur nominale)
t : le taux d'intérêt annuel (en pourcentage)
n : la durée de placement (en année)
I : le montant de l'intérêt à calculer en dinar
V : la valeur acquise par le capital en dinar (valeur future)

on a : $I = C.\ t\%.\ n$

$$\boxed{I = \frac{C.t.n}{100}}$$

et $V = C + I$

$$V = C + \frac{C.t.n}{100}$$

$$\boxed{V = C\left(1 + \frac{t.n}{100}\right)}$$

Remarques:

- Si la durée du placement est exprimée en mois, on aura :

$$I = C.\frac{t}{100}.\frac{n}{12}$$

$$\boxed{I = \frac{C.t.n}{1200}}$$

Et

$$\boxed{V = C\left(1 + \frac{t.n}{1200}\right)}$$

- Si la durée du placement est exprimée en jours, on aura:

$$I = C.\frac{t}{100}.\frac{n}{360}$$

$$\boxed{I = \frac{C.t.n}{36000}}$$

Et $$\boxed{V = C\left(1 + \frac{t.n}{36000}\right)}$$

- Pour une durée de placement exprimée en jours, l'usage fait que l'intérêt est calculé sur la base de l'année financière ou commerciale comptant 360 jours et non pas l'année civile comptant 365 jours ou 366 jours.
  L'exception est faite pour les comptes à terme et les bons de caisse dont l'intérêt servi est calculé sur la base de l'année civile, c'est à dire 365 jours.
  Par ailleurs, il faut aussi signaler que lorsque la durée est exprimée en jours, les mois sont comptés à leur nombre exact de jours, et on ne tient compte que de l'une des deux dates extrêmes.

<u>Exemple</u>:
Une somme de 10000 dinars est placée sur un compte du 23 Avril au 9 Août au taux simple de 7 %

1/ Calculer le montant de l'intérêt produit à l'échéance.
2/ Calculer la valeur acquise par ce capital.
3/ Chercher la date de remboursement pour un intérêt produit égal à 315 dinars.

<u>Solution</u> :

1/ On a : $I = \frac{C.t.n}{36000}$, C = 10000, t = 7, Calculons alors le nombre de jours de placement.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Avril} = 7 \\ \text{Mai} = 31 \\ \text{Juin} = 30 \\ \text{Juillet} = 31 \\ \text{Août} = 9 \end{array}\right\} \text{108 jours}$$

$$I = \frac{10000.7.108}{36000} = 210 \text{ dinars}$$

2/ La valeur acquise par ce capital est égale à V,

V = C + I = 10000 + 210 = 10210 dinars

3/ Date de remboursement correspondant à un intérêt de 315 dinars

$$I = \frac{C.t.n}{36000} \quad \text{donc} \quad n = \frac{36000.I}{C.t} \Rightarrow n = \frac{36000.315}{10000.7} = 162 \text{ jours}$$

Avril	=	7
Mai	=	31
Juin	=	30
Juillet	=	31
Août	=	31
Septembre	=	30
		160
Octobre	=	2
		162

Date de remboursement = 2 octobre

3.3. Taux moyen d'une série de placements simultanés

Soit J opérations de placement simultanées à intérêt simple de sommes C_j, aux taux t_j, sur n_j jours.

Opération de placement	1	2	………………………………	J
Capital	C_1	C_2	………………………………	C_J
Taux	t_1	t_2	………………………………	t_J
Durée	n_1	n_2	………………………………	n_J

Le taux moyen de cette série de placement est un taux unique T qui, appliqué à cette même série, permet d'obtenir le même intérêt total.

L'intérêt total de cette série est égal à :

$$I = \frac{C_1.t_1.n_1}{36000} + \frac{C_2.t_2.n_2}{36000} + \dots\dots\dots\dots + \frac{C_J.t_J.n_J}{36000}$$

D'après la définition, le taux moyen de placement sera calculé par la résolution de l'égalité suivante :

$$\frac{C_1.t_1.n_1}{36000} + \frac{C_2.t_2.n_2}{36000} + \dots\dots\dots\dots + \frac{C_J.t_J.n_J}{36000} = \frac{C_1.T.n_1}{36000} + \frac{C_2.T.n_2}{36000} + \dots\dots\dots\dots + \frac{C_J.T.n_J}{36000}$$

$$\sum_{i=1}^{J} C_i.t_i.n_i = T.\sum_{i=1}^{J} C_i.n_i$$

$$\boxed{T = \frac{\sum_{i=1}^{J} C_i.t_i.n_i}{\sum_{i=1}^{J} C_i.n_i}}$$

Exemple

Calculer le taux moyen de placement des capitaux suivants :
2000 dinars placés à 3% pendant 30 jours, 3000 dinars placés à 4% pendant 40 jours et 4000 dinars placés à 5% pendant 50 jours.

Solution :

$$T = \frac{2000.\,3.\,30 + 3000.\,4.\,40 + 4000.\,5.\,50}{2000.30 + 3000.40 + 4000.50} = 4{,}37\,\%$$

3.4. Terme échu, terme à échoir, taux effectif

Comme on l'a déjà signalé, selon les modalités du contrat de prêt ou de placement, les intérêts peuvent être versés en début ou en fin de période :

- Lorsque les intérêts sont payés en fin de période, on dit qu'ils sont post-comptés ou terme échu. Ils sont calculés au taux d'intérêt simple, sur le capital initial C qui représente le nominal. Ils sont ajoutés ensuite, au nominal pour constituer le capital final V (valeur acquise).

  Pour un capital initial égal à C on a donc $V = C\left(1 + \frac{t.n}{36000}\right)$

- Lorsque les intérêts sont payés en début de période, on dit qu'ils sont précomptés ou terme à échoir. Ils sont calculés sur le nominal, qui constitue la somme finale C et retranchés du nominal pour déterminer la somme initiale ou mise à disposition.
  Etant donné un nominal égal à C, on aura alors C' = C – I, où C' désigne la somme initiale.

- Quand les intérêts sont payables d'avance, le taux d'intérêt effectif est celui appliqué au capital effectivement prêté ou emprunté C' donne le montant de l'intérêt produit. En désignant par T, le taux effectif, on aura alors :

  $$\frac{C.t.n}{36000} = \frac{C'.T.n}{36000}$$

  Or C' = C - I = $C - \frac{C.t.n}{36000}$

  Donc : $$\frac{C.t.n}{36000} = \frac{\left(C - \frac{C.\,t.\,n}{36000}\right).T.n}{36000}$$

  $$t = T\left(1 - \frac{t.n}{36000}\right)$$

  Donc $$\boxed{T = \frac{t}{1 - \frac{t\,.\,n}{36000}}}$$

Exemple:
Une personne place à intérêts précomptés la somme de 30000 dinars pour une durée de 6 mois au taux de 10 %. Quel est le taux effectif de ce placement ?

Solution :

$$T = \frac{t}{1 - \frac{t.n}{36000}} \Rightarrow T = \frac{10}{1 - \frac{10.6}{1200}} = 10,526\ \%$$

4. L'INTERET COMPOSE

4.1. Principe et champ d'application

Un capital est dit placé à intérêt composé, lorsqu'à l'issue de chaque période de placement, les intérêts sont ajoutés au capital pour porter eux même intérêts à la période suivante au taux convenu. On parle alors d'une capitalisation des intérêts.
Cette dernière opération est généralement appliquée lorsque la durée de placement dépasse un an.

4.2. Calcul pratique

Soit,
- C_0 : le capital initial
- i : le taux d'intérêt par période pour une durée d'un an
- n : nombre de périodes de placement
- C_n : Valeur acquise par le capital C_0 pendant n périodes

Le tableau qui suit présente la méthode de calcul des intérêts et de valeur acquise à la fin de chaque année :

Période (année)	Capital début de la période	L'intérêt de l'année	Valeur acquise par le capital en fin de période après prise en considération des intérêts
1	C_0	$C_0\ i$	$C_0 + C_0.i = C_0\ (1+ i)$
2	$C_0\ (1+ i)$	$C_0\ (1+ i)\ i$	$C_0\ (1+ i) + C_0\ (1+ i).i = C_0\ (1+ i)^2$
3	$C_0\ (1+ i\ )^2$	$C_0\ (1+ i)^2\ i$	$C_0\ (1+ i)^2 + C_0\ (1+ i)^2.i = C_0\ (1+ i)^3$
:			
n - 1	$C_0\ (1+ i)^{n-2}$	$C_0\ (1+ i)^{n-2}\ i$	$C_0\ (1+ i)^{n-2} + C_0\ (1+ i)^{n-2}.i = C_0\ (1+ i)^{n-1}$
n	$C_0\ (1+ i)^{n-1}$	$C_0\ (1+ i)^{n-1}\ i$	$C_0\ (1+ i)^{n-1} + C_0\ (1+ i)^{n-1}.i = C_0\ (1+ i)^n$

La valeur acquise par le capital C_0 à la fin de n périodes au taux i est donc donnée par la formule suivante : $\boxed{C_n = C_0\ (1 + i)^n}$

Remarques:
La formule $C_n = C_0 (1 + i)^n$ n'est applicable que si le taux d'intérêt i et la durée n sont homogènes, c'est à dire exprimés dans la même unité de temps que la période de capitalisation .
Si par exemple, il est convenu entre le prêteur et l'emprunteur que les intérêts doivent être capitalisés à la fin de chaque mois, la formule ne sera applicable que si le taux d'intérêt est mensuel et que la durée de placement est exprimée en mois.

Exemple:
Une somme de 10000 dinars est placée pendant 5 ans au taux annuel de 10%.

1/ Quelle somme obtient-on à l'issue de ce placement ?
2/ Si au bout de cette période de placement on souhaite obtenir 20000 dinars, quelle somme doit-on placer aujourd'hui ?
3/ Si la somme placée aujourd'hui est de 10000 dinars, après combien de temps disposera-t-on d'une somme égale à 23580 dinars ?
4/ Si au bout de 5 ans la valeur acquise du placement est de 17821 dinars à quel taux le placement a été effectué ?

Solution :

1/ Valeur acquise :
$C_n = C_0 (1 + i)^n$

$C_5 = 10000 (1 + 0,1)^5 = 16105,100$ dinars

2/ Valeur actuelle correspondante à une valeur acquise de 20000 dinars.
$C_n = C_0 (1 + i)^n \Rightarrow C_0 = C_n (1 + i)^{-n}$

$C_0 = 20000 (1 + 0,1)^{-5} = 12418,426$ dinars.

3/ Durée de placement

$$C_n = C_0 (1 + i)^n \Rightarrow \log C_n = \log C_0 + n. \log(1+i) \Rightarrow n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)}$$

$$n = \frac{\log 23580 - \log 10000}{\log(1+0,1)} \Rightarrow n = 9 \text{ ans}$$

4/ Taux de placement

$$C_n = C_0 (1 + i)^n \Rightarrow (1+i)^n = \frac{C_n}{C_0} \Rightarrow i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} -1 \Rightarrow i = \left(\frac{17821}{10000}\right)^{\frac{1}{5}} -1 = 0,1225$$

i = 12,25%.

5. TAUX PROPORTIONNEL ET TAUX EQUIVALENT

Les taux d'intérêt sont généralement exprimés en taux annuels. Mais, on peut considérer une période plus courte que l'année, par exemple, le semestre, le trimestre le mois ou le jour. De même, les intérêts peuvent être capitalisés chaque semestre, chaque trimestre, chaque mois ou chaque jour. Ainsi, lorsque le taux d'intérêt est annuel et l'on considère une période inférieure à l'année, le taux d'intérêt prévalant pour cette période devra être calculé. Pour ce faire, on emploie l'un des deux taux suivants:

- le taux proportionnel

  ou

- le taux équivalent

5.1. Taux proportionnel

Deux taux correspondants à des périodes différentes sont dits proportionnels, lorsque leur rapport est égal au rapport de leurs périodes de capitalisation respectives.

soit ,

i : taux annuel

p : le nombre de périodes dans l'année

i_p : taux proportionnel par période

On a alors $\boxed{i_p = \frac{i}{p}}$

Ainsi si:

- i_s = taux semestriel, alors $i_s = \frac{i}{2}$
- i_t = taux trimestriel, alors $i_t = \frac{i}{4}$
- i_m = taux mensuel, alors $i_m = \frac{i}{12}$

5.2. Taux équivalent

Deux taux correspondants à des périodes de capitalisation différentes, sont dits équivalents lorsqu'ils produisent la même valeur acquise quand ils sont appliqués au même capital.

Soit,

i : taux annuel équivalent

p : nombre de périodes de l'année

i_p : taux équivalent par période

On a alors: $\boxed{i_p = \sqrt[p]{(1+i)} - 1}$

<u>Démonstration</u>:

$$C_0(1+i) = C_0(1+i_p)^p$$

$$(1+i) = (1+i_p)^p$$

$$1+i_p = \sqrt[p]{(1+i)}$$

$$i_p = \sqrt[p]{(1+i)} - 1$$

$$i_p = (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1$$

Ainsi si:

- i_s = taux semestriel équivalent, alors $i_s = (1+i)^{\frac{1}{2}} - 1$
- i_t = taux trimestriel équivalent, alors $i_t = (1+i)^{\frac{1}{4}} - 1$
- i_m = taux mensuel équivalent, alors $i_m = (1+i)^{\frac{1}{12}} - 1$

Exemple:
Calculer le taux semestriel proportionnel et le taux semestriel équivalent pour i = 9 %.

Taux semestriel proportionnel = $i_s = \frac{0{,}09}{2} = 0{,}045 = 4{,}5\%$

Taux semestriel équivalent = $i_s = (1+0{,}09)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}044 = 4{,}4\%$

6. APPLICATION A QUELQUES INSTRUMENTS DE PLACEMENT ET DE CREDIT

6.1. Le compte d'épargne

C'est un compte nominatif sur lequel sont servis des intérêts. Il est mis à la disposition des clients par les différentes banques commerciales du pays et sous différentes formes: le livret d'épargne, le plan épargne études, le plan épargne résidence etc.

Une personne physique ne peut avoir qu'un seul compte d'épargne par banque. Le compte d'épargne peut recevoir des versements en espèces ou par chèque et des virements (opérations de crédit) et subir des retraits en espèces ou par virements (opérations de débit). Le montant minimum de chaque opération de crédit ou de débit est fixé à 10 dinars.

Les intérêts servis sur les comptes d'épargne sont calculés selon le principe de l'intérêt simple sur la base d'un taux appelé le Taux de Rendement de l'Epargne (TRE) indexé au taux du marché monétaire (TMM):
TRE = TMM - 2%

Avec TMM = Taux moyen du marché monétaire

$$TMM = \frac{\text{total des TM de chaque jour de la période considérée}}{n}$$

Et tels que :
TM = le taux du jour du marché monétaire ou le taux de la veille pour les jours chômés.
n = le nombre de jours de la période considérée y compris les jours chômés
Le TRE est généralement fourni aux banques par la banque centrale. Pour un mois quelconque, on emploi le TRE du mois précédent.

De point de vue fonctionnement (Circulaire B.C.T. N°20 03-10, du 15 septembre 2003), la principale caractéristique des comptes d'épargne est que les crédits ne portent intérêts qu'à compter du septième jour ouvrable suivant le jour (j) de dépôt.

En ce qui concerne les débits, ils sont réputés être effectifs le septième jour ouvrable précédant le jour (j) de retrait.

Outre les intérêts, une prime dite de fidélité est servie sur les fonds restés stables au taux de :

- 0,5% pour les fonds restés stables pendant une durée égale ou supérieure à une année et inférieure à 2 ans.
- 1% pour les fonds restés stables pendant une durée égale ou supérieure à 2 ans

Les intérêts relatifs au compte d'épargne sont décomptés et capitalisés à chaque arrêté trimestriel pour leur net d'impôt, c'est à dire après une retenue à la source égale à 20 %.

Il faut également remarquer que le calcul du taux équivalent s'avère nécessaire lorsqu'il y a une différence entre la période de capitalisation (trimestre) et l'horizon pour lequel le taux d'intérêt est défini (année). Ce passage logique par le taux équivalent est parfois ignoré sur le plan pratique. Certaines banques appliquent en effet, la méthode du taux proportionnel.

Exemple:
Le 12 Août 2004 Mr X a ouvert un compte d'épargne à la STB. Le même jour, il en a déposé une somme égale à 1000 dinars.
De cette date jusqu'à la fin de l'année, Mr X a effectué les opérations suivantes :

- le 30 Août	versement	200 D
- le 10 Septembre	versement	50 D
- le 17 Septembre	retrait	100 D
- le 01 octobre	versement	250 D
- le 16 Novembre	versement	150 D
- le 27 Décembre	retrait	50 D

Les taux d'intérêt mensuels (TRE) sont :

- Juillet	3 %
- Août	3 %
- Septembre	3,125 %
- Octobre	3,125 %
- Novembre	3,125 %
- Décembre	3,125 %

Déterminer la valeur acquise nette au 31/12/2004.

Solution :
Décompte des intérêts sur livret d'épargne.

Date opér.	Vers.	Retrait	Solde en dinars	Date de valeur	Nb. de jours	TRE du mois	Intérêt
12/08	1000		1000	24/08	15	3 %	1,236
30/08	200		1200	08/09			
17/09		100	1100	08/09	13	3 %	1,178
10/09	50		1150	21/09	9	3 %	0,853
30/09	2,614		1152,614	30/09	12	3,125 %	1,187
01/10	250		1402,614	12/10	44	3,125 %	5,296
16/11	150		1552,614	25/11	21	3,125 %	2,798
27/12		50	1502,614	16/12	15	3,125 %	1,934
31/12	8,971		1511,585				

Valeur acquise nette au 01/01/2005 = 1511,585 dinars

6.2. Les bons de caisse

Ce sont des bons nominatifs délivrés par une banque à toute personne physique en échange de l'argent qui lui est confié pour une période déterminée à l'avance (minium 3 mois, maximum 5 ans) moyennant des intérêts. A l'échéance, le client se fait rembourser du montant du bon sur présentation de ce dernier à la banque.
Les intérêts servis sur les bons de caisse sont calculés sur la base d'une année de 365 jours (année civile). S'ils sont à terme échu on applique la formule suivante: $\boxed{I = \frac{C.t.n}{36500}}$
Par contre, s'ils sont payables d'avance c'est à dire à la souscription, on applique la formule:
$\boxed{I = \frac{C.t.n}{36500 - t.n}}$
Enfin, il faut noter que, comme pour le compte d'épargne, les intérêts servis sur les bons de caisse subissent une retenue à la source au titre de l'impôt égale à 20 %.

6.3. Le crédit pour caisse

C'est un concours bancaire non mobilisé (non matérialisé par des effets), permettant à l'entreprise de combler ses écarts temporaires et périodiques de trésorerie dus aux décalages entre les flux de recettes et de dépenses. Il offre ainsi, au client la possibilité de rendre son compte débiteur dans la limite d'un montant maximum et sur une durée déterminée. On l'appelle aussi le découvert bancaire.
Le coût global du découvert est formé par l'intérêt et la commission:

- L'intérêt est post-compté en fonction du montant du découvert, du nombre de jours et du taux d'intérêt (exemple:TMM + 3 %)
- La commission calculée sur la base du plus fort découvert du mois et un coefficient fixé par la banque.

Exemple:
Le compte de la société X présente un découvert moyen de 150000 dinars du 1/04 au 30/06 soit 90 j. Les plus forts découverts mensuels ont été de :

500.000	le 06 / 04
400.000	le 25 / 05
300.000	le 08 / 06

La commission du plus fort découvert (1/ 800) est perçue chaque mois.
taux d'intérêt = 9,5 %
Calculer le coût réel du découvert.

Solution :

Montant des intérêts = $I = \dfrac{C.t.n}{36000} = \dfrac{150000.9,5.90}{36000}$ donc $I = 3562,500$ dinars

Commission du plus fort découvert = (500000+400000+300000).(1/800) = 1500 dinars

Coût réel du découvert = $\dfrac{(3562,500 + 1500).360}{150000.90}$

= 0,135 = 13,5 %

6.4. L'escompte

L'escompte est une opération de crédit par laquelle la banque transforme une créance, matérialisée par un effet de commerce, en liquidité au profit de son client, avant son échéance et contre remise de l'effet. La banque crédite ainsi le compte de l'entreprise du montant de l'effet escompté diminué des agios. On distingue l'escompte commercial de l'escompte rationnel.

6.4.1. L'escompte Commercial

C'est l'intérêt simple calculé à un taux indiqué par le banquier sur une somme égale à la valeur nominale de l'effet et une durée allant du jour de la négociation jusqu'au jour de l'échéance; c'est la méthode appliquée en pratique.
Soit,
V : la valeur nominale de l'effet, c'est la valeur de l'effet à son échéance
t : taux d'escompte
n : durée de l'escompte, c'est le nombre de jours séparant la date de négociation de l'effet de sa date d'échéance.
e : l'escompte commercial
a : la valeur actuelle commerciale

on a : $\boxed{e = \dfrac{V.t.n}{36000}}$

et $a = V - e$

Calcul de la valeur actuelle (a) en fonction de la valeur nominale (V)

a= V - e

$$a = V - \frac{V.t.n}{36000}$$

$$a = V\left(1 - \frac{t.n}{36000}\right)$$

$$\boxed{a = V\left(\frac{36000 - t.n}{36000}\right)}$$

Calcul de l'escompte (e) et de la valeur actuelle (a) en fonction du diviseur (D)

Si on note par D = diviseur = $\frac{36000}{t}$

On aura $\boxed{e = \frac{V.n}{D}}$

a = V – e

$$a = V - \frac{V.n}{D}$$

$$\boxed{a = \frac{V(D - n)}{D}}$$

6.4.2. L'escompte rationnel

C'est l'intérêt calculé sur la somme effectivement prêtée par la banque : la valeur actuelle rationnelle. Cette valeur augmentée des intérêts, calculés en fonction de cette valeur et du nombre de jours couru de la négociation à l'échéance de l'effet, devient égale à la valeur nominale.

Soit,

e' : escompte rationnel
a' : valeur actuelle rationnelle
V : valeur nominale de l'effet
t : taux d'escompte
n : durée de l'escompte

$$\boxed{e' = \frac{a'.t.n}{36000}}$$

Calcul de la valeur actuelle rationnelle (a') en fonction de la valeur nominale (V)

On a : V = a' + e'

$$V = a' + \frac{a'.t.n}{36000}$$

$$V = a'\left(1 + \frac{t.n}{36000}\right)$$

D'où : $V = a'\left(\frac{36000 + t.n}{36000}\right)$

$$\boxed{a' = \frac{36000 . V}{36000 + t.n}}$$

<u>Calcul de l'escompte rationne (e') et de la valeur actuelle rationnelle (a') en fonction du diviseur (D)</u>

$$\boxed{e' = \frac{a'.n}{D}}$$

V = a' + e'

$$V = a' + \frac{a'.n}{D}$$

$$V = a'\left(1 + \frac{n}{D}\right)$$

$$V = a'\left(\frac{D + n}{D}\right)$$

$$\boxed{a' = \frac{V.D}{D + n}}$$

Si on calcule l'escompte rationnel e' en fonction de la valeur nominale V on aura :

$$e' = \frac{a'.t.n}{36000}$$

$$e' = \frac{\frac{36000.\ V}{36000 + t.n}.t.n}{36000}$$

$$e' = \frac{V.t.n}{36000 + t.n}$$

Ou $\boxed{e' = \frac{V.n}{D + n}}$

6.4.3. <u>Date d'équivalence</u>

Soit deux effets de sommes différentes et d'échéances différentes escomptés au même taux. On dit que ces deux effets sont équivalents à une date déterminée, lorsque à cette date les deux effets ont la même valeur actuelle.

Effet 1 = E 1 $\xrightarrow{\text{Échéance}}$ x jours

Effet 2 = E 2 $\xrightarrow{\text{Échéance}}$ (x + m) jours

La date d'équivalence est déterminée à partir de l'égalité suivante : $a_1 = a_2$

En utilisant la formule de a en fonction du diviseur, on aura :

$$\frac{V_1\,(D-x)}{D}=\frac{V_2\,(D-x-m)}{D}$$

$$V_1\,(D-x)=V_2\,(D-x-m)$$

$$x\,(V_2-V_1)=D\,(V_2-V_1)-m.\,V_2$$

$$x=\frac{D\,(V_2-V_1)}{(V_2-V_1)}-\frac{m.\,V_2}{(V_2-V_1)}$$

$$\boxed{x=D-\frac{m.\,V_2}{V_2-V_1}}$$

<u>Remarques</u>:

- La date d'équivalence de deux effets, dans le cas ou elle existe, est antérieure à la date d'échéance la plus proche.
- La date d'équivalence doit être postérieure aux dates à partir desquelles les deux effets ont été créés.
- Deux effets ne peuvent être équivalents qu'à une seule date.

<u>Exemple</u>:
Soit,
- E 1 : effet de commerce de valeur nominale 9840 dinars à échéance 31 octobre.
- E 2 : effet de commerce de valeur nominale 9900 dinars à échéance 30 Novembre.

Ils sont négociés au taux de 7,2 % .
Déterminer la date d'équivalence des deux effets.

x + 30 jours

x

Date d'équivalence 31 Oct 30 Nov

A la date d'équivalence cherchée, les valeurs actuelles commerciales des deux effets sont égales.

On sait que : $a=V-\frac{V.t.n}{36000}$

On aura donc: $9840-\frac{9840.7{,}2.x}{36000}=9900-\frac{9900.7{,}2.(x+30)}{36000}$

x = 50 jours

La date d'équivalence cherchée se situe 50 jours avant le 31 octobre soit au 11 Septembre.

6.4.4. <u>Renouvellement d'un effet</u>

Soit un effet principal de valeur V_1 d'échéance E_1, qu'on veut remplacer par un autre effet de valeur V_2 et d'échéance E_2. Le taux d'intérêt est égal à t.

On sait que l'effet de remplacement devrait avoir la même valeur actuelle que l'ancien effet c'est à dire $a_1 = a_2$

Deux cas sont possibles :

- L'échéance de l'effet de remplacement E_2 étant fixée, donc n_2 connu. On doit alors chercher la valeur V_2 de l'effet de remplacement :

  $$V_1(D-n_1)=V_2(D-n_2)$$

  Donc $$\boxed{V_2=\frac{V_1(D-n_1)}{(D-n_2)}}$$

- La valeur de l'effet de remplacement V_2 étant connu, on doit donc chercher l'échéance E_2 et par conséquent n_2.

  $V_1\ (D - n_1) = V_2\ (D - n_2)$

  $V_1.D - V_1.n_1 = V_2.D - V_2.n_2$

  $D\ (V_2 - V_1) + V_1.n_1 = V_2.n_2$

  $$\boxed{n_2=\frac{D\,(V_2-V_1)+V_1.n_1}{V_2}}$$

6.4.5. Echéance moyenne de deux ou plusieurs effets

On appelle échéance moyenne, la date à laquelle plusieurs effets à échéances différentes escomptés au même taux, peuvent être remplacés par un seul effet, qui leur soit équivalent et dont la valeur est la somme des valeurs nominales des effets donnés.

A une date donnée, la valeur actuelle de l'effet de remplacement est égale à la somme des valeurs actuelles des différents effets.

$$a=\sum a_i$$

$$\frac{V.(D-n)}{D}=\frac{\sum V_i(D-n_i)}{D}$$

$$V.D-V.n=\sum V_i\,(D-n_i)$$

or $V=\sum V_i$

Donc $$\boxed{n=\frac{\sum V_i.n_i}{\sum V_i}}$$

6.4.6. Le coût de l'escompte

Le coût de l'escompte est constitué par l'ensemble des prélèvements effectués par le banquier, il comprend :

- L'escompte (e): $e=\dfrac{\sum V_i.t_i.n_i}{36000}$ pour i effets.
- Les commissions (c): la banque centrale autorise les banques à retenir des commissions sur l'escompte des effets de commerce. Ces commissions peuvent être fixes ou variables en fonction de la valeur de l'effet.
- La taxe sur la valeur ajoutée (TVA): les commissions sont soumises à la taxe sur la valeur ajoutée au taux de 18 %.

Ainsi, on peut définir le taux de revient de l'escompte T_R qui, appliqué à la valeur nette reçu à la suite de l'opération d'escompte pour une durée n, donne le coût de l'escompte :

$$\text{Coût de l'escompte} = \frac{\text{valeur nette} \;.\; T_R \;.\; n}{36000}$$

$$e + c + TVA = \frac{\text{valeur nette} \;.\; T_R \;.\; n}{36000}$$

D'où $T_R = \dfrac{36000.\,(e + c + TVA)}{\text{valeur nette}\,.\; n}$

<u>Remarque</u> :
Le taux réel de l'escompte (T) est différent du taux de revient de l'escompte puisqu'il se calcul en employant la valeur nominale de l'effet à la place de la valeur nette.

EXERCICES ET PROBLEMES

INTERET SIMPLE

Exercice 1

Un capital de 2000 dinars est placé à intérêt simple au taux annuel de 9% du 05 janvier 1999 au 02 mai 1999 produit un intérêt égal à I dinars. La valeur acquise du même capital, à la suite d'un placement au taux d'intérêt t% du 18 septembre 1999 au 01 mars 2000, s'élève à 2068,750 dinars. Calculer I et t.

Exercice 2

Un capital de 50000 dinars est placé à intérêt simple, au taux annuel t%.Au bout de deux ans, la somme totale est récupérée et placée de nouveau à intérêt simple, pendant trois ans, au taux annuel (t+3)%. La valeur acquise par ce nouveau placement s'élève à 68200 dinars.

1) Calculer le taux d'intérêt t.
2) Déterminer le taux moyen de placement.
3) Trouver la durée moyenne de placement. Interpréter les résultats obtenus.

Exercice 3

Un organisme financier vous propose pour six mois, les deux types de placement suivants :

- ✓ Placement A : Intérêt simple post-compté au taux annuel de 5%.
- ✓ Placement B : Intérêt simple précompté au taux annuel de 4,9%.

Quel type de placement est à choisir ?

Exercice 4

Une personne obtient un prêt de x dinars remboursable en quatre versements trimestriels en progression arithmétique. Le premier versement d'un montant de 5600 dinars aura lieu dans trois mois.

Sachant que le total des versements effectués s'élève à 21500 dinars et que chaque versement se compose :

- Du quart du montant prêté ;
- Et, de l'intérêt simple relatif au trimestre en question, calculé sur la base du capital restant du au début du trimestre.

1) Calculer le montant de chaque versement.
2) Calculer le montant du prêt (x) et le taux d'intérêt (t).

Exercice 5

Un capital est partagé en trois parts dont les montants sont en progression arithmétique, la première part étant égale à 70% de la troisième. On place ces trois parts à des taux respectifs t_1, t_2, t_3 en progression géométrique dont la somme est de 36,4%. Les revenus annuels des deux premières parts sont respectivement égaux à 84 dinars et 85 dinars.

1) Calculer les trois taux de placement et les trois capitaux.
2) Calculer le taux moyen de placement.

Exercice 6

Le 31 mars 2004, une personne dépose dans un compte d'épargne, qu'elle vient d'ouvrir, une somme égale à 2000 dinars. De cette date jusqu'à la fin de l'année, elle a effectué les opérations suivantes:

23/04/04	Retrait	300 dinars
13/05/04	Virement ordonné	450 dinars
09/07/04	Versement chèque	1500 dinars
16/07/04	Versement espèces	X dinars ? à déterminer
17/08/04	Retrait	450 dinars

L'évolution du taux d'épargne durant l'année 2004 est la suivante:

Janvier, février, mars	3,150 %.
Avril, mai, juin	3,125 %.
Juillet, août, septembre	3 %
Octobre, novembre, décembre	3,125 %

Le solde du compte au 31/12/2004 est de 2598,196 dinars.

1) Calculer le montant du versement du 16/07/2004.
2) Arrêter le décompte des intérêts à la date du 31/12/2004.

Exercice 7

Le 01 juillet 2003, le solde du compte courant de la société ABZ s'élève à 5000 dinars. Au cours du troisième trimestre de l'année 2003, les mouvements recensés dans le tableau suivant ont été réalisés :

Date	Opération	Montant en dinars
08/07/2003	Virement effectué par la société	8000
10/07/2003	Remise de chèque à l'encaissement	10000
04/08/2003	Effet domicilié	27000
07/08/2003	Versement chèque	10000
18/08/2003	Retrait en espèces	25000
18/08/2003	Versement chèque	36000
03/09/2003	Effet domicilié	9000
15/09/2003	Virement ordonné par la société	3000
18/09/2003	Versement en espèces	10000
29/09/2003	Versement en espèces	13000
30/09/2003	Effet domicilié	6000

1) En ignorant les jours de banque, calculer le montant des agios débiteurs et les diverses commissions au 30/09/2003 en fonction des données suivantes :
   - Taux du découvert = T.M.M. (5%) augmenté de 4%.
   - Commission de plus fort découvert (C.P.F.D.) = 0,05%.
   - Commission de mouvement portant sur la totalité des mouvements débiteurs = 0,025%.
   - Les mouvements créditeurs ne sont pas rémunérés.
2) Calculer le coût réel du découvert.

Réponses :

Exercice 1 : I = 58,500 dinars ; t = 7,5%.

Exercice 2 : 1) t = 5%
2) T = 6,868%
3) N = 2 ans, 7 mois et 19 jours ou 20 jours.

Exercice 3 : B

Exercice 4 : 1) V_1 = 5600 dinars ; V_2 = 5450 dinars ; V_3 = 5300 dinars
et V_4 = 5150 dinars.
2) x = 20 000 dinars ; t = 12%.

Exercice 5 : 1) t_1 = 14,4% ; t_2 = 12% ; t_3 = 10% ;
C_1= 583,333 dinars ; C_2 = 708, 333 dinars et C_3 = 833,333 dinars.
2) T = 11,87%.

Exercice 6 : 1) X = 250 dinars
2) Voir cours, paragraphe 6.1.

Exercice 7 : 1) Agios débiteurs = 79 dinars ; commissions = 36,500 dinars.
2) 13,158%.

◈ ***INTERET COMPOSE***

Exercice 1

Un investisseur place 5000 dinars pendant 5 ans à intérêt composé, au taux annuel de 4,5%.

1) Calculer l'intérêt produit par ce placement à la fin de la première année.
2) Calculer la valeur acquise par ce capital au bout des cinq ans de placement.
3) Calculer l'intérêt total produit par ce placement au bout des cinq années.

Exercice 2

On place aujourd'hui 4000 dinars à intérêt composé au taux annuel de 5,2%. Au terme du placement, on dispose de 6000 dinars.

1) Déterminer la durée du placement, n.
2) Calculer l'intérêt de l'année (n–2).
3) Calculer l'intérêt total produit au bout de (n –2) années de placement.
4) Déterminer la valeur acquise par ce capital au bout de (n–2) années de placement.

Exercice 3

Deux capitaux placés pendant trois ans, le premier à intérêt simple au taux de 7% et le second à intérêt composé au taux de 10%. Le premier capital étant supérieur au second de 500 dinars, a acquis la même valeur que celle du second capital.

Calculer les montants des deux capitaux.

Exercice 4

Un investisseur souscrit un bon de capitalisation de 10000 dinars dont les intérêts sont composés annuellement. Le taux d'intérêt est de 5,5% les 4 premières années, 5,8% les 3 années suivantes et 7% les 3 dernières années.

1) Calculer la valeur acquise par le bon de capitalisation, au bout de 10 ans.

2) Déterminer le taux d'intérêt annuel moyen pour l'ensemble des 10 années de placement.

Exercice 5

Une personne place à intérêt composé une somme de 20000 dinars à un taux d'intérêt annuel i et une somme de 50000 dinars à un taux d'intérêt annuel i'. Après quatre ans, elle dispose d'une somme totale égale à 109199,130 TND.

Si le capital de 20000 dinars était placé au taux d'intérêt i' et le capital de 50000 dinars était placé au taux d'intérêt i, alors la somme des deux valeurs acquises devient 112159,560 dinars.

Calculer les deux taux d'intérêt i et i'.

Exercice 6

Monsieur A dispose aujourd'hui de 44650 dinars qu'il désire partager entre ses quatre enfants âgés respectivement de 8, 10, 12 et 14 ans. Ces parts sont placées à intérêt composé au taux annuel de 5%.

Calculer les quatre parts sachant que monsieur A souhaite que chacun de ses enfants reçoive la même somme d'argent à l'âge de 18 ans.

Exercice 7
Une personne dépose dans un compte productif d'intérêts composés la somme de 10000 dinars. Un an après, elle retire 10 000 dinars. Un an après ce retrait, elle dispose de 806,250 dinars.
Calculer le taux d'intérêt annuel.

Exercice 8
Un capital de 300 000 dinars placé dans une banque rapporte des intérêts semestriels de 12000 dinars.
1) Quel est le taux annuel équivalent de ce placement ?
2) Si ce capital a été placé au taux annuel de 7 %, quel est le montant des intérêts trimestriels versés ? (taux équivalent).
3) Si le taux annuel annoncé par la banque est de 9 % et qu'en réalité les intérêts sont versés mensuellement au taux proportionnel, quel est le taux annuel équivalent ?

Exercice 9
Deux capitaux C_1 et C_2 dont le montant total s'élève à 80 000 dinars sont placés le même jour pour une durée de 6 ans, à intérêt composé
Le capital C_1 est placé au taux annuel de 8 %, capitalisation annuelle des intérêts. Le capital C_2 est placé au taux semestriel de 3,75 %, capitalisation semestrielle des intérêts. Au bout des 6 ans, le total des intérêts produits s'élève à 46 007,320 dinars.
Calculer C_1 et C_2

Exercice 10
Trois capitaux en progression arithmétique de raison r = 100, sont placés à intérêt composé pendant trois ans, aux conditions suivantes:
- ✓ Premier capital: taux annuel 10 %, capitalisation annuelle des intérêts.
- ✓ Deuxième capital: taux semestriel 5 %, capitalisation semestrielle des intérêts.
- ✓ Troisième capital: taux trimestriel 2,5 %, capitalisation trimestrielle des intérêts.

1) Au bout de 3 années de placement, les intérêts produits par les deux premiers capitaux présentent une différence de 406,890 dinars. Calculer la valeur de chacun des trois capitaux.
2) Calculer la différence entre les intérêts produits par le deuxième et le troisième capital
3) A quel taux d'intérêt simple le premier capital devrait-il être placé pour que, après 3 années de placement, la valeur acquise à intérêt simple soit égale à la valeur acquise à intérêt composé ? (taux intérêt composé = 10%).
4) Au bout de combien de temps le premier capital placé à intérêt simple aux taux de 10 % donnerait-il une valeur acquise égale à la valeur acquise du même capital placé à intérêt composé au même taux annuel de 10% pendant 3 ans ?

Exercice 11
Une personne dépose le 01/10/1999, dans un compte productif d'intérêts composés, la somme de 1000 dinars au taux d'intérêt i. Le 01/01/2001, elle consulte son solde qui équivaut à 1072 TND puis elle verse la somme de 190 dinars. Le 01/07/2002, elle retire du capital acquis la somme de 50 dinars. Le 01/10/2003, elle dispose d'une somme totale, capital et intérêts réunis, qui s'élève à 1398,317 dinars.

1) Sachant que le taux d'intérêt de toute la période considérée a baissé, le 01/10/2000 de 0,4% et le 01/10/2002 de 0,5%, déterminer le taux trimestriel équivalent de ce placement.
2) Quelle somme devrait retirer cette personne le 01/07/2002 pour que le solde de son compte au 01/10/2003 soit égal à 1410 dinars ?

Réponses :

Exercice 1 : 1) I_1 = 225 dinars.
2) C_5 = 6 230,91 dinars.
3) $\sum_{i=1}^{5} I_i = 1230{,}91$ dinars.

Exercice 2 : 1) n =8ans.
2) I_6 = 268 dinars.
3) $\sum_{i=1}^{6} I_i = 1421{,}936$ dinars.
4) C_6 = 5421,936 dinars.

Exercice 3 : C_1 = 5 500 dinars ; C_2 = 5 000 dinars.

Exercice 4 : 1) C_{10} = 17 972,9 dinars.
2) i = 6,038%.

Exercice 5 : i = 13% ; i' = 11,25%.

Exercice 6: C_1 = 9 585,5 dinars, C_2 = 10 568,014 dinars, C_3 = 11 651,035 dinars et C_4 = 12 845,487 dinars.

Exercice 7 : i = 7,5%.

Exercice 8 : 1) i_a = 8,16%
2) I = 5 117,56 dinars.
3) i_a = 9,38%

Exercice 9 : C_1 = 50 000 dinars ; C_2 = 30 000 dinars.

Exercice 10 : 1) C_1 = 40 996,563 dinars ; C_2 = 41 096,563 dinars et C_3 = 41 196,563 dinars.
2) $I_3 - I_2$ = 231,472 dinars.
3) t = 11,03%.
4) n = 3 ans, 3 mois et 21 ou 22 jours.

Exercice 11 : 1) i_t = 1,42%.
2) Retrait = 39 dinars.

L'ESCOMPTE

Exercice 1

Un banquier octroie 9% d'escompte commercial sur des effets de commerce remis à l'escompte. Calculer les valeurs nominales de ces effets si le client reçoit :

1) 3500000 dinars pour 45 jours.
2) 2274000 dinars pour 7 mois.
3) 2200000 dinars pour la période allant du 06 septembre au 30 décembre.

Exercice 2

Monsieur X prête 10000 dinars à monsieur Y pour une période de 9 mois, à un taux de 10%. Après trois mois, monsieur X a besoin de liquidité et décide d'escompter l'effet de commerce à la banque au taux de 14%.

1) Déterminer le montant de l'escompte commercial et le montant remis à monsieur X par la banque.
2) Déterminer la valeur actuelle rationnelle et le montant de l'escompte rationnel. Comparer les résultats obtenus à ceux de 1). Commenter
3) Déterminer le taux de revient de l'escompte (T_R) pour monsieur X.

Exercice 3

Monsieur Z s'adresse à un concessionnaire de voitures pour acheter un véhicule d'une valeur de 9420 dinars. Le concessionnaire lui propose la modalité de règlement suivante : versement de 3000 dinars le jour de l'achat et le reste en douze effets de commerce mensuels de 600 dinars chacun, le premier venant à échéance un mois après l'achat.

1) Déterminer le taux de crédit accordé à l'acheteur par le concessionnaire.
2) Monsieur Z propose de verser 3000 dinars le jour de l'achat et de remplacer les douze effets par un règlement unique de 7200 dinars. En considérant les mêmes conditions de taux, déterminer quant est-ce que ce règlement devrait avoir lieu.
3) Finalement, la modalité suivante est retenue : versement de 4680 dinars le jour de l'achat et paiement du solde par trois règlements dont les montants seront en progression géométrique de raison 2 et tel que le premier règlement interviendra dans 4 mois, le deuxième dans 8 mois et le troisième dans 12 mois. En considérant un taux de 12%, calculer le montant de chacun de ces trois règlements.

Exercice 4

Le 15 avril, trois effets de commerce sont présentés à l'escompte, chez le même banquier, au même taux. La banque remet la même somme nette pour chacun des trois effets.
Sachant que le premier effet a pour nominal V_1 = 600 dinars, que le deuxième effet a pour nominal V_2 = 596 dinars et une échéance le 26 juin et que le troisième effet a pour nominal V_3 = 591,150 dinars et échéant dans 13 jours, on vous demande de déterminer :

1) Le taux d'escompte t et la somme remise par la banque pour chacun des trois effets. Arrondir vos résultats à l'unité la plus proche.
2) La date d'échéance du premier effet.
3) La date d'échéance moyenne.
4) La date d'échéance d'un effet unique de remplacement de nominal V = 1791,650 dinars.

Exercice 5

Le 28 octobre, une entreprise présente à l'escompte à intérêt simple au même taux, les effets suivants :

Effet	Montant (dinars)	Date d'échéance
N°1	Y	02 Novembre
N°2	2 X	12 Novembre
N°3	X	17 Novembre
N°4	2 Y	02 Décembre

La somme des valeurs nominales des quatre effets s'élève à 15600 dinars et leur échéance moyenne est le 17 novembre.

1) Déterminer les valeurs nominales des quatre effets.
2) On remplace les effets n° 2 et n° 4 par un effet unique A de valeur nominale V_A, montrer alors que $V_A = \frac{e \times e'}{e - e'}$ tels que e représente l'escompte commercial et e' l'escompte rationnel relatifs à l'effet de remplacement. En déduire V_A si l'escompte commercial s'élève à 121,275 dinars et l'escompte rationnel s'élève à 120,273 dinars (arrondir le résultat à l'unité la plus proche).
3) On remplace les effets n° 1 et n° 3 par un effet unique B ayant une valeur nominale égale à 5200 dinars et une date d'échéance antérieure à celle de l'effet A de 11 jours. Déterminer la date d'échéance de l'effet de remplacement B et le taux d'escompte (arrondir les résultats à l'unité la plus proche).

Exercice 6 (MASEIRI W., *Mathématiques financières*, Sirey, 1997)

Trois effets de commerce de même valeur nominale, ont le jour de leur remplacement, respectivement n, p et q jours à courir.

1) Sachant que les nombres n, p et q sont en progression géométrique, vérifier la relation suivante : $(n+p+q)(n-p+q) = n^2 + p^2 + q^2$.
2) Sachant en outre que n, p et q sont écrits dans un ordre croissant, que leur somme est égale à 104 jours et la somme de leurs carrés s'élève à 5824, calculer n, p et q.
3) Quelle est la valeur nominale commune des trois effets si la somme de leurs valeurs actuelles est égale à 80376 dinars ? Taux d'escompte = 8%.

Exercice 7

Deux établissements bancaires proposent les conditions d'escompte suivantes :

	Taux de l'escompte (t)	Taux de commission proportionnelle à la durée (t')	Taux de commission indépendante de la durée (k)
Banque A	9,3	0,6	0,5
Banque B	9,9	0,6	0,4

Un effet de valeur nominale V et échéant dans n jours est remis à l'escompte.

1) Déterminer l'expression du taux réel d'escompte en fonction de t, t', k et n.
2) Calculer le taux réel d'escompte des deux banques.
3) Indiquer, suivant les valeurs de n, laquelle des deux banques consent les conditions d'escompte les plus favorables.

Exercice 8

Un effet d'une valeur nominale V = 8000 dinars échéant le 11 novembre 2003 est présenté à l'escompte le 17 octobre 2003 aux conditions suivantes :

- Taux d'escompte : 15%,
- Taux d'endos : 0,5%,
- Commission fixe : 12 dinars par effet,
- Commission indépendante du temps : 0,1%,
- Nombre de jours de banque : 2 jours.

1) Compte non tenu de la taxe sur la valeur ajoutée, déterminer l'agio et le montant net du bordereau d'escompte sachant que la commission d'endos est dépendante de la durée.
2) Calculer le taux réel de l'escompte (T).
3) Calculer le taux de revient de l'opération d'escompte (T_R).

Exercice 9

Soit le bordereau d'escompte suivant qui a été mal reproduit.

<table>
<tr><td colspan="8">Banque B
Bordereau des effets remis à l'escompte
Sfax 29 septembre 2003</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Numéros des effets</td><td rowspan="2">Lieux de paiement</td><td rowspan="2">Sommes</td><td rowspan="2">Echéances</td><td rowspan="2">Jours</td><td rowspan="2">Escompte</td><td colspan="2">Commissions d'encaissement</td></tr>
<tr><td>Taux (%)</td><td>Montant</td></tr>
<tr><td>1
2
3
4</td><td>Sfax
Sousse
Tunis
Nabeul</td><td>7260
3360
22920
…</td><td>…
13 octobre
29 octobre
…</td><td>12
…
…
…</td><td>21,780
…
…
…</td><td>Gratuit
…
0,05
…</td><td>Gratuit
6,720
…
…</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>…
329,820</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>20,660</td></tr>
<tr><td></td><td>Net</td><td>38170,180</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Escompte à …	…
Commission indépendante de la durée 0,1%	…
Commission d'encaissement	20,660
	329,820

Compte non tenu de la taxe sur la valeur ajoutée, compléter ce bordereau d'escompte sachant que le nombre de jours de banque est égal à 2 et que la commission d'encaissement est supposée indépendante de la durée.

Exercice 10

Le 14/06, on présente à l'escompte deux effets de valeurs nominales V_1 et V_2, et d'échéance respectives le 16/08 et le 31/08, au taux d'escompte t. L'escompte commercial des deux effets est de 313,500 dinars alors que leur escompte rationnel s'élève à 306,3073125 dinars. Si l'échéance de V_1 est le 31/08 alors que celle de V_2 est le 16/08, la somme de leur escompte commercial devient 321 dinars.

1) Trouver t, V_1 et V_2.
2) Déterminer l'échéance moyenne des deux effets.

3) On remplace les deux effets par un effet unique d'échéance le 09/09. Trouver la valeur nominale de cet effet.
4) Les deux effets sont escomptés par une banque qui retient un taux d'escompte de 12,5%, un taux des commissions dépendantes du temps de 0,5 %. Un taux des commissions indépendantes du temps de 0,25%. Le taux d'impôt est de 20%. Le montant net du bordereau est de 13102,525 dinars. Trouver le nombre de jours de banque.

Réponses

Exercice 1 : 1) V_1 = 3 539 823 dinars.
2) V_2 = 2 400 000 dinars.
3) V_3 = 2 265 122,265 dinars.

Exercice 2 : 1) e = 752,500 dinars ; a = 9 997,500 dinars.
2) a' = 10 046,729 dinars ; e' = 703,271 dinars.
3) T_R = 15,05%.

Exercice 3 : 1) t = 20%.
2) 6,5 mois après le jour de l'achat.
3) R_4 = 750 dinars ; R_8 = 1 500 dinars et R_{12} = 3 000 dinars.

Exercice 4 : 1) t = 5% ; a = 590 dinars.
2) 13 août
3) 22 juin ou 23 juin.
4) 11 juillet.

Exercice 5 : 1) V_1 = 2 080 dinars ; V_2 = 6 240 dinars ; V_3 = 3 120 dinars ; V_4 = 4 160 dinars.
2) V_A = 14 557 dinars
3) Date d'échéance : 11 novembre; t = 12%.

Exercice 6 : 1)
2) n = 8 ; p = 24 et q = 72.
3) V = 27 000 dinars.

Exercice 7 : 1) $T = t + t' + \frac{360k}{n}$.
2) $T_A = 9{,}9 + \frac{180}{n}; T_B = 10{,}5 + \frac{144}{n}$.
3) Pour n > 60 jours : conditions d'escompte de A sont meilleures.
Pour n = 60 jours : mêmes conditions d'escompte de A et de B.
Pour n < 60 jours : conditions d'escompte de B sont meilleures.

Exercice 8 : 1) Agio = 113 dinars ; montant net = 7 887 dinars.
2) T = 20,34%.
3) T_R = 20,63%.

Exercice 9 :

Banque B Bordereau des effets remis à l'escompte Sfax 29 septembre 2003							
Numéros des effets	Lieux de paiement	Sommes	Echéances	Jours	Escompte	Commissions d'encaissement	
						Taux (%)	Montant
1	Sfax	7 260	9 octobre	12	21,780	Gratuit	Gratuit
2	Sousse	3 360	13 octobre	16	13,440	0,2	6,720
3	Tunis	22 920	29 octobre	32	183,360	0,05	11,460
4	Nabeul	4960	8 novembre	42	52,080	0,05	2,480
		38 500					20,660
		329,820					
	Net	38 170,180					

Escompte à 9%	270,660
Commission indépendante de la durée 0,1%	38,500
Commission d'encaissement	20,660
	329,820

Exercice 10 : 1) $t = 12\%$; $V_1 = 7\,500$ dinars et $V_2 = 6\,000$ dinars.
2) 22 août ou 23 août.
3) $V = 13\,580{,}329$ TND.
4) 3 jours de banque.

EXTRAITS DES SUJETS D'EXAMENS

EXAMEN GESTION FINANCIERE SESSION PRINCIPALE 2002/2003

Exercice 1 :
Un capital C est placé à intérêts composés pendant 10 ans au taux i. On désigne par C_n la valeur acquise par C à la fin de l'année n.
Calculer C et i sachant que :
$C + C_5 = 240{,}260$ dinars et $C_2 + C_7 = 275{,}070$ dinars.

Exercice 2 :
Le livret d'épargne de Monsieur Z ouvert auprès de la banque A présente au 31/12/01 un solde égal 500 dinars. Les opérations effectuées par monsieur Z au cours de l'année 2002 sont les suivantes :

Date	Nature de l'opération	Montant (dinars)
06 janvier	Retrait en espèces	120
12 janvier	Versement chèque	60
14 janvier	Retrait en espèces	20
31 mars	Remise de chèque à l'encaissement	X à déterminer
03 juillet	Versement en espèces	180
18 novembre	Effet domicilié	Y à déterminer

L'évolution du TRE se présente comme suit :
Septembre, Octobre, Novembre 2001 = 6,5 %
Décembre 2001 = 6,2 %
Janvier, Février, Mars 2002 = 6 %
De avril 2002 jusqu'à décembre 2002 = 5,7 %

Calculer X et Y sachant que :

- L'année 2002 n'est pas bissextile.
- Le montant net des intérêts fournis par ce compte à la fin de 2002 s'élève à 36,420 dinars.

Le solde du compte au 31/12/2002 après enregistrement des intérêts est égal à 756,420 dinars.

Réponses :

Exercice 1 : C = 100 dinars; i = 7%.

Exercice 2 : (Attention ! il faut employer les anciennes règles de fonctionnement, avant la circulaire B.C.T. n°2003-10) X = 420 dinars ; Y = 300 dinars.

EXAMEN GESTION FINANCIERE DEUXIEME SESSION 2002/2003

Exercice 1 :
Un opérateur doit choisir entre trois types de contrats à intérêt composé pour emprunter 1000000 dinars sur 5 ans :

a/ 1,5 % par trimestre.

b/ 0,55 % par mois.

c/ 10 % la première année puis 4 % par an, les années suivantes.

1) Calculer le taux d'intérêt annuel relatif à chaque contrat.
2) Quel contrat devrait-il choisir ?

Exercice 2 :
Une personne possédant 30 000 dinars désire consacrer une partie de cette somme à l'acquisition d'un terrain. Le reste de son capital est placé pendant 9 mois comme suit :

- $\frac{2}{3}$ sous forme de bons de caisse au taux d'intérêt égal à 10 % par an ;
- $\frac{1}{3}$ est versé dans un compte d'épargne au taux d'intérêt égal à 6,5 % par an.

Admettant qu'il a été convenu que les intérêts à servir sur les bons de caisse seront à terme échu. Sachant, en outre, que le montant net des intérêts procurés par les deux placements s'élève à 236 dinars.
Calculer le prix d'acquisition du terrain.

Réponses :

Exercice 1 : 1) $i_a^{(a)} = 6{,}136\%; i_a^{(b)} = 6{,}803\%; i_a^{(c)} = 5{,}173\%$
2) c.

Exercice 2 : Prix terrain = 25 500 dinars.

EXAMEN GESTION FINANCIERE SESSION PRINCIPALE 2003/2004

Exercice

L'entreprise X établit ses besoins de trésorerie, pour la période allant du 31 octobre 2003 au 31 décembre 2003, de la manière suivante :

- Pour le mois de novembre : 6000 dinars ;
- Pour le mois de décembre : 4000 dinars.

Pour couvrir ses besoins, cette entreprise hésite entre l'escompte et le crédit pour caisse. En effet, elle dispose d'un effet de commerce sur l'un de ses clients, d'une valeur nominale égale à 10000 dinars et échéant le 31 décembre 2003, qu'elle pourrait escompter ou conserver en vue de rembourser le crédit pour caisse.

Le T.M.M. vaut 5%. Le taux d'escompte est de T.M.M. + 3%. La banque facture des commissions d'endos (dépendantes du temps) de 2,65%, une commission fixe de 7,239 dinars par effet remis à l'escompte et 2 jours de banque.

Quant au crédit pour caisse, le taux du découvert s'élève au taux d'escompte majoré de 2,8%. La commission du plus fort découvert est calculée mensuellement au taux de 0,05%.

Compte non tenu de la taxe sur la valeur ajoutée et sachant que la banque facture des commissions de manipulation de 1,840 dinars par effet remis à l'encaissement, on vous demande de :

1) Calculer les agios relatifs à l'opération d'escompte
2) Calculer le coût global du découvert.
3) Calculer le taux de revient de l'escompte et le coût réel du découvert.
4) Déterminer quel est le mode de financement le plus avantageux pour l'entreprise X.

Réponse :

1) Agios = 193,614 dinars.
2) Coût global du découvert = 98,040 dinars.
3) T_R = 11,652%. T_D = 11,61%.
4) Crédit pour caisse.

DEUXIEME CHAPITRE

LES ANNUITES

1. DEFINITION ET CARACTERISTIQUES

On appelle annuités une suite de flux monétaires perçus ou réglés à intervalles de temps égaux.

Le terme « annuité » est habituellement réservé à des périodicités annuelles. Lorsque la période est différente de l'année, il est préférable de remplacer le terme « annuité » par « semestrialité », « trimestrialité » ou « mensualité ».

L'étude des annuités consiste à déterminer la valeur actuelle ou la valeur acquise, à une date donnée, d'une suite de flux. Elle prend en considération la date du premier flux, la périodicité des flux, le nombre des flux et le montant de chaque flux.

Lorsque les annuités sont égales, on parle d'annuités constantes, alors que lorsque leur montant varie d'une période à une autre, on parle d'annuités variables.

Les annuités peuvent être perçues ou versées en début de période ou en fin de période.

Les annuités peuvent être certaines lorsque leur nombre est connu à l'avance, aléatoires ou viagères, lorsque leur nombre est inconnu au moment du contrat ou enfin perpétuelles lorsque leur nombre est illimité.

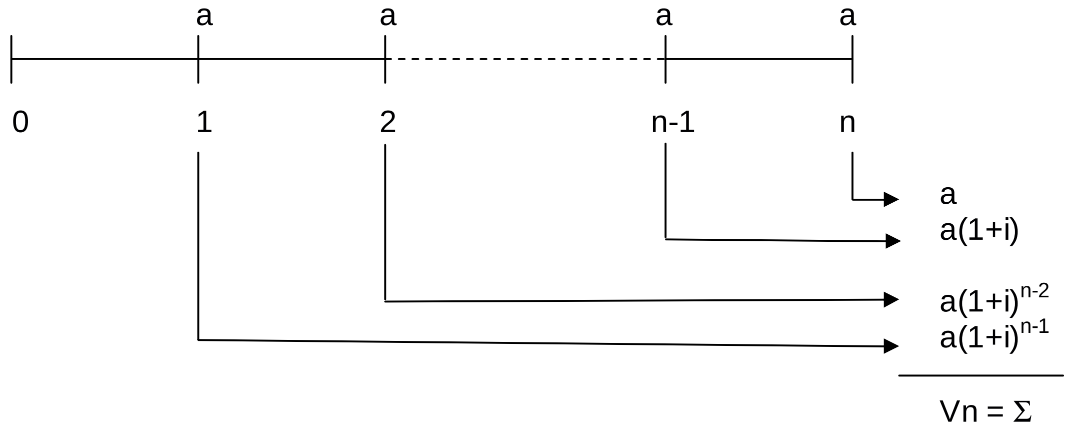
2. LES ANNUITES CONSTANTES

La valeur acquise ou la valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes dépend de la date de versement c'est à dire début de période ou fin de période.

2.1. Les annuités constantes de fin de période

2.1.1. La valeur acquise

On appelle valeur acquise par une suite d'annuités constantes de fin de période, la somme des annuités (V_n) exprimée immédiatement après le versement de la dernière annuité.



Si on note par:

- V_n : la valeur acquise par la suite des annuités
- a : l'annuité constante de fin de période
- n : le nombre de périodes (d'annuités)
- i : le taux d'intérêt par période de capitalisation

On a alors:

$$V_n = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + \ldots + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

$$V_n = a\,[\,1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\,]$$

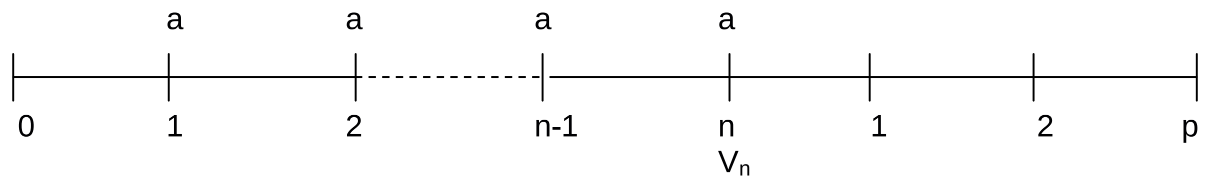
Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique q = (1+i) et comprenant n termes. La formule devient donc:

$$V_n = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$\boxed{V_n = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Le terme $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ est fourni par la table financière N°3

2.1.2. La valeur acquise exprimée p périodes après le dernier versement



Soit V_n^p la valeur acquise de la suite des annuités constantes de fin de période exprimée p périodes après le dernier versement.

$$V_n^p = V_n\,(1+i)^p$$

$$V_n^p = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^p$$

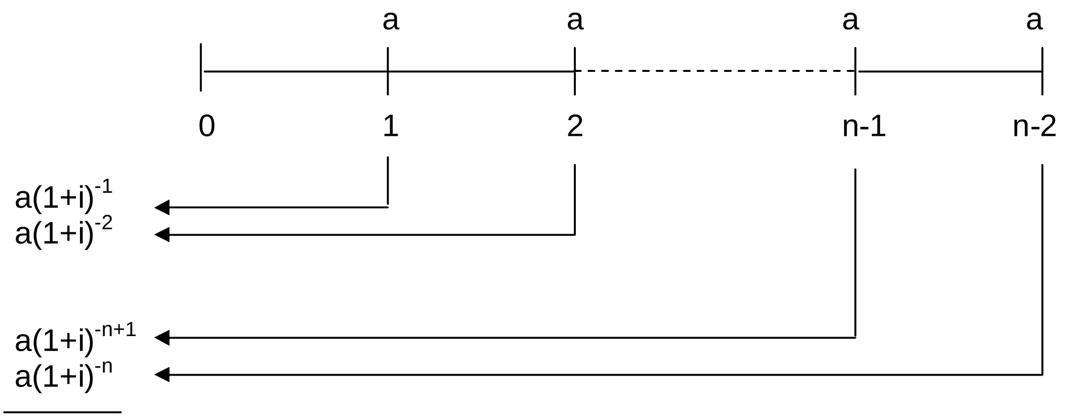
On peut donc écrire :

$$V_n^p = a\frac{(1+i)^{n+p} - (1+i)^p}{i}$$

$$\boxed{V_n^p = a\left[\frac{(1+i)^{n+p} - 1}{i} - \frac{(1+i)^p - 1}{i}\right]}$$

2.1.3. La valeur actuelle

On appelle valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de fin de période, la somme des annuités actualisées (V_0) exprimée à la date origine.



$V_0 = \Sigma$

Si on note par:

V_0 = la valeur actuelle par la suite des annuités
a = l'annuité constante de fin de période
n = le nombre de périodes (d'annuités)
i = le taux d'intérêt par période de capitalisation

Alors:

$V_0 = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \ldots\ldots + a(1+i)^{-n+1} + a(1+i)^{-n}$
$V_0 = a\,[\,(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots\ldots + (1+i)^{-n+1} + (1+i)^{-n}\,]$
$V_0 = a\,(1+i)^{-1}\,[\,1 + (1+i)^{-1} + \ldots\ldots + (1+i)^{-n+2} + (1+i)^{-n+1}\,]$

On a donc une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique $q = (1+i)^{-1}$ et comprenant n termes. La formule devient :

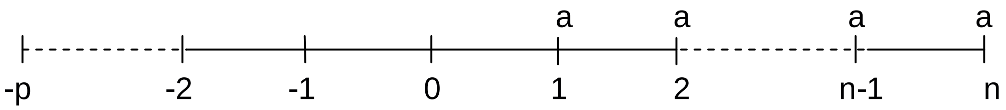
$$V_0 = a(1+i)^{-1}\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}$$

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{1+i-1}$$

$$\boxed{V_0 = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Le terme $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ est fourni par la table financière N°4

2.1.4. La valeur actuelle exprimée p période avant la date d'origine



$$V_0^p = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-p}$$

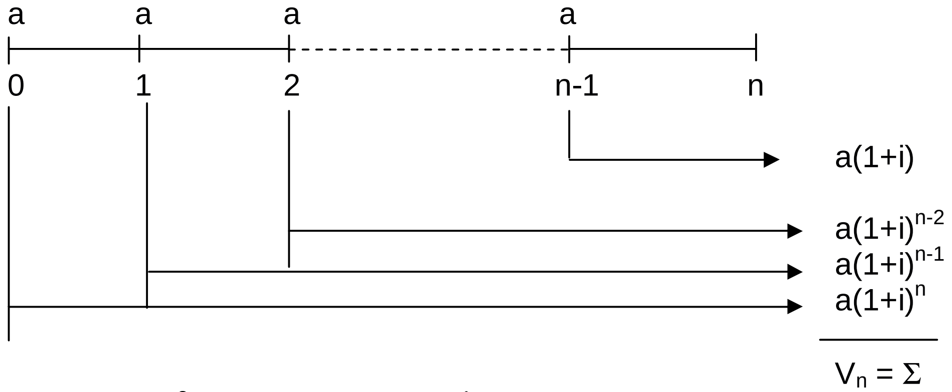
$$V_0^p = a\,\frac{(1+i)^{-p}-(1+i)^{-n-p}}{i}$$

$$\boxed{V_0^p = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n-p}}{i}-\frac{1-(1+i)^{-p}}{i}\right]}$$

2.2. Les annuités constantes de début de période

2.2.1. La valeur acquise

Si on considère que les flux sont versés en début de période, on obtient le graphique suivant:

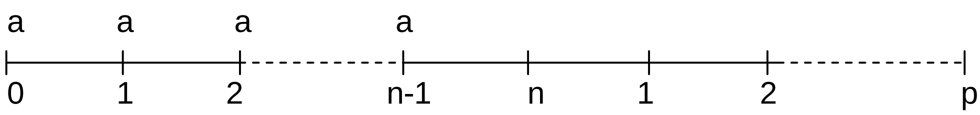


$V_n = a(1+i) + a(1+i)^2 + \dots\dots\dots + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^n$
$V_n = a(1+i)\,[\,1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\,]$
On a donc une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique q = (1+i) et comprenant n termes. La formule devient donc:

$$V_n = a(1+i)\,\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}$$

D'où : $\boxed{V_n = a(1+i)\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}}$

2.2.2. La valeur acquise exprimée p périodes après la date n



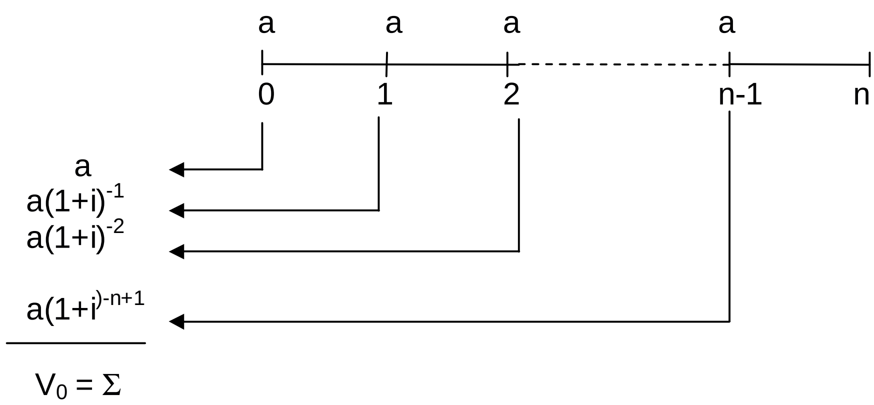
En se basant sur les mêmes principes que précédemment, on aura :

$$V_n^p = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^p$$

$$V_n^p = a\frac{(1+i)^{n+p+1} - (1+i)^{p+1}}{i}$$

$$\boxed{V_n^p = a\left[\frac{(1+i)^{n+p+1} - 1}{i} - \frac{(1+i)^{p+1} - 1}{i}\right]}$$

2.2.3. La valeur actuelle



$V_0 = a + a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \ldots\ldots + a(1+i)^{-n+1}$

$V_0 = a\,[\,1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots\ldots + (1+i)^{-n+1}]$

On a donc une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique $q = (1+i)^{-1}$ et comprenant n termes. La formule devient :

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}$$

$$V_0 = a\frac{(1+i)}{(1+i)}\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}$$

$$V_0 = a\,(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

2.2.4. La valeur actuelle exprimée p période avant la date d'origine

$$V_0^p = V_0\,(1+i)^{-p}$$

$$V_0^p = a\,(1+i)\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\,(1+i)^{-p}$$

$$V_0^p = a\,\frac{(1+i)^{1-p} - (1+i)^{1-n-p}}{i}$$

$$V_0^p = a\left[\frac{1-(1+i)^{1-n-p}}{i} - \frac{1-(1+i)^{1-p}}{i}\right]$$

3. LES ANNUITES VARIABLES
3.1. Les annuités quelconques
3.1.1. Les annuités quelconques de fin de période
3.1.1.1. La valeur acquise

Si on note par:

V_n = la valeur acquise par la suite des annuités.
a_p = l'annuité à la date p.
n = le nombre de périodes (d'annuités)
i = le taux d'intérêt par période de capitalisation

Alors:

$$V_n = a_n + a_{n-1}(1+i) + \ldots\ldots + a_2(1+i)^{n-2} + a_1(1+i)^{n-1}$$

$$V_n = \sum_{p=1}^{n} a_p\,(1+i)^{n-p}$$

3.1.1.2. La valeur actuelle

$$V_0 = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}(1+i)^{-n+1} + a_n(1+i)^{-n}$$

$$V_0 = \sum_{p=1}^{n} a_p\,(1+i)^{-p}$$

3.1.2. Les annuités quelconques de début de période

3.1.2.1. La valeur acquise

$$V_n = a_n\,(1+i) + a_{n-1}(1+i)^2 + \ldots\ldots + a_2\,(1+i)^{n-1} + a_1\,(1+i)^n$$

$$\boxed{V_n = \sum_{p=1}^{n} a_p\,(1+i)^{n-p+1}}$$

3.1.2.2. La valeur actuelle

$$V_0 = a_1 + a_2(1+i)^{-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}(1+i)^{-n+2} + a_n(1+i)^{-n+1}$$

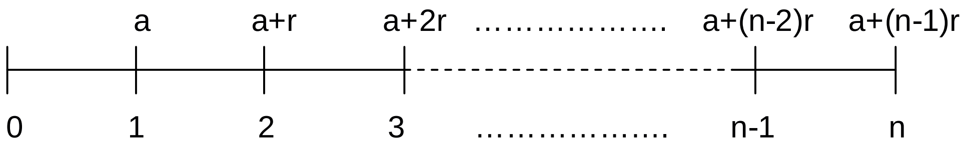
$$\boxed{V_0 = \sum_{p=1}^{n} a_p\,(1+i)^{-p+1}}$$

3.2. Les annuités en progression arithmétique

3.2.1. Les annuités de fin de période en progression arithmétique

3.2.1.1. La valeur acquise

Soit une progression arithmétique d'annuités de raison r représentée par le graphique suivant:



$$V_n = (a+(n-1)r) + (a+(n-2)r)(1+i) + \ldots\ldots + (a+2r)\,(1+i)^{n-3} + (a+r)\,(1+i)^{n-2} + a\,(1+i)^{n-1}$$

Ou encore,

$$V_n = \underbrace{[a + a(1+i) + \ldots. + a(1+i)^{n-3} + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}]}_{= a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$$+ \underbrace{[(n-1)r + (n-2)r(1+i) + \ldots.. + 2r(1+i)^{n-3} + r(1+i)^{n-2}]}_{S}$$

Calculons S

$$S = (n-1)r + (n-2)r\,(1+i) + \ldots\ldots.. + 2r\,(1+i)^{n-3} + r(1+i)^{n-2}$$

Calculons S(1+i)

$$S\,(1+i) = (n-1)r\,(1+i) + (n-2)r\,(1+i)^2 + \ldots\ldots. + 2r\,(1+i)^{n-2} + r(1+i)^{n-1}$$

Calculons S(1+i)-S

$$S(1+i)-S=\left[(n-1)r(1+i)+(n-2)r(1+i)^2+........+2r(1+i)^{n-2}+r(1+i)^{n-1}\right]$$
$$-\left[(n-1)r+(n-2)r(1+i)+........+2r(1+i)^{n-3}+r(1+i)^{n-2}\right]$$

$$S(1+i)-S=r(1+i)^{n-1}+r(1+i)^{n-2}+r(1+i)^{n-3}+.........+r(1+i)^2+r(1+i)-(n-1)r$$

$$=r(1+i)^{n-1}+r(1+i)^{n-2}+r(1+i)^{n-3}+.........+r(1+i)^2+r(1+i)+r-nr$$

$$=r\underbrace{\left[(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+(1+i)^{n-3}+.........+(1+i)^2+(1+i)+1\right]}_{=\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}}-nr$$

D 'où, $S(1+i)-S=r\dfrac{(1+i)^n-1}{i}-nr$

Ou encore, $Si=r\dfrac{(1+i)^n-1}{i}-nr$

Donc, $S=\dfrac{r}{i}\dfrac{(1+i)^n-1}{i}-\dfrac{nr}{i}$

Or, $V_n=a\dfrac{(1+i)^n-1}{i}+S$. On remplace S par son expression. On obtient:

$$V_n=a\frac{(1+i)^n-1}{i}+\frac{r}{i}\frac{(1+i)^n-1}{i}-\frac{nr}{i}$$

Donc, $\boxed{V_n=\left(a+\dfrac{r}{i}\right)\dfrac{(1+i)^n-1}{i}-\dfrac{nr}{i}}$

<u>Exemple</u>:

Calculer la valeur acquise d'une suite d'annuités de fin de période, en progression arithmétique dont les caractéristiques sont les suivantes:

a = 1 000TND

n = 5ans

i = 5%

r = 100TND

Solution:

On a $$V_n = \left(a+\frac{r}{i}\right)\frac{(1+i)^n-1}{i}-\frac{nr}{i}.$$

D'où, $$V_5 = \left(1000+\frac{100}{0{,}05}\right)\left(\frac{(1{,}05)^5-1}{0{,}05}\right)-\frac{5\times 100}{0{,}05}$$

V_5 = 3000 (5,5256312) - 10 000 = 16 576,8936 - 10 000
V_5 = 6 576,894 TND

3.2.1.2. La valeur actuelle

On sait que : $V_n = V_0(1+i)^n$ Donc: $V_0 = V_n(1+i)^{-n}$

$$V_0 = (1+i)^{-n}\left[\left(a+\frac{r}{i}\right)\frac{(1+i)^n-1}{i}-\frac{nr}{i}\right]$$

$$V_0 = \left(a+\frac{r}{i}\right)\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)-\frac{nr}{i}(1+i)^{-n}$$

$$\boxed{V_0 = \left(a+\frac{r}{i}+nr\right)\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)-\frac{nr}{i}}$$

3.2.2. Les annuités de début de période en progression arithmétique

3.2.2.1. La valeur acquise

$$V_n = (a+(n-1)r)(1+i)+(a+(n-2)r)(1+i)^2+\ldots\ldots+(a+2r)(1+i)^{n-2}+(a+r)(1+i)^{n-1}+a(1+i)^n$$

$$V_n = (1+i)\times\underbrace{\left[(a+(n-1)r)+(a+(n-2)r)(1+i)+\ldots\ldots+(a+2r)(1+i)^{n-3}+(a+r)(1+i)^{n-2}+a(1+i)^{n-1}\right]}_{=\left(a+\frac{r}{i}\right)\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]-\frac{nr}{i}}$$

$$\boxed{V_n = \left(a+\frac{r}{i}\right)\times(1+i)\times\frac{(1+i)^n-1}{i}-\frac{nr}{i}\times(1+i)}$$

3.2.2.2. La valeur actuelle

On sait que: $V_0 = V_n(1+i)^{-n}$ <=> $V_0 = \left[\left(a+\frac{r}{i}\right)\times(1+i)\times\frac{(1+i)^n-1}{i}-\frac{nr(1+i)}{i}\right]\times(1+i)^{-n}$

$$\boxed{V_0 = \left(a+\frac{r}{i}\right)\times(1+i)\times\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]-\frac{nr}{i}\times(1+i)^{-n+1}}$$

3.3. Les annuités en progression géométrique

3.3.1. Les annuités de fin de période en progression géométrique

3.3.1.1. La valeur acquise

Soit une progression géométrique d'annuités de fin de période de raison q représentée par le graphique suivant:

0	1	2	3	4	----	n-2	n-1	n
	a	aq	aq²	aq3		aqn-3	aqn-2	aqn-1

$$V_n = aq^{n-1} + aq^{n-2}(1+i) + ... + aq^2(1+i)^{n-3} + aq(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

$$V_n = a\ \underbrace{\left[(1+i)^{n-1} + q(1+i)^{n-2} + q^2(1+i)^{n-3} + ... + q^{n-2}(1+i) + q^{n-1}\right]}$$

Suite géométrique de 1^{er} terme $(1+i)^{n-1}$, de raison $q\times(1+i)^{-1} = \frac{q}{1+i}$

et comprenant n termes

$$V_n = a\left[(1+i)^{n-1}\frac{\left(\frac{q}{1+i}\right)^n-1}{\left(\frac{q}{1+i}\right)-1}\right] \quad \Leftrightarrow \quad V_n = a\left[(1+i)^{n-1}\frac{\frac{q^n-(1+i)^n}{(1+i)^n}}{\frac{q-(1+i)}{1+i}}\right]$$

$$V_n = a\left[(1+i)^{n-1}\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}\times\frac{1+i}{(1+i)^n}\right]$$

$$V_n = a\left[\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}\times\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}\right]$$

$$\boxed{V_n = a\left[\frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}\right]}$$

3.3.1.2. La valeur actuelle

On sait que : $V_0 = V_n(1+i)^{-n}$

alors $$\boxed{V_0 = \frac{a}{(1+i)^n} \times \left[\frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}\right]}$$

3.3.2. Les annuités de début de période en progression géométrique

3.3.2.1. La valeur acquise

$$\boxed{V_n = a(1+i)\left[\frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}\right]}$$

3.3.2.2. La valeur actuelle

$$V_0 = \frac{a}{(1+i)^n} \times (1+i) \times \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}$$

$$\boxed{V_0 = \frac{a}{(1+i)^{n-1}} \times \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}}$$

EXERCICES ET PROBLEMES

Exercice 1

Un particulier doit 10000 dinars, 20000 dinars et 30000 dinars respectivement dans un, deux et trois ans. Il désire se libérer de sa dette en deux versements égaux dans quatre et cinq ans. En supposant un taux de 7%, calculer le montant des versements à effectuer.

Exercice 2

Pour acheter à crédit un appareil électroménager coûtant 499,155 dinars, on peut s'adresser à deux magasins. Le premier propose le mode de paiement suivant : une suite de 12 mensualités de 44,810 dinars chacune. Le second propose un règlement unique de 579 dinars à la fin de la première année.

1) Déterminer les taux d'intérêt pratiqués par les deux magasins.
2) Quel magasin propose le meilleur mode de paiement ?

Exercice 3

Un couple désire investir. Le mari dépose 250 dinars par mois pendant 3 ans à un taux d'intérêt annuel de 8,5% capitalisé mensuellement et son épouse, 900 dinars par semestre pendant la même durée à un taux annuel de 10% capitalisé semestriellement.

1) Lequel des deux placements est plus avantageux que l'autre ?
2) Lequel des deux placements aura accumulé le plus de capital ?
3) Calculer le capital accumulé par le couple.

Exercice 4

Un employé bénéficiant d'une part d'héritage de 100000 dinars reçoit immédiatement 10000 dinars et une suite de semestrialités de 5000 dinars. Si la banque où cet héritage est déposé lui verse un intérêt capitalisé semestriellement au taux annuel de 1,0025%, on vous demande de déterminer :

1) Le nombre d'années durant lesquels cet employé reçoit des versements de 5000 dinars.
2) Le montant X du versement additionnel ajouté au dernier versement de 5000 dinars lui permettant de recevoir la totalité de sa part d'héritage.
3) Le montant Y du versement effectué six mois après le dernier versement de 5 000 dinars lui permettant de recevoir la totalité de sa part d'héritage.

Exercice 5

Le 01/09/03, une personne décide de verser à un organisme de capitalisation, à des intervalles réguliers égaux à une année, des sommes constantes de montant 1000 dinars chacune au taux d'intérêt annuel de 10%. Le premier versement aura lieu dans une année. La date prévue pour le dernier versement est le 01/09/2019. On vous demande de calculer le montant du capital constitué :

1) A la date du dernier versement.
2) A la date du premier versement.
3) Au 01/09/2023, si cette personne ne retire pas son capital au 01/09/2019.
4) Au 01/09/2023, si cette personne opte pour une date du dernier versement plus éloignée qui devient le 01/09/2023 au lieu du 01/09/2019.

Exercice 6

Afin de disposer d'un capital lui permettant de financer les études supérieures de son fils, monsieur Z décide de déposer tous les trois mois 90,123 dinars, dans un compte bancaire où le taux d'intérêt est capitalisé trimestriellement. Le premier dépôt est effectué à la naissance de l'enfant et le dernier dépôt quand il est âgé de 18 ans.

Déterminer le taux d'intérêt annuel sachant que le banquier informe monsieur Z que le montant du capital constitué lorsque son fils aura 18 ans s'élèvera à 10000 dinars.

Exercice 7

Le directeur de la société Alpina décide de mettre à la disposition de son représentant commercial une voiture de service. A cet effet, il s'est trouvé devant deux éventualités possibles, acheter la voiture ou la louer auprès d'une agence de la place.

Les conditions de la location:

Un loyer de 300 dinars payé au début de chaque mois pendant 36 mois à la suite desquels on rend la voiture sans frais additionnels.

Les conditions d'achat:

Le prix d'achat de la même voiture est de 9500 dinars toutes taxes comprises. L'entreprise compte financer cet achat par un emprunt bancaire au taux annuel de 12 % capitalisé mensuellement. Le remboursement de l'emprunt se fera par 36 mensualités égales de début de période. Au bout du 36^{e} mois, la valeur de revente de la voiture est évaluée à 3 000 dinars.

1) Calculer la mensualité à payer à la banque prêteuse.
2) Quelle option suggérez-vous à ce directeur ?
3) Que devrait être la valeur de revente de la voiture pour que les deux options (achat ou location) s'équivalent ?

Exercice 8

Le 01 mai de chaque année, une personne verse 20000 dinars capitalisés à 7%. Après avoir effectué 10 versements, elle laisse la somme acquise en banque, pendant 5 ans, au taux de 8%. Au bout des 5 années, elle procède, le premier mai de chaque année, à 10 retraits de 20000 dinars chacun (taux d'intérêt annuel = 7%).

1) Calculer le solde disponible immédiatement après le dernier retrait.
2) Quelle somme constante aurait-il fallu placer pour que ce solde soit nul ?

Exercice 9

Monsieur Taktouk décide aujourd'hui de se constituer une épargne lui permettant d'assurer les dépenses relatives aux études supérieures de son fils ainsi que sa propre pension de retraite.

Son fils Falfoul, âgé aujourd'hui de 10 ans, aura besoin de 4000 dinars par an, pour assurer ses études supérieures qui débuteront dans 8 ans et dureront 4 ans.

Concernant sa retraite, Taktouk, âgé aujourd'hui de 40 ans, désire bénéficier dans 20 ans d'une pension annuelle égale à 25 000 dinars. Monsieur Taktouk estime sa durée de vie à 80 ans (durée de vie moyenne des hommes en Tunisie).

En supposant que le taux d'intérêt est égal à 10%, calculer la somme que Taktouk doit épargner annuellement (un premier montant constant durant les 8 premières années et un deuxième montant constant durant les 12 années restantes) pour assurer l'éducation de son fils et sa pension de retraite.

Exercice 10

Le 01/01/N, une personne prévoit son budget pour les deux années à venir. Elle prélèvera sur ses revenus perçus en fin de chaque mois : d'une part 160 dinars par mois pour régler son loyer ; d'autre part 400 dinars d'épargne mensuelle pendant 3 mois, 600 dinars par mois les 6 mois suivants et 750 dinars mensuellement durant la dernière période. Elle pourrait placer ses capitaux au taux d'intérêt annuel de 19,56%.

On vous demande de calculer la valeur du loyer global et de l'épargne totale :

1) A la date du dernier versement.
2) A la date du premier versement.
3) Trois ans après le dernier versement.

Exercice 11

Une personne effectue 10 versements de 10000 dinars chacun, tous les deux ans au taux d'intérêt annuel de 8,5%.

On vous demande de calculer la valeur du placement global :

1) A la date du dernier versement.
2) Au moment du premier versement.
3) Deux ans après le denier versement

Exercice 12

Un individu de 38 ans pense à se constituer une retraite personnelle par capitalisation. La phase d'épargne sera constituée par 22 règlements constants, le premier intervenant à la signature du contrat.

La phase de retraite est constituée par des versements annuels qui débuteront lorsque l'individu aura 60 ans. Le contrat prévoit 25 versements, le premier versement est de 15 000 dinars la première année, avec un taux de revalorisation de 2% par an. Le taux d'intérêt annuel est de 5% aussi bien pendant la phase d'épargne que pendant la phase de retraite.

Calculer le montant d'épargne nécessaire.

Réponses :

Exercice 1 : Montant = 34 761,266 dinars.

Exercice 2 : 1) $i_a(1) = 14{,}98\%$; $i_a(2) = 16\%$.
2) Magasin 1.

Exercice 3 : 1) Le placement effectué par l'épouse.
2) Le capital accumulé par le mari.
3) C = 16 261,644 dinars.

Exercice 4 : 1) 9 ans.
2) X = 4 524,655 dinars.
3) Y = 4 547,288 dinars.

Exercice 5 : 1) V_{2019} = 35 949,730 dinars.
2) V_{2004} = 8 606,079 dinars.

3) V_{2023} = 52 634 dinars.
4) V_{2023} = 57 275 dinars.

Exercice 6 : i = 4 ,418%.

Exercice 7 : 1) 309,877 dinars.
2) Achat.
3) 425,399 dinars.

Exercice 8 : 1) 470 118,386 dinars.
2) 7 403,843 dinars.

Exercice 9 : 1^{er} montant = 5 307, 316 dinars ; 2^{e} montant = 4 087,699 dinars.

Exercice 10 : 1) V (abonnement) = 4 581,363 ; V (épargne) = 18 849,833 dinars.
2) V (abonnement) = 3 252,938 ; V (épargne) = 13 384,081 dinars.
3) V (abonnement) = 7 829,832 ; V (épargne) = 32 215,526 dinars.

Exercice 11 : 1) V_{18}= 232 024,044 dinars.
2) V_0= 53 431,542 dinars.
3) V_{20}= 273 144,505 dinars.

Exercice 12 : 6 694,217 dinars.

EXTRAITS DES SUJETS D'EXAMENS

EXAMEN GESTION FINANCIERE SESSION PRINCIPALE 2003/2004

Exercice

Monsieur A désire financer l'achat d'un logement par un prêt auprès de la Banque de l'Habitat au taux de 6,625% sur une durée de vingt ans. Le prêt sera remboursé en mensualités constantes terme échu. En supposant que l'emprunteur a une capacité de remboursement de 105 dinars par mois et que grâce à une épargne qu'il a constitué il peut payer au comptant 4300,950 dinars, quel est le prix du logement qui sera acquis par monsieur A ?

Réponse : 18 460 dinars.

TEST DE CONTROLE CONTINU GESTION FINANCIERE 2003/2004

Exercice

Vous aimeriez avoir 1000000 TND dans 30 ans, au moment de prendre votre retraite.

1/ Si on suppose que vous avez aujourd'hui 10000 TND, quel rendement (taux d'intérêt) vous faudrait-il pour atteindre votre but.

2/ Quel montant doit-on placer aujourd'hui, si le taux de rendement serait de 13%.

3/ Avant combien d'années auriez-vous du commencer le placement des 10000 TND au taux de 13% pour obtenir à l'échéance 1000000 TND.

4/ Si on suppose que vous avez aujourd'hui 10000 TND, que vous placez au taux de rendement i qui augmente tous les cinq ans de 1%. Calculez i qui au bout d'une durée de placement de 30 ans vous permet d'avoir 1000000 TND.

Réponse : 1/ $i = 16,6$ %

2/ $V_0 = 25565,053$

3/ $n = 37$ ans + 8 mois + 5 jours

4/ $i = 13,59\%$

TROISIEME CHAPITRE

LES EMPRUNTS INDIVIS
ET LES EMPRUNTS OBLIGATAIRES

1. LES EMPRUNTS INDIVIS

1.1. Définition

Un emprunt indivis est un emprunt ordinaire faisant l'objet d'un contrat entre un prêteur et un emprunteur. Il n'y a qu'un seul prêteur, il est donc indivisible, d'où le qualificatif indivis.

Le remboursement de cet emprunt s'effectue généralement, par annuités de fin de période. Chaque annuité est composée de deux éléments:

- Un remboursement d'une partie du capital emprunté, appelé l'amortissement.
- Une partie intérêt calculée sur la base du taux d'intérêt convenu entre les deux parties et du capital restant dû dépendant.

1.2. Remboursement d'un emprunt

Le remboursement d'un emprunt dépend du mode d'amortissement utilisé (in fine, par annuités constantes ou par amortissement constant). D'une façon générale le tableau d'amortissement se présente comme suit :

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 . i$	m_1	$a_1 = I_1 + m_1$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1 . i$	m_2	$a_2 = I_2 + m_2$
p	$C_{p-1} = C_{p-2} - m_{p-1}$	$I_p = C_{p-1} . i$	m_p	$a_p = I_p + m_p$
n-1	$C_{n-2} = C_{n-3} - m_{n-2}$	$I_{n-1} = C_{n-2} . i$	m_{n-1}	$a_{n-1} = I_{n-1} + m_{n-1}$
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = C_{n-1} . i$	m_n	$a_n = I_n + m_n$

Avec:
C_0 : capital restant dû au début de la première année soit le montant de l'emprunt.
I_p : intérêt de la $p^{ème}$ période.
m_p : amortissement de la $p^{ème}$ période.
a_p : annuité de la $p^{ème}$ période.
C_{p-1}: capital restant dû au début de la $p^{ème}$ période.

Les amortissements servent à rembourser la dette donc leur somme est égale au capital emprunté: $\boxed{\sum_{p=1}^{n} m_p = C_0}$

Après le paiement du $n^{ème}$ amortissement m_n, le capital restant dû est égal à zéro donc la dette non remboursée avant le paiement de m_n est égale à m_n c'est à dire $C_{n-1} = m_n$

<u>Relation entre deux annuités successives :</u>

$$\begin{cases} a = m_p + I_p = m_p + C_{p-1} \times i \\ a = m_{p+1} + I_{p+1} = m_{p+1} + C_p \times i \end{cases}$$

$$a_{p+1} - a_p = m_{p+1} - m_p + C_P \text{ x } i - C_{p-1} \text{x } i$$

$$a_{p+1} - a_p = m_{p+1} - m_p \,(1+i)$$

1.2.1 Remboursement in fine

Le remboursement du capital d'un emprunt s'effectue en une seule fois, à la fin du contrat. Le montant de l'intérêt (I) versé à chaque échéance, prévue par le contrat, est égal au montant emprunté multiplié par le taux d'intérêt.

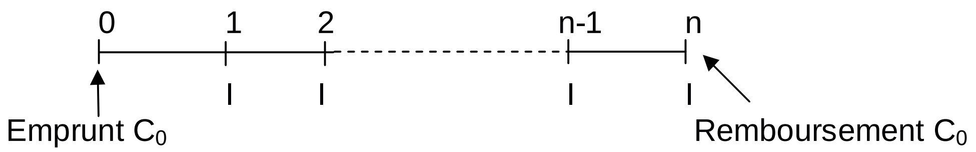


TABLEAU D'AMORTISSEMENT

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = I = C_0.i$	---	$a_1 = I_1 = I$
2	C_0	$I_2 = I = C_0.i$	---	$a_2 = I_2 = I$
p	C_0	$I_p = I = C_0.i$	---	$a_p = I_p = I$
n-1	C_0	$I_{n-1} = I = C_0.i$	---	$a_{n-1} = I_{n-1} = I$
n	C_0	$I_n = I = C_0.i$	C_0	$a_n = I_n + C_0 = I + C_0$

1.2.1 Remboursement par annuités constantes

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 . i$	m_1	$a = I_1 + m_1$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1 . i$	m_2	$a = I_2 + m_2$
p	$C_{p-1} = C_{p-2} - m_{p-1}$	$I_p = C_{p-1} . i$	m_p	$a = I_p + m_p$
n-1	$C_{n-2} = C_{n-3} - m_{n-2}$	$I_{n-1} = C_{n-2} . i$	m_{n-1}	$a = I_{n-1} + m_{n-1}$
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = C_{n-1} . i$	m_n	$a = I_n + m_n$

On a, $a_1 = a_2 = ... = a_p = ...= a_n = a$
et, $a = m_n + I_n \Leftrightarrow a = m_n + C_{n-1}.i \Leftrightarrow a = m_n + m_n.i$

$\boxed{a = m_n (1+i)}$

1.2.1.1. Loi de succession des amortissements

On a : $a_{p+1} - a_p = m_{p+1} - m_p (1+i)$

Et $a_{p+1} = a_p$

Alors $\boxed{m_{p+1}=m_p(1+i)}$

D'après la relation précédente, on aura:
$m_2 = m_1(1+i)$
$m_3 = m_2(1+i) = m1(1+i)^2$
$m_4 = m_3(1+i) = m1(1+i)^3$

$m_p = m_1\ (1+i)^{p-1}$

On a : $m_n = m_1(1+i)^{n-1}$
Or, $a = m_n(1+i)$
D 'où, $a = m_1(1+i)^{n-1}\ (1+i) = m_1(1+i)^n$

Donc: $\boxed{a = m_1(1+i)^n}$

1.2.1.2. Relation entre C_0 et le premier amortissement (m_1)

$$C_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \ldots\ldots\ldots + m_n$$

$$C_0 = m_1 + m_1(1+i) + m_1(1+i)^2 + m_1(1+i)^3 + \ldots\ldots\ldots + m_1(1+i)^{n-1}$$

$$C_0 = m_1\left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \ldots\ldots\ldots + (1+i)^{n-1}\right]$$

$$\boxed{C_0 = m_1\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]}$$

Et $$\boxed{m_1 = C_0\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]}$$

1.2.1.3. Relation entre C_0 et l'annuité constante (a)

La valeur actuelle des annuités = C_0

$$\boxed{C_0 = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]}$$ Et, $$\boxed{a = C_0\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]}$$

Exemple :
Le tableau d'amortissement d'un emprunt remboursable par annuités constantes indique que les intérêts payés l'avant dernière année s'élèvent à 12300 dinars et les intérêts payés la dernière année sont égaux à 6300 dinars. Enfin, la différence entre les intérêts de la 1ère année et ceux de la 2ème année s'élève à 4061,040 dinars.
Déterminer i, a, m_1 puis C_0.

Solution :
On a $I_{n-1} = 12300$ dinars $= C_{n-2} \cdot i = (m_{n-1} + m_n).i$
$I_n = 6300$ dinars $= C_{n-1} \cdot i = m_n.i$
$I_1 - I_2 = 4061{,}040$ dinars $= C_0 \cdot i - C_1 \cdot i = (C_0 - C_1).i = m_1.i$
On sait que: $m_n = m_{n-1}.(1+i)$

$$\begin{cases} m_n \times i = 6\,300\text{TND} \\ \left(m_{n-1} + m_n\right) \times i = 12\,300\text{TND} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_n \times i = 6\,300\text{TND} \\ \left(m_n.(1+i)^{-1} + m_n\right) \times i = 12\,300 \text{ dinars} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_n \times i = 6\,300\text{TND} \\ \left(m_n\left[1 + (1+i)^{-1}\right]\right) \times i = 12\,300\text{TND} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1 + (1+i)^{-1}} = \frac{6\,300}{12\,300}$$

$$\Rightarrow 12\,300 = 6\,300\left(1 + (1+i)^{-1}\right) \Leftrightarrow (1+i)^{-1} = \frac{12\,300}{6\,300} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+i} = 0{,}952380952 \Leftrightarrow i = 0{,}05$$

i = 5%

$m_n .i = 6300 \iff m_n = 126\,000$ dinars

$a = m_n .(1+i) = 126000\,(1 + 0{,}05) \iff a = 132300$ dinars

$I_1 - I_2 = 4061{,}040 = C_0 \cdot i - C_1 \cdot i = (C_0 - C_1).i = m_1.i$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{(I_1 - I_2)}{i} = \frac{4\,061{,}040}{0{,}05} = 81\,220{,}800 \text{ dinars}$$

$$a = m_1 + C_0 \times i \Leftrightarrow C_0 = \frac{(a - m_1)}{i} = \frac{(132\,300 - 81\,220{,}800)}{0{,}05}$$

$C_0 = 1021584$ dinars

1.2.1.4. Expression de la dette amortie et non amortie après le versement de la $p^{ème}$ annuité

Après le paiement de la $p^{ème}$ annuité, la partie de l'emprunt qui a été remboursée s'élève à la somme des p premiers amortissements: R_p

$R_p = m_1 + m_2 + ... + m_p$

$$R_p = m_1\left[1+(1+i)+(1+i)^2+........+(1+i)^{p-1}\right]$$

$$R_p = m_1\left[\frac{(1+i)^p-1}{i}\right]. \text{Or}, m_1 = C_0\frac{i}{(1+i)^n-1}$$

Alors, $$R_p = C_0\frac{i}{(1+i)^n-1}\left[\frac{(1+i)^p-1}{i}\right]$$

Donc $$\boxed{R_p = C_0\frac{(1+i)^p-1}{(1+i)^n-1}}$$

La dette non amortie est égale à $C_0 - R_p$

1.2.2. Remboursement d'un emprunt par amortissements constants

Soit: C_0: le montant de l'emprunt

n : le nombre d 'annuités

m : amortissement constant

$$\left.\begin{array}{l} m = \frac{C_0}{n} \\ I_p = C_{p-1}\times i \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Donc, les annuités ne sont pas constantes

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 . i$	m	$a_1 = I_1+m$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1 . i$	m	$a_2 = I_2+m$
p	$C_{p-1} = C_{p-2} - m_{p-1}$	$I_p = C_{p-1} . i$	m	$a_p = I_p+m$
n-1	$C_{n-2} = C_{n-3} - m_{n-2}$	$I_{n-1} = C_{n-2} . i$	m	$a_{n-1} = I_{n-1}+m$
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = C_{n-1} . i$	m	$a_n = I_n+m$

1.2.2.1. Loi de succession des annuités

On a : $a_{p+1} - a_p = m_{p+1} - m_p\,(1+i)$

or $m_{p+1} = m_p = \dfrac{C_0}{n}$

donc

$$\boxed{a_{p+1} = a_p - \frac{C_0}{n} \times i}$$

=> On remarque que les annuités sont en progression arithmétique de raison $\left(-\dfrac{C_0}{n} \times i\right)$

Exemple :
Un emprunt indivis contracté au taux annuel i est remboursable par 5 annuités: a_1, a_2, a_3, a_4 , a_5 .
Les amortissements successifs m_1 ,m_2 ,m_3 ,m_4 et m_5 forment une progression géométrique de raison (1+k), k étant différent de i.
1) Sachant que:
- Les intérêts de la 2ème année I_2 = 102102 dinars
- Les intérêts de la 4ème année I_4 = 55902 dinars.
- le 2ème amortissement m_2 = 440000 dinars.

Calculer i
2) Déterminer le montant de l'emprunt et dresser le tableau d'amortissement.

Solution

On a $I_2 = 102102 = C_1 . i$
$I_4 = 55\,902 = C_3 . i$
$m_2 = 440\,000$

$I_2 = C_1 . i = (C_0 - m_1).i = (m_1+ m_2 + m_3 + m_4 + m_5 - m_1).i$
$= (m_2 + m_3 + m_4 + m_5).i$

$I_4 = C_3 . i = [C_0 - (m_1 + m_2 + m_3)].i$
$= (m_1+ m_2 + m_3 + m_4 + m_5 - m_1 - m_2 - m_3).i = (m_4 + m_5).i$

D 'où, $I_2 = (m_2 + m_3 + m_4 + m_5).i = 102102$ (1)
$I_4 = (m_4 + m_5).i = 55902$ (2)

(1) - (2) => $(m_2 + m_3).i = 102102 - 55902 = 46200$ (3)

(2)/(3) => $\dfrac{(m_4 + m_5) \times i}{(m_2 + m_3) \times i} = \dfrac{55902}{46200} = 1{,}21$

$$\frac{m_4 + m_4(1+k)}{m_2 + m_2(1+k)} = 1{,}21 \Leftrightarrow \frac{m_4[1+(1+k)]}{m_2[1+(1+k)]} = 1{,}21 \Leftrightarrow \frac{m_4}{m_2} = 1{,}21$$

$$\text{Or, } m_4 = m_2(1+k)^2 \Rightarrow \frac{m_4}{m_2} = \frac{m_2(1+k)^2}{m_2} = 1{,}21 \Leftrightarrow (1+k)^2 = 1{,}21 = (1{,}1)^2$$

$\Rightarrow k = 10\%$

A partir de (3), on a:$(m_2 + m_3).i = 46\,200$ <=> $i = \dfrac{46\,200}{m_2 + m_3}$

$$\Leftrightarrow i = \frac{46\,200}{440\,000 + 440\,000(1{,}1)} = 0{,}05$$

Donc i =5%

2) $$C_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i = m_1 + m_1(1+k) + m_1(1+k)^2 + m_1(1+k)^3 + m_1(1+k)^4$$

$$\Leftrightarrow C_0 = m_1 \frac{(1+k)^5 - 1}{k} \text{ or } m_1 = \frac{m_2}{1+k} = \frac{440000}{1{,}10} = 400\,000$$

$$\Leftrightarrow C_0 = 400\,000 \frac{(1{,}1)^5 - 1}{0{,}1} = 2\,442\,040 \Leftrightarrow \quad C_0 = 2442040 \text{ dinars}$$

Le tableau d'amortissement de cet emprunt se présente comme suit:

Période	Capital restant du	Amortissement	Annuité	Intérêt
1	2442040	400000	122102	522102
2	2042040	440000	102102	542102
3	1602040	484000	80102	564102
4	1118040	532400	55902	588302
5	585640	585640	29282	614929

2. LES EMPRUNTS OBLIGATAIRES

2.1. Définition

Lorsque le montant de l'emprunt est très élevé, l'emprunteur est obligé de s'adresser à plusieurs prêteurs appelés « obligataires » ou « souscripteurs ». En effet, le montant de l'emprunt est divisé en parts égales négociables appelées obligations.

En dehors de certains cas particuliers, l'obligation donne à son détenteur le droit de percevoir un intérêt annuel (coupon) et d'être remboursé de son titre à l'échéance.

Les principes mathématiques sont identiques à ceux des emprunts indivis sauf que le capital emprunté est remboursé à différents prêteurs. Donc, pour constituer un capital de nominal C_0, l'emprunteur émet N obligations égales d'un montant V_N. On aura:
$\boxed{C_0 = V_N * N}$.

2.2. Les principales caractéristiques d'une obligation

Les obligations sont caractérisées par les éléments suivants:

- *La valeur nominale (V_N)*: C'est la valeur faciale de l'obligation. Elle est unique pour toutes les obligations d'un même emprunt. Elle constitue le montant à partir duquel est établi le tableau d'amortissement et la base de calcul des intérêts.
- *La valeur d'émission (V_E)*: C'est la somme effectivement payée par l'obligataire pour l'achat d'une obligation. Ce prix peut être différent du nominal. Lorsqu'il est égal au nominal, on dit que l'obligation est émise « au pair », s'il en est inférieur, on dit que l'obligation est « au dessous du pair » alors que s'il en est supérieur, on dit que l'émission est « au dessus du pair ». La différence entre la valeur d'émission et la valeur nominale est appelée prime d'émission.
- *La valeur de remboursement (V_R)*: C'est la somme versée par l'emprunteur au moment du remboursement de l'obligation. Cette somme peut être égale à la valeur nominale, on parle dans ce cas d'un remboursement « au pair », ou supérieure à la valeur nominale et on parle alors d'un remboursement « au dessus du pair ». La différence entre la valeur de remboursement et la valeur d'émission est appelée prime de remboursement.

  Le mode de remboursement peut être:

  - En bloc ou in fine: tous les titres sont remboursés en une seule fois à l'échéance.
  - Par amortissement constant: un même nombre d'obligations tirées au sort est remboursé chaque année.
  - Par annuités sensiblement constantes: les obligations à amortir chaque année sont également tirées au sort. Les annuités ne sont pas strictement constantes parce que l'amortissement doit concerner un nombre entier d'obligations.
- *Le taux nominal (i)* : C'est la rémunération de l'obligation. On l'appelle aussi taux facial. Appliqué à la valeur nominale, il permet de calculer le montant des intérêts (coupon).
- *La date de souscription* : C'est la date de règlement de l'achat de l'obligation par le souscripteur.
- *La date de jouissance* : C'est la date à partir de laquelle les intérêts commencent à courir.
- *Le coupon (c)*: c'est le montant des intérêts servis à chaque échéance, pour chaque obligation. On a : $c = V_N * i$.

2.3. Remboursement d'un emprunt obligataire

Soit:

- N: nombre des obligations émises.
- V_E: prix d'émission de l'obligation.
- V_N: valeur nominale de l'obligation.
- V_R: valeur de remboursement de l'obligation.
- i : taux du coupon.
- c: coupon = $V_N * i$.
- $N_1, N_2 \ldots\ldots N_n$: nombre d'obligation restant en circulation après le $1^{er}, 2^e, \ldots\ldots n^e$ tirage. ($N_n = 0$).
- $m_1, m_2 \ldots\ldots m_n$: nombre de titres amortis au $1^{er}, 2^e, \ldots\ldots n^e$ tirage.
- $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$: montant de l'annuité relative au $1^{er}, 2^e, \ldots\ldots n^e$ tirage.

Période	Dette en début de période	Intérêts	Amortis.	Annuités	Nombre de titres en circulation
1	$C_0 = N * V_N$	$N * c$	$m_1 * V_R$	$a_1 = N*c+m_1*V_R$	$N_1 = N - m_1$
2	$C_1 = N_1 * V_N$	$N_1 * c$	$m_2 * V_R$	$a_2 = N_1*c+ m_2*V_R$	$N_2 = N_1 - m_2$
p	$C_{p-1} = N_{p-1} * V_N$	$N_{p-1} * c$	$m_p * V_R$	$a_p = N_{p-1}*c+ m_p*V_R$	$N_p = N_{p-1} - m_p$
n-1	$C_{n-2} = N_{n-2} * V_N$	$N_{n-2} * c$	$m_{n-1}*V_R$	$a_{n-1}= N_{n-2}*c+m_{n-1}*V_R$	$N_{n-1} = N_{n-2} - m_{n-1}$
n	$C_{n-1} = N_{n-1} * V_N$	$N_{n-1} *c$	$m_n * V_R$	$a_n = N_{n-1}*c+ m_n*V_R$	$N_n = N_{n-1} - m_n$

$N_n = N_{n-1} - m_n = 0 \quad \Rightarrow N_{n-1} = m_n$
Or $a_n = N_{n-1} * c + m_n * V_R = m_n * c + m_n * V_R = m_n * (c + V_R)$
$a_n = m_n * (c + V_R)$

2.3.1. Relation entre les annuités et les amortissements

$a_{p+1}= N_p * c+ m_{p+1} * V_R \Leftrightarrow a_{p+1} = (N_{p-1} - m_p) * c+ m_{p+1} * V_R$
Et $a_p = N_{p-1} * c + m_p * V_R$

$$\begin{aligned} a_{p+1} - a_p &= (N_{p-1} - m_p) * C+ m_{p+1} * V_R - N_{p-1} * c - m_p * V_R \\ &= m_{p+1} * V_R - m_p * c - m_p * V_R \\ &= m_{p+1} * V_R - m_p * (c +V_R) \end{aligned}$$

D'où $a_{p+1} - a_p = m_{p+1}V_R - V_R m_p\left(\frac{c}{V_R} + 1\right)$

Posons, r: le taux d'intérêt, qui appliqué à la valeur de remboursement, nous donne le coupon: $r = \frac{c}{V_R}$

On aura alors, $\boxed{a_{p+1} - a_p = m_{p+1} * V_R - V_R * m_p * (r+1)}$

2.4. Remboursement d'un emprunt obligataire par annuités constantes

2.4.1. Loi de succession des amortissements

On a $a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_n = a$
Or $a_{p+1} - a_p = m_{p+1}V_R - V_R m_p (1+r)$
D'où $m_{p+1} V_R = m_p V_R (1+r)$
Donc $m_{p+1} = m_p (1+r)$

Les amortissements sont en progression géométrique de raison (1+r).

2.4.2. Relation entre le nombre d'obligations et l'annuité (n) constante

On peut démontrer que $a = N \,.\, V_R \,.\, \dfrac{r}{1-(1+r)^{-n}}$

2.5. Remboursement d'un emprunt obligataire par amortissements constants

Comme pour l'emprunt indivis, les annuités sont en progression arithmétique de raison $\left(-\dfrac{C_0}{n}\,.\,i\right)$

EXERCICES ET PROBLEMES

Exercice 1

Un prêt de 70442,910 dinars est consenti au taux d'intérêt annuel de 3%. Il est amortissable par 24 annuités de fin de période telles que chacune d'elles est égale à la précédente majorée de 5%. L'amortissement de la 19^{e} année s'élève à 4720,152 dinars.

1) Etablir la relation qui lie le capital emprunté et les annuités. En déduire le montant de la première annuité.
2) Etablir la relation qui lie les amortissements successifs.
3) Construire la $1^{ère}$, la 18^{e}, la 19^{e} et la 24^{e} ligne du tableau d'amortissement.

Exercice 2

Une société de crédit prête une somme d'argent remboursable chaque fin d'année en 20 annuités constantes tel que le produit du premier et du troisième amortissement soit égal à 2241613,400 dinars et que le produit du 5^{e} amortissement par le 6^{e} soit égal à 5064949,200 dinars.

1) Calculer :
   a) Le taux d'intérêt.
   b) Le premier amortissement.
   c) L'annuité.
   d) La somme empruntée (arrondir à l'unité supérieure).
   e) La dette amortie et non amortie après le paiement de la 8^{e} annuité.
2) Etablir les 12^{e} et 13^{e} lignes du tableau d'amortissement.

Exercice 3

Une entreprise s'adresse à une banque pour emprunter 110410 dinars. La banque lui propose un remboursement au moyen d'une série de 12 annuités constantes de fin de période aux taux de 8% les 4 premières années, 9% les 4 années suivantes et 10% les 4 dernières années.

1) Calculer le montant de l'annuité.
2) Déterminer le taux effectif annuel d'intérêt de cet emprunt auprès de la banque.
3) Etablir le tableau d'amortissement de cet emprunt.

Exercice 4

Une personne désire emprunter 60000 dinars, s'adresse à trois organismes financiers qui lui proposent trois modalités de remboursement différentes :

Organisme 1 : versement d'une annuité constante (a) pendant 8 ans au taux de 8%.

Organisme 2 : versement d'une somme constante (b) tous les deux ans pendant 8 ans, comprenant une part de remboursement et des intérêts calculés au taux annuel de 8%.

Organisme 3 : Versement de 8 annuités comprenant d'une part un huitième du capital emprunté et d'autre part des intérêts calculés au taux i sur la base du capital restant du.

1) Déterminer le montant de l'annuité a à verser à la suite d'un emprunt auprès de l'organisme 1.
2) Déterminer le montant b à verser si l'emprunt est contracté auprès de l'organisme 2.
3) Déterminer le taux d'intérêt i pratiqué par l'organisme 3, sachant que la première annuité dépasse la dernière de 3937,500 dinars.

Exercice 5

Montrer que la loi de succession des amortissements relatifs au remboursement d'un emprunt obligataire par annuités constantes est définie par la relation suivante :

$$m_{p+1} = m_p(1+r)$$

Tels que :

m_p : amortissement de la période p ;

m_{p+1}: amortissement de la période p+1

et r : taux effectif.

Que devient l'égalité si on suppose en outre, un remboursement au paire ?

Exercice 6

Un emprunt obligataire est émis en juin 1996 aux conditions suivantes:

- Valeur nominale: 5000 dinars.
- Prix d'émission: 4975 dinars.
- Taux nominal: 7 %.
- Durée totale: 8 ans (remboursement in fine).
- Date de jouissance: 15 juin 1996.

1) Calculer le taux actuariel brut offert par l'emprunt.
2) Le 16 juin 1998, immédiatement après le détachement du coupon, le taux du marché est de 10 %. Quelle est à cette date la valeur de l'obligation ? Même question si le taux du marché passe à 5 %. Que peut-on conclure ?

Exercice 7

On considère un emprunt obligataire de 500000 dinars dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Valeur nominale d'une obligation = 100 dinars.
- Valeur de remboursement = 125 dinars.
- Taux d'intérêt = 10%.
- Durée de l'emprunt = 20 ans.
- Remboursement par amortissements constants.

1) Etablir les $1^{ère}$, 2^e et 20^e lignes du tableau d'amortissement de cet emprunt.
2) Si après 17 ans, on envisage un remboursement par anticipation, quel est le montant S à payer y compris la 17^e annuité ?

Exercice 8

Une entreprise a émis un emprunt obligataire dont un extrait du tableau d'amortissement est donné ci- dessous :

	Nombre d'obligations		Amortissement (remboursement au pair)	Intérêts	Annuités sensiblement constantes
	En circulation	Amorties			
1					
2					
3			567000		
4		1096			
5					
6				496416	
7		1711			
8					

1) Déterminer :
   a) Le taux d'intérêt i.
   b) La valeur nominale d'une obligation. Arrondir le résultat à l'unité inférieure.
   c) Le nombre de titres en circulation au début de la 6^{e} année.
   d) Le nombre d'obligations émises.
   e) La durée de l'emprunt.
   f) La valeur de la 1ère, de la 4^{e} et de la 8^{e} annuité.
2) Compléter le tableau d'amortissement.

Réponses :

Exercice 1 : 1) $C_0 = 29{,}32677327 a_1 ; a_1 = 2\,402$ dinars.

2) $m_{p+1} - 1{,}03 m_p = 0{,}05 a_p$.

3)

Période	capital restant du	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité
1	70 442,910	2 113,287	288,713	2 402,000
18	39 666,998	1 190,010	4 315,418	5 505,428
19	35 351,580	1 060,547	4 720,152	5 780,699
24	7 162,914	214,887	7 162,913	7 377,800

Exercice 2 : 1) a) i = 12,35%

b) m_1 = 1 332,623 dinars.

c) a = 13 682,607 dinars.

d) C_0 = 100 000 dinars.

e) R_8 = 16 601,629 dinars; $C_0 - R_8$ = 83 398,371 dinars.

2)

Période	capital restant du	Intérêt de la période	Amortissement
12	71 944,526	8 885,149	4 797,458
13	67 147,068	8 292,663	5 389,944

Exercice 3 : 1) a = 15 034,021 dinars.
2) i = 8,5057%
3)

Période	capital restant du	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité constante
1	110 410,000	8 832,800	6 201,221	15 034,021
2	104 208,779	8 336,702	6 697,319	15 034,021
3	97 511,460	7 800,917	7 233,104	15 034,021
4	90 278,356	7 222,268	7 811,753	15 034,021
5	82 466,604	7 421,994	7 612,027	15 034,021
6	74 854,577	6 736,912	8 297,109	15 034,021
7	66 557,468	5 990,172	9 043,849	15 034,021
8	57 513,619	5 176,226	9 857,795	15 034,021
9	47 655,824	4 765,582	10 268,439	15 034,021
10	37 387,385	3 738,739	11 295,282	15 034,021
11	26 092,103	2 609,210	12 424,811	15 034,021
12	13 667,292	1 366,729	13 667,292	15 034,021

Exercice 4 : 1) a = 10 440,885 dinars.
2) b = 21 717,042 dinars.
3) I = 7,5%.

Exercice 5 : 1) Voir paragraphe 2.4.

Exercice 6 : 1) i = 7,084%
2) V (i=10%) = 4 346,710 dinars; V (i=5%) = 5 507, 569 dinars.

Exercice 7 : 1)

Période	Dette en début de période	Intérêt	Amortissement constant	Annuité	Nombre de titres en circulation
1	500 000	50 000	31 250	81 250	4 750
2	475 000	47 500	31 250	78 750	4 500
20	25 000	2 500	31 250	33 750	0

2) S = 131 792,825 dinars.

Exercice 8 : 1) a) i = 16%
b) V_N = 600 dinars.
c) N_5 = 5 171 obligations.
d) N = 10 000 obligations.
e) n = 8 ans.
f) a_1 = 1 381 200 dinars; a_4 = 1 381 248 dinars et a_8 = 1 381 560 dinars.

2)

	Nombre d'obligations		Amortissement		Annuités sensiblement
	En circulation	Amorties	(remb, au pair)	Intérêts	constantes
1	10 000	702	421 200	960 000	1 381 200
2	9 298	816	489 600	892 608	1 382 208
3	8 482	944	567 000	814 272	1 381 272
4	7 538	1096	657 600	723 648	1 381 248
5	6 442	1271	762 600	618 432	1 381 032
6	5 171	1475	885 000	496 416	1 381 416
7	3 696	1711	1 026 600	354 816	1 381 416
8	1 985	1985	1 191 000	190 560	1 381 560

EXTRAITS DES SUJETS D'EXAMENS

EXAMEN GESTION FINANCIERE DEUXIEME SESSION 2003/2004

Exercice

Le 12 juin N, une entreprise a contracté un emprunt de 100000 dinars, remboursable par 12 annuités constantes de fin de période. Le taux d'intérêt annuel est égal à 13,2%. Au cours de cette période, le taux d'intérêt ayant diminué, l'entreprise envisage de rembourser cet emprunt par anticipation. La date de remboursement par anticipation est fixée au 12 juin N+4. A cette date, l'entreprise versera :

- La quatrième annuité ;
- Le remboursement du capital restant du à cette date.

Pour disposer du montant nécessaire lui permettant ce remboursement par anticipation du capital restant du après le paiement de la quatrième annuité, l'entreprise contracte, le 12 juin N+4 un nouvel emprunt égal à la somme à rembourser par anticipation, au taux d'intérêt annuel égal à 11%. Cet emprunt est remboursable sur 8 ans par amortissements constants. La première annuité étant versée le 12 juin N+5.

Travail à faire :

1) Déterminer le montant à verser le 12 juin N+4.
2) Etablir les 3 dernières lignes du tableau d'amortissement du second emprunt.
3) Est-ce que la décision de remboursement par anticipation est opportune ?

Réponse :

1) Montant à verser le 12/06/N+4 = 98 318,901 dinars.
2)

Période	Capital restant du	Amortissement	Intérêt	Annuité
6	30 475,391	10 158,460	3 352,293	13 510,753
7	20 316,927	10 158,460	2 234,862	12 393,322
8	10 158,460	10 158,460	1 117,431	11 275,891

3) Oui.