MECANIQUE

DYNAMIQUE D'UN SOLIDE EN ROTATION
EQUILIBRAGE

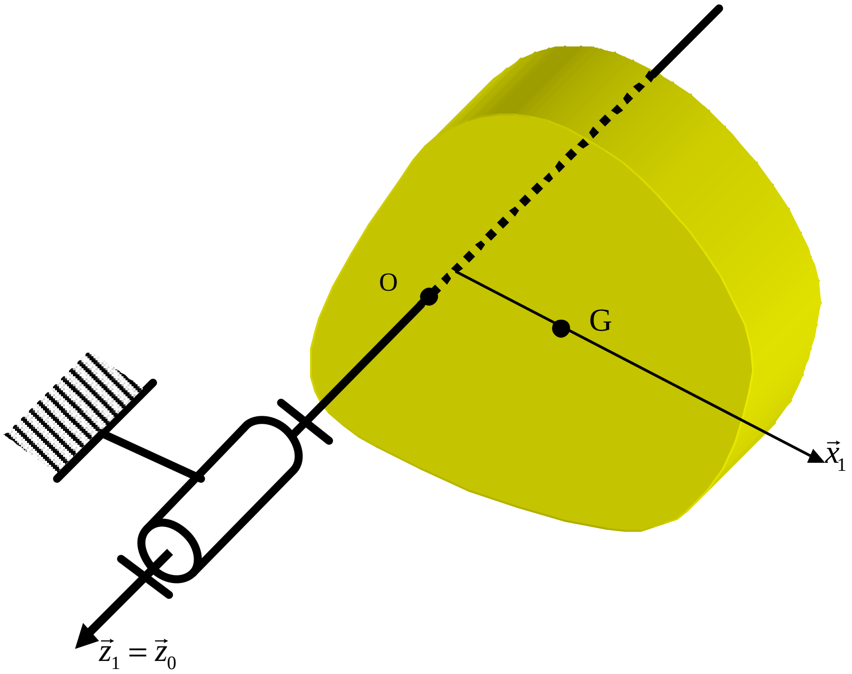
1 Etude dynamique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Paramétrage du problème :

On considère un solide S_1 quelconque de centre d'inertie G, de base liée à son mouvement $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, de masse m tournant autour d'un axe fixe, c'est à dire en liaison pivot avec le bâti auquel on lie le repère d'étude $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Pour les besoins du calcul, considérons que cet axe de rotation soit l'axe $(O, \vec{z}_0)$, on peut prendre $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$.

Le solide S_1 étant de géométrie quelconque, son centre d'inertie n'a aucune raison d'être sur l'axe de rotation. Par contre, on peut très bien, c'est un choix de paramétrage, choisir d'aligner la droite orthogonale et sécante à l'axe de rotation passant par G avec $\vec{x}_1$ (voir figure).

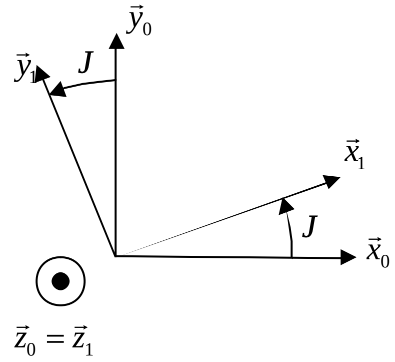


On peut donc paramétrer la position de G centre de gravité du solide S_1 par : $\overrightarrow{OG} = a\vec{x}_1 + c\vec{z}_0$

Posons $J = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$, on a alors la figure de travail suivante :

S_1 ne possède aucune symétrie particulière, donc sa matrice d'inertie en O dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est de la forme générale :

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1;\vec{y}_1;\vec{z}_0)}$$



Bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le solide S_1 :

On distingue les actions mécaniques extérieures transmises par des liaisons que l'on connaît, des actions mécaniques extérieures (autres que par des liaisons) :

- Le solide S_1 est en liaison uniquement avec le bâti par une liaison pivot. On a donc l'action mécanique transmissible par une liaison pivot, soit :

$$\{T(bati \to S_1)\} = {}_O\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)}$$

- L'ensemble des actions mécaniques extérieures (autres que celle provenant de liaison) sont regroupées dans un seul torseur ramené en O, qui a donc la forme la plus générale (pas d'hypothèses particulière sur ces actions mécaniques :

$$\{T(ext \to S_1)\} = {}_O\begin{Bmatrix} X_1 & L_1 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)}$$

Déterminons, avant d'appliquer le principe fondamental de la dynamique, le torseur dynamique en O du solide S_1 dans son mouvement par rapport au bâti 0.

Calcul de la résultante dynamique :

$$\overrightarrow{R_d}(S_1/0) = m\vec{\Gamma}(G \in S_1/0) = m\left[\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}\right]_0 \text{ or } \left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_0 = a\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_0 + c\cancel{\left[\frac{d\vec{z}_0}{dt}\right]_0} = a\dot{J}\vec{y}_1 \text{, d'où :}$$

$$\overrightarrow{R_d}(S_1/0) = a\ddot{J}\vec{y}_1 - a\dot{J}^2\vec{x}_1$$

Calcul du moment dynamique en O :

Le moment cinétique en O (point fixe dans le mouvement de rotation autour de l'axe $(O, \vec{z}_0)$) est égal au produit de la matrice d'inertie en O par le vecteur vitesse de rotation de $S_1/0$: $\vec{\Omega}(S_1/0) = \vec{\Omega}(1/0) = \dot{J}\vec{z}_0$. Soit la quantité suivante :

$$\vec{\sigma}_O(S_1/0) = {}_1\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{J} \end{vmatrix} = {}_1\begin{vmatrix} -E\dot{J} \\ -D\dot{J} \\ C\dot{J} \end{vmatrix} = -E\dot{J}\vec{x}_1 - D\dot{J}\vec{y}_1 + C\dot{J}\vec{z}_0.$$

Emmanuel FARGES

Puisque O est un point fixe dans le mouvement considéré, le moment cinétique en O est la dérivée par rapport au temps (dans la base d'étude, ici 0) du moment cinétique. Soit la quantité suivante :

$\overrightarrow{d_O}(S_1/0)=\left[\dfrac{d\overrightarrow{s_O}(S_1/0)}{dt}\right]_0$ Soit : $\overrightarrow{d_O}(S_1/0)=-E\ddot{J}\vec{x}_1-D\ddot{J}\vec{y}_1+C\ddot{J}\vec{z}_0-E\dot{J}^2\vec{y}_1+D\dot{J}^2\vec{x}_1$

On peut donc désormais écrire le principe fondamental de la dynamique en projection dans la base 1, de la façon suivante :

$$_O\begin{Bmatrix} -a\dot{J}^2 & -E\ddot{J}+D\dot{J}^2 \\ a\ddot{J} & -D\ddot{J}-E\dot{J}^2 \\ 0 & C\ddot{J} \end{Bmatrix}_1 = {}_O\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_1 + {}_O\begin{Bmatrix} X_1 & L_1 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{Bmatrix}_1 = {}_O\begin{Bmatrix} X+X_1 & L+L_1 \\ Y+Y_1 & M+M_1 \\ Z+Z_1 & N_1 \end{Bmatrix}_1$$

Soit les 6 équations suivantes :
Ces équations correspondent aux équations du mouvement de ce solide en rotation autour de l'axe fixe $(O,\vec{z}_0)$:

Les 3 qui correspondent au théorème de la ***résultante dynamique*** en projection dans la base 1 :

$$\begin{cases} -a\dot{J}^2 = X+X_1 \\ a\ddot{J} = Y+Y_1 \\ 0 = Z+Z_1 \end{cases}$$

Les 3 qui correspondent au théorème du ***moment dynamique*** résultant en O en projection dans la base 1 :

$$\begin{cases} -E\ddot{J}+D\dot{J}^2 = L+L_1 \\ -D\ddot{J}-E\dot{J}^2 = M+M_1 \\ C\ddot{J} = N_1 \end{cases}$$

2 Equilibrage

But de l'équilibrage : Eviter les vibrations pour le bruits qu'elles engendrent mais aussi parce qu'elles fatiguent considérablement les éléments mécaniques extérieurs à S_1 pouvant ainsi entraîner des ruptures de pièces par un mode de sollicitations qualifié par les ingénieurs de « fatigue »

Pour réaliser cet objectif, il suffit de rendre l'action mécanique entre le solide S_1 et le bâti la plus constante possible, c'est à dire indépendante du mouvement de $S_1/0$: C'est l'équilibrage.

3 Conditions d'équilibrage

Les actions mécaniques venant de l'extérieures n'étant pas maîtrisable (perturbations, différentes origines possibles, …), il reste à rendre indépendant du mouvement de S_1 les quantités X, Y, Z, L et M. Cela signifie que l'on doit les rendre indépendantes du mouvement , c'est à dire des quantités $\dot{J}$ et $\ddot{J}$.

Pour cela il faut :

Pour rendre X et Y indépendants de $\dot{J}$ et $\ddot{J}$ quel que soit X_1 et Y_1 , il faut avoir **a=0** (voir les équations de la résultante dynamique : $-a\dot{J}^2 = X + X_1$ et $a\ddot{J} = Y + Y_1$)

Z ne dépend pas du mouvement : $0 = Z + Z_1$

Pour rendre L et M indépendants de $\dot{J}$ et $\ddot{J}$ quel que soit L_1 et M_1 , il faut avoir **D=E=0** (voir les équations du moment dynamique résultant en O: $-E\ddot{J} + D\dot{J}^2 = L + L_1$ et $-D\ddot{J} - E\dot{J}^2 = M + M_1$)

- La première condition d'équilibrage trouvée, **a=0** , signifie que **le centre d'inertie G du solide S_1 doit être situé sur l'axe de rotation. Si cette condition est satisfaite, on parle d'équilibrage statique**

- La seconde condition d'équilibrage trouvée, **D=E=0** , signifie que la matrice d'inertie en O du solide S_1, dans la base 1 liée au solide est de la forme :
$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1;\vec{y}_1;\vec{z}_0)}$$
, c'est à dire que **l'axe de rotation** $(O,\vec{z}_0)$ **est un axe principal d'inertie pour le solide S_1** :
En se reportant au cours de dynamique (*partie 1.6.3*), cette condition est satisfaite si le plan $(O\vec{x}_1\vec{y}_1) = (O\vec{x}_0\vec{y}_0)$, soit le **plan de normale l'axe de rotation** $(O,\vec{z}_0)$ **est un plan de symétrie pour le solide S_1.**

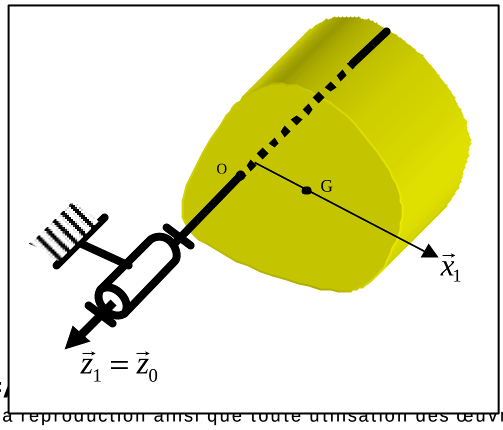
L'ensemble de ces deux conditions constitue l'équilibrage dynamique du solide S_1.

4 Cas pratique

Objectif : Rendre un solide quelconque équilibré dynamiquement.

Moyen : Changer la répartition des masses de ce solide en lui rajoutant judicieusement des masselottes, considérées comme des masses ponctuelles, afin que l'ensemble $\{\text{Solide + Masselottes}\}$ soit équilibré dynamiquement.

Montrons que dans la pratique, deux masselottes (masses ponctuelles) suffisent pour rendre l'ensemble équilibré dynamiquement :



Reprenons le paramétrage précédent :

- Soit S_1 le solide à équilibrer de centre d'inertie G avec $\overrightarrow{OG} = a\vec{x}_1 + c\vec{z}_0$ et de masse M
- Soit la première masselotte repérée 2, de centre d'inertie en son point noté G_2

avec $\overrightarrow{OG_2} = x_2\vec{x}_1 + y_2\vec{y}_1 + z_2\vec{z}_0$, de masse m_2

- Soit la seconde masselotte repérée 3, de centre d'inertie en son point noté G_3 avec $\overrightarrow{OG_3} = x_3\vec{x}_1 + y_3\vec{y}_1 + z_3\vec{z}_0$, de masse m_3

Equilibrage statique :

On veut que le centre d'inertie que l'on notera G' de l'ensemble {S_1+masselotte2+masselotte3} soit sur l'axe de rotation $(O, \vec{z}_0)$.Soit les deux projections suivantes nulles : $\overrightarrow{OG'}.\vec{x}_1 = \overrightarrow{OG'}.\vec{y}_1 = 0$

Or $\overrightarrow{OG'} = \dfrac{M\overrightarrow{OG} + m_2\overrightarrow{OG_2} + m_3\overrightarrow{OG_3}}{M + m_2 + m_3}$

On a donc les deux relations :

$\overrightarrow{OG'}.\vec{x}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = M\overrightarrow{OG}.\vec{x}_1 + m_2\overrightarrow{OG_2}.\vec{x}_1 + +m_3\overrightarrow{OG_3}.\vec{x}_1$, soit l'équation scalaire suivante :

$0 = Ma + m_2x_2 + m_3x_3$

$\overrightarrow{OG'}.\vec{y}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = M\overrightarrow{OG}.\vec{y}_1 + m_2\overrightarrow{OG_2}.\vec{y}_1 + +m_3\overrightarrow{OG_3}.\vec{y}_1$, soit l'équation scalaire suivante :

$0 = m_2y_2 + m_3y_3$

L'équilibre statique se traduit donc par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 0 = Ma + m_2x_2 + m_3x_3 \\ 0 = m_2y_2 + m_3y_3 \end{cases}$$

Equilibrage dynamique :

On doit satisfaire en plus des conditions d'équilibrage statique ci-dessus, les conditions suivantes : $D' = E' = 0$, soit les produits d'inertie de l'ensemble {S_1+masselotte2+masselotte3}nuls.

Rappel : Les produits d'inertie D et E du solide à équilibrer sont : $D = \int yz\ dm$ et $E = \int xz\ dm$.

On en déduit les produits d'inertie correspondant de l'ensemble {S_1+masselotte2+masselotte3} :

$D' = D + m_2y_2z_2 + m_3y_3z_3 = 0$ et $E' = E + m_2x_2z_2 + m_3x_3z_3 = 0$.

L'équilibrage dynamique est donc réalisé lorsque l'on a satisfait le système d'équations :

$$\begin{cases} D + m_2y_2z_2 + m_3y_3z_3 = 0 \\ E + m_2x_2z_2 + m_3x_3z_3 = 0 \\ 0 = Ma + m_2x_2 + m_3x_3 \\ 0 = m_2y_2 + m_3y_3 \end{cases}$$

On a donc 4 équations d'équilibrage avec 8 inconnues $(m_2, m_3, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3)$. Il suffit d'en fixer 4 arbitrairement (ou par facilités d'implantation technique) pour déterminer les 4 restantes afin d'équilibrer la pièce.