Cours | LIMITES ET CONTINUITÉ

Leçon 1 : LIMITES

Activités de mise en place de la leçon (pré-requis) (..... min)

Activité 1 :

Etudier les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de :

a) $x \mapsto \dfrac{x-3}{-3x^2+1}$ b) $x \mapsto \dfrac{-x^2+x+3}{8x+2}$ c) $x \mapsto \dfrac{(x^2-4)(3-x)}{x+\dfrac{1}{x}}$

Activité 2 :

Etudier les limites en a en distinguant éventuellement deux cas :

a) $f : x \mapsto \dfrac{2x-5}{3-x}$ a = 3 b) $g : x \mapsto \dfrac{x-2}{(x+1)^3}$ a = -1

c) $h : x \mapsto \dfrac{x}{(x+1)^2(x-2)}$ a = 2 ; a = -1 d) $f : x \mapsto \dfrac{2-3x}{(2x-1)^2}$ a = $\dfrac{1}{2}$

e) $g : x \mapsto \dfrac{x^2-4x+4}{2-x}$ a = 2

Activité 3 :

Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

1. Préciser l'ensemble de définition de g
2. Calculer la limite en 0 du «numérateur» et du «dénominateur». Peut-on en déduire $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$?
3. Montrer que pour tout x $\in$ D, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}$

   En déduire la limite de g en 0

Activité 4 :

On sait que $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 0$. Soit à calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{5x}$

1. Posons u = 3x. Il est clair que « quand x tend vers 0 (x $\to$ 0), u aussi tend vers 0 (u = 3x $\to$ 0) »

   Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{5x}$
2. En remarquant que $\dfrac{\sin 3x}{5x} = \left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)\left(\dfrac{3x}{5x}\right)$, déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{5x}$

Le cours (.... min)

Résultats usuels pour le calcul des limites

1. Limites de références

Soit n un entier naturel non nul et k un réel quelconque. Nous admettons les résultats suivants :

➪ $\lim\limits_{x\to+\infty}(k)=k$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(k)=k$

➪ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^n)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^n}=+\infty$

➪ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^n)=\begin{cases}+\infty & \text{si } n \text{ est pair}\\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$

➪ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{k}{x^n}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{k}{x^n}=0$

Remarques: ➥ $\lim\limits_{x\to+\infty}(kx^n)=\begin{cases}+\infty & \text{si } k>0\\ -\infty & \text{si } k<0\end{cases}$ de même $\lim\limits_{x\to-\infty}(kx^n)=$ .... (signe de k et parité de n)

➥ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x}=0$

➥ Les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite en l'infini

2. Autres résultats usuels

(R_1) En $+\infty$ ou en $-\infty$, un polynôme a même limite que son terme de plus haut degré.

(R_2) En $+\infty$ ou en $-\infty$, une fraction rationnelle a même limite que le quotient du terme de plus haut degré du numérateur par le terme de plus haut degré du dénominateur.

Attention ! *ces résultats sont valable uniquement pour une limite en $+\infty$ ou $-\infty$. Il ne faut pas l'utiliser pour une limite en 0 ou en a ($a \in \mathbb{R}^*$).*

Remarque : Certaines limites peuvent se déduire d'un calcul du nombre dérivé. Pour cela, il suffit d'observer le résultat suivant :

Soit f une fonction dérivable en un réel x_0. On a : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

Exemple : Soit à déterminer $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^5+x^4+x^3-3}{x^{12}+x^{10}-2}$

On pose : $u(x)=x^5+x^4+x^3-3$ et $v(x)=x^{12}+x^{10}-2$

- Vérifier que $\forall x\neq1$: $\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{\dfrac{u(x)-u(1)}{x-1}}{\dfrac{v(x)-v(1)}{x-1}}$
- u et v sont dérivables en $x_0 = 1$ alors : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{u(x)-u(1)}{x-1}=u'(1)$ et $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{v(x)-v(1)}{x-1}=v'(1)$

Pour tout réel x, $u'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2$ et $u'(1) = 12$; de même $v'(1) = 22$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{u'(1)}{v'(1)}=\dfrac{12}{22}=\dfrac{6}{11}$

▸ Opération sur les limites

Les tableaux suivants permettent de donner, dans certains cas, la limite de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions f et g, lorsqu'on connaît la limite des deux fonctions.

La plupart des résultats se comprennent de façon intuitive. l et l' désignent des nombres réels.
Les limites peuvent être des limites en $+\infty$, en $-\infty$, en x_0, des limites à droite ou à gauche, mais bien entendu toutes les limites utilisées doivent être de la même nature.
(Il n'est, par exemple, pas question d'utiliser le tableau avec la limite de f en $+\infty$ et la limite de g en 0)

Limite d'une somme

Si f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors f + g a pour limite	l + l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	pas de résultat général

Limite d'un produit

Si f a pour limite	l	$l \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si g a pour limite	l'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors f x g a pour limite	$l \times l'$	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	pas de résultat général

Limite d'un inverse

Si g a pour limite	$l' \neq 0$	0 par valeurs supérieures	0 par valeurs inférieures	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{1}{f}$ a pour limite	$\frac{1}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Les résultats deux tableaux précédents permettent de trouver les résultats pour un quotient :

Limite d'un quotient

Si f a pour limite	l	l	$l \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Si g a pour limite	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures	0	0 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	pas de résultat général	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	pas de résultat général

Remarque

Lorsque le tableau ne donne pas de résultat général, on parle souvent de «**forme indéterminée**» (FI).
Les formes indéterminées sont de 4 types exprimés sous forme abrégée par :

$(+\infty) + (-\infty)$ [ou encore : $(-\infty) - (-\infty)$; $(+\infty) - (+\infty)$]	$0 \times \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$

Ces notations, incorrectes, sont à proscrire dans un devoir rédigé.

Fonctions composées

Soit a , b et l des nombres réels éventuellement égal à -∞ ou +∞
Soit $g \circ f$ la composée de deux fonctions et a un élément ou une borne d'un intervalle sur lequel $g \circ f$ est définie

si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = l$ alors $\lim\limits_{x \to a} gof(x) = l$

Cas particulier

Si $f(x) \geq 0$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ $(l \geq 0$ ou $l = +\infty)$ Alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$ (= +∞ si l= +∞)

Limites et relation d'ordre

si ➘	et si ➘	alors ➘
Hypothèse1 inégalité pour x assez proche de a	**Hypothèse 2** **comportement lorsque x tend vers a**	Conclusion
$u(x) \leq f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$
$f(x) \leq u(x)$	$\lim\limits_{x \to a} u(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$
$\lvert f(x) - l \rvert \leq u(x)$	$\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$
$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$	u et v tendent vers la même limite l	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ (théorème des gendarmes)
$f(x) \leq g(x)$	f et g admettent des limites en a	$\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Exercices d'applications + Devoirs

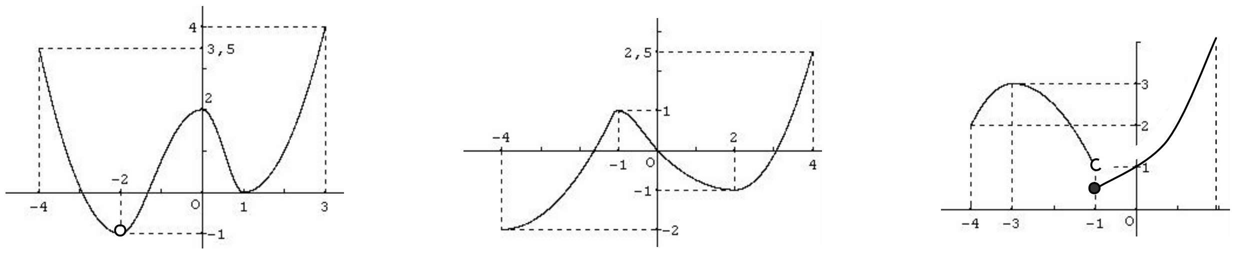
Voir fiche de travaux

Leçon 1 : CONTINUITÉ

Activités de mise en place de la leçon (pré-requis) (… min)

Activité 1 :

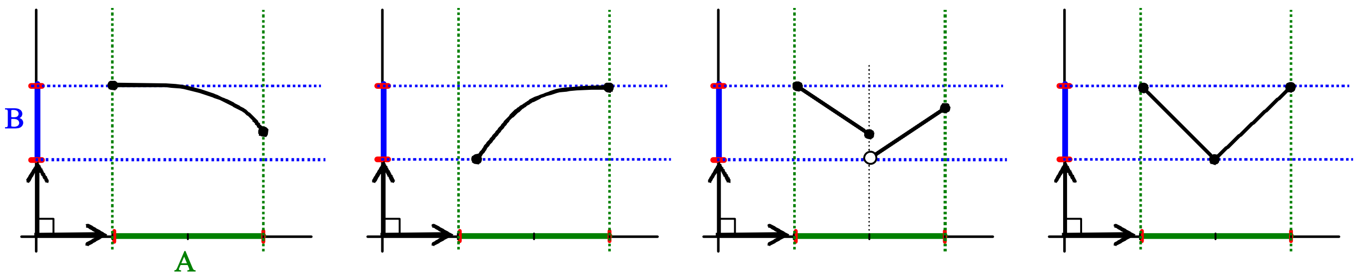
Pour chacune des figures proposées, préciser l'ensemble de définition et étudier graphiquement la continuité.



Oup's !
Un trait (ou une ligne) est dit continue s'il ne présente aucun saut. Autrement dit, on peut le tracer sans lever le crayon.

Activité 2 :

Soit A et B deux intervalles fermés de IR. On donne les représentations graphiques d'applications de A vers B ci-dessous.
Dans chaque cas, dire si l'application est surjective, injective ou bijective.



Oup's !
Soit f une fonction définie d'un ensemble A vers un ensemble B (f : A $\to$ B).
- f est injective si, pour élément k de l'ensemble B, l'équation f(x) = k admet au plus une solution dans A
- f est surjective si, pour élément k de l'ensemble B, l'équation f(x) = k admet au moins une solution dans A
- f est bijective si, pour élément k de l'ensemble B, l'équation f(x) = k admet exactement une solution dans A (dans ce cas, f est injective et surjective)

Activité 3 :

Les fonctions f et g sont définie sur [-3 ; 6] ; leurs représentations graphiques sont données ci-dessous

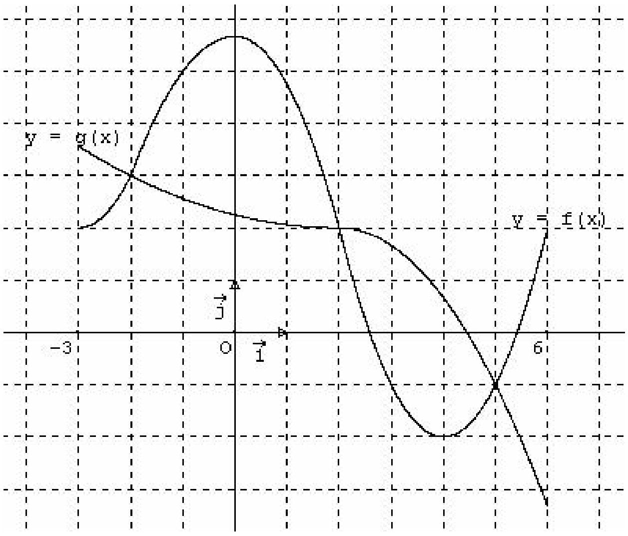
1. Répondre par Vrai ou Faux aux questions suivantes
   a) 1 a pour image 2 par la fonction f
   b) -2 a pour image 3 par la fonction g
   c) 3 est un antécédent de -2 par la fonction f
   d) 2 a trois antécédents par la fonction f
   e) f(x) $\geq$ g(x) sur l'intervalle [2 ; 5]
   f) g est décroissante sur l'intervalle [-3 ; 6]
   g) pour tout $x \in [-3 ; -1]$, $2 \leq f(x) \leq 5$

2. Compléter le tableau suivant :

Équation ou inéquation	solution
f(x) = 2	
f(x) = g(x)	
f(x) ≤ g(x)	

3. Déterminer, par lecture graphique, l'image de :
   a) [-2 ; 2] par g
   b) [1 ; 4] par f

4. Déterminer, par lecture graphique, l'image réciproque de :
   a) [-1 ; 5] par f
   b) [-3 ; -2] par g



Le cours

1. Généralités

Définition 1.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel a (i-e f(a) existe).
Lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, on dit que f est continue en a .

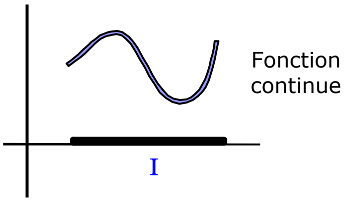
Remarques:

- Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$ (respectivement $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$) : on parle de **continuité à gauche en a** (respectivement **à droite de a**) .
- f est continue en a si et seulement si : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ = f(a)

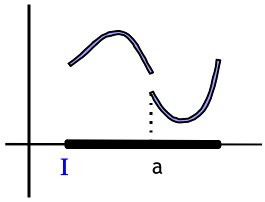
Définition 2.
f est continue sur l'intervalle [a ;b] si et seulement si :
- f est continue en tout point de]a ; b[
- f est continue à gauche du point b
- f est continue à droite du point a

Remarque :

Graphiquement, on reconnaît[1] qu'une fonction f est continue sur I lorsqu'on peut tracer sa courbe sur l'intervalle I sans lever le stylo de la feuille.



Une fonction n'est pas continue en un point a lorsque la courbe a une discontinuité en a, elle fait un "saut".



Convention

Il est convenu que, dans un tableau de variation de fonction, les flèches obliques indiquent que la fonction est continue et strictement monotone.

Exemple

Le tableau de variation de la fonction carré (f(x) = x^2) signifie que la fonction carré est continue et strictement décroissante sur]-∞ ; 0] et qu'elle est continue et strictement croissante sur [0 ; +∞[

x	-∞		0		+∞
f	+∞	↘	0	↗	+∞

2. Fonctions usuelles

Propriétés1

(P1) Toute fonction polynôme est continue sur IR

(P2) Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle où elle est définie

(P3) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur [0 ; +∞[

(P4) Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues sur IR

(P5) La fonctions $x \mapsto \tan x$ est continue sur tout intervalle de la forme $\left]\frac{\pi}{2} + k\pi \; ; \; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$ (k ∈ Z)

(P6) Si f et g sont des fonctions continues sur un intervalle I , il en est de même pour :
- La somme f + g
- Le produit f . g
- Le produit extérieur α.f (α ∈ IR)

(P7) Si f et g sont des fonctions continues sur un intervalle I, et si de plus f(x) ≠ 0 pour tout x ∈ I alors le quotient f / g est continue sur I.

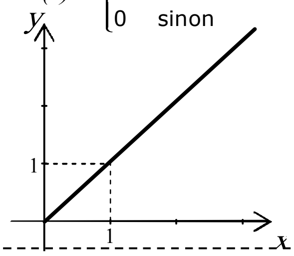
(P8) Si f est une fonction continue sur un intervalle I, et si de plus f(x) ≥ 0 pour tout x ∈ I alors La racine carrée $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Proprieté2

- Si f est une fonction continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 .
- Si f est une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur un intervalle J contenant f(I), alors $g \circ f$ est continue sur I

Exemple (fonction dont la représentation graphique ne laisse pas apparaître les points de discontinuité)

f définie sur IR_+ par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



[1] Il y a néanmoins des réserves à souligner. Le visuel que nous avons De la représentation graphique de certaines fonctions (très complexes) ne laisse pas toujours apparaître les points de discontinuités. On y parviendrait pas même avec un super microscope.

3. Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle]a ; b] et vérifiant $\lim_{x \to a} f(x) = l$ ($l \in$ IR) ; alors la fonction g définie sur [a ;b] par $\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \neq a \\ g(a) = l \end{cases}$ est appelé le prolongement par continuité de f en a .

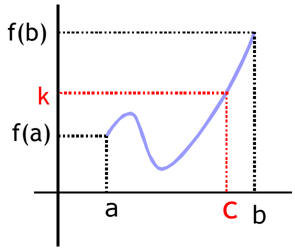
4. Image d'un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaire et conséquences

Résultat 1 (admis)

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors f (I) est un intervalle.

Résultat 2 (admis)



Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Soient a $\in$ I et b $\in$ I
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), il existe au moins
un réel c compris entre a et b tel que f(c) = k

Ce que l'on peut aussi exprimer sous la forme :
L'équation f(x) = k a au moins une solution c comprise entre a et b.

Remarques :
L'image, par une fonction numérique continue, d'un intervalle fermé et borné (type [a , b]) est un intervalle fermé et borné
Par contre, si I n'est pasun intervalle fermé, l'intervalle f(I) n'est pas nécessairement de même nature que I.
Par exemple :
- l'image de l'intervalle ouvert]-1 , 1[par la fonction $x \mapsto x^2$ est l'intervalle semi-ouvert [0 , 1[
- l'image de l'intervalle ouvert]-π , π[par la fonction $x \mapsto$ sinx est l'intervalle fermé [-1 , 1]

Conséquence : Application aux équations numériques

Soit f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de IR.
S'il existe deux valeurs a, b de I tels que f (a). f (b) < 0 ,
alors l 'équation f (x) = 0 admet au moins une solution dans]a ; b[ou]b ;a[

Remarque (contraposée du résultat précédent)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de IR. Si f ne prend pas la valeur 0 (si f ne s'annule pas sur I), f garde un **signe constant** sur I.

5. Fonction continue et monotone

Théorème

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors :
(1) f(I) est un intervalle de **même nature** que I
(2) f est une **bijection** de I vers J = f(I)
(3) Pour tout réel m $\in$ f(I) , l'équation f(x) = m admet une unique solution dans I
(4) La bijection réciproque, notée f^{-1} , est continue sur l'intervalle f (I) et a le même sens de variation que f

Remarque

Les courbes (C_f) et ($C_{f^{-1}}$) représentatives de f et f^{-1} respectivement , se déduise l'une de l'autre par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation y = x (1ère bissectrice)

Corollaire

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle [a ; b]. Si f(a) et f(b) sont de signes contraires (i-e: f(a) . f(b) < 0) ,
alors l'équation f(x) = 0 admet une solution et une seule dans l'intervalle ouvert]a ; b[.

Image d'un intervalle par une fonction continue et monotone

Résultats

a et b désignant des nombres réels ou $\pm\infty$, f étant une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I :

Si I est égal à …	f(I) est l'intervalle	
	f est croissante sur I	f est décroissante sur I
[a ; b]	[f(a) ; f(b)]	[f(b) ; f(a)]
[a ; b[	[f(a) ; $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ [	] $\lim\limits_{x\to b} f(x)$; f(a)]
]a ; b]	] $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; f(b)]	[f(b) ; $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ [
]a ; b[	] $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ [	] $\lim\limits_{x\to b} f(x)$; $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ [

Exercices d'applications + Devoirs

Voir fiche de travaux

Leçon 3 : FONCTION RACINE N-IEME

Définition

Soit n ∈ $\mathbb{N}^*$ et f_n la fonction de IR_+ vers IR_+ définie par $f_n(x) = x^n$:

- f_n est continue et strictement croissante sur IR+
- $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

Alors f_n est une bijection de IR_+ vers IR_+ : elle admet une bijection réciproque de IR_+ vers IR_+

La fonction racine n-ième , notée $\sqrt[n]{\ }$, est la bijection réciproque de la fonction $\left| \begin{array}{l} f_n : IR_+ \to IR_+ \\ \quad x \mapsto x^n \end{array} \right.$

La racine n-ième d'un nombre positif x s'écrit $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$

Pour n = 2 , on parle de racine carrée et on écrit simplement $\sqrt{x}$ ou $x^{\frac{1}{2}}$

Remarques

- On a $\begin{cases} x \in IR_+ \\ y = \sqrt[n]{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in IR_+ \\ x = y^n \end{cases}$
- $\forall x \in IR_+$ $(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$
- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur IR^+

Puissance d'exposant rationnel

Soit p ∈ $\mathbb{Z}^*$, $q \in IN^*$ et x ∈ IR^+

On appelle x à la puissance $\frac{p}{q}$ le nombre réel , noté $x^{\frac{p}{q}}$ définie par : $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}} \right)^p = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$

Remarques :

- Soit r et r' deux rationnel non nuls , et x un élément de IR* ; on a : $x^r \cdot x^{r'} = x^{r+r'}$
- On étant aux puissances d'exposants rationnels toutes les propriétés de calculs établies pour les puissances d'exposants entiers.

Limites et continuité

- La fonction $\sqrt[n]{\ }$, où $n \in IN^*$ est continue en tout point de]0 ; +∞[et continue à droite en 0
- Soit la fonction $\sqrt[n]{f} : x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$: $\left| \begin{array}{l} \bullet \text{ si } \lim f = l > 0 , \text{ alors } \lim \sqrt[n]{f} = \sqrt[n]{l} \\ \bullet \text{ si } \lim f = +\infty , \text{ alors } \lim \sqrt[n]{f} = +\infty \end{array} \right.$

Résolution de l'équation $x^n = a$

Soit $a \in IR^*$, $n \in IN^*$ et x l'inconnue dans IR

	n pair	n impair
a > 0	2 solution de signes contraires : $x_1 = \sqrt[n]{a}$; $x_2 = -\sqrt[n]{a}$	Une solution positive : $x_0 = \sqrt[n]{a}$
a < 0	Pas de solution	Une solution négative : $x_0 = -\sqrt[n]{-a}$

Leçon 4 : ASYMPTOTES

Activités de mise en place de la leçon (pré-requis) (… min)

Activité 1 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x-3}{2-x}$

1. Déterminer le domaine de définition D de f
2. Calculer les limites de f aux bornes de D et en donner une interprétation graphique

Activité 2 :

On considère la fonction numérique f d'une variable réelle x définie par le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-2		1		2		4		$+\infty$
f'(x)			‖				‖				
f(x)	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$3/4$	↗	1

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. Préciser les limites de f aux bornes de son domaine de définition et préciser les asymptotes à la courbe (C) de f

Activité 3 :

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère du plan

1. Déterminer les réels a, b et c tels que l'on ait $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$
2. En déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$
3. Etudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote

Le cours

1. <u>Asymptotes parallèles aux axes de coordonnées</u>

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère

- <u>Asymptote horizontale</u>

Lorsque f a une limite finie l (respectivement l') en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) , on dit que la droite d'équation y = l (respectivement y = l') est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$)

- <u>Asymptote Verticale</u>

Lorsque f a un limite finie à droite ou à gauche en nue valeur x_0 , on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à la courbe (C)

2. <u>Asymptote non parallèles aux axes</u>

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ et (C) sa courbe représentative dans le plan.

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ $\left(\text{resp. } \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(a'x+b')]=0 \right)$, on dit que la droite d 'équation $y = ax + b$ (resp. $y = a'x + b'$) est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$)

La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax] = b$

Remarque (cas général)

Plus généralement, les courbes représentatives de deux fonctions f et g sont asymptotes l'une de l'autre lorsque : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)] = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)] = 0$

3. Direction asymptotique

Soit f une fonction numérique telle que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ et (C) sa courbe représentative dans le plan.

- **Direction (O y)**

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on dit que (C) admet une branche parabolique de direction (O y) en $+\infty$ (resp. en $-\infty$ si $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \pm\infty$)

- **Direction (O x)**

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que (C) admet une branche parabolique de direction (O x) en $+\infty$ (resp. en $-\infty$ si $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$)

- **Direction y = ax**

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a$ $(a \in IR^*)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax] = \infty$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation y = ax

Remarque

Il est possible que le quotient $\frac{f(x)}{x}$ n'ait pas de limite ou que $\frac{f(x)}{x}$ ait une limite sans que (C) admette une branche parabolique. L'étude de telles fonctions sera suffisamment détaillé par des indication.

Exercices d'applications + Devoirs

Voir fiche de Travaux