TABLE DES MATIERES

OBJECTIFS DU COURS

Ce cours a pour vocation de présenter les décisions financières les plus importantes qu'un financier est appelé à prendre, à savoir les décisions d'investissement et de financement. La décision d'investissement implique une mise de fonds initiale, un arbitrage dans le temps, une allocation de ressources et un pari sur l'avenir afin d'améliorer ou maintenir la rentabilité ou la valeur de l'entreprise à long terme. Cette décision consiste à l'affectation du capital à des projets d'investissement, c'est le Capital Budgeting. La décision de financement consiste à déterminer la meilleure combinaison de financement de capital de l'entreprise (dettes et fonds propres).

L'objectif ultime de ce cours est d'aider les étudiants à recenser le lien entre la planification stratégique et les décisions financières à long terme en vue de les conduire à mieux appréhender des situations de gestion et de prise de décision. Il vise en outre à ce que les étudiants maîtrisent l'outil d'aide à la décision financière à long terme : actualisation, critères de choix d'investissement, opérations financières à long terme dans l'objectif de savoir élaborer et simuler un plan financier.

Ce cours met en évidence le problème de choix d'investissement en avenir certain, incertain et risqué. Il expose également les divers modes de financement à long terme et présente le mécanisme de calcul du coût de chaque actif financier utilisé dans le financement de l'entreprise pour en déduire le coût de capital. Ce cours incite par ailleurs les étudiants à savoir et comprendre les critères de choix d'investissement de façon à hiérarchiser et arbitrer différents projets : savoir analyser et choisir les modes de financement en étudiant leurs incidences sur le taux d'actualisation.

Chapitre 1

DECISION D'INVESTISSEMENT EN AVENIR CERTAIN

Le choix ou décision d'investissement est le processus utilisé pour évaluer et sélectionner les investissements à long terme dans l'objectif de maximiser la richesse des actionnaires. Lorsqu'elle est face à un tel problème, l'entreprise peut avoir à décider de l'acceptation ou du rejet d'un projet isolé ou d'un paquet de projets mutuellement exclusifs ou complémentaires. Ces derniers doivent être analysés comme un seul projet. Dans le cas d'un paquet de projets, on peut être confronté à plusieurs situations qui doivent être traitées différemment (situation d'abondance du capital et de projets mutuellement ou non exclusifs ; situation de rationnement du capital et de projets mutuellement ou non exclusifs).

Dans le présent chapitre, nous traiterons la décision d'investissement en se plaçant dans un monde parfait et exempt de toute incertitude. La certitude correspond à une situation où l'avenir est parfaitement connu à l'avance. Un marché parfait correspond à un marché où toute l'information est disponible gratuitement, où il n'en coûte rien de transiger et où les transactions d'un investisseur n'influencent en rien l'ensemble des transactions du marché. Dans un monde de certitude et de marché parfait, il est inconcevable qu'un investisseur accepte d'acheter des titres qui rapportent moins que d'autres. Tous les titres doivent être également tous détenus. Il faudra donc qu'ils aient tous le même rendement, pour une période donnée. Il s'ensuit que dans un tel contexte, la distinction entre fonds propres et externes n'a pas réellement de sens. La décision d'investissement peut alors être analysée séparément de la décision de financement.

Nous présenterons d'abord la notion et les motifs de l'investissement, nous étayons par la suite les différents paramètres de l'investissement et nous traiterons enfin les critères de choix d'investissement aussi bien dans le cas d'un seul projet que d'un portefeuille de projets.

Section 1. La notion et les motifs de l'investissement

L'investissement dans la théorie économique désigne l'accroissement du stock de capital pendant une période donnée. Traduit dans le contexte de l'entreprise, l'investissement représente l'ensemble des fonds mobilisés aussi bien dans les acquisitions effectuées dans l'année que pour les besoins de financement du cycle d'exploitation.

Au sein de cette section, nous allons définir la notion de l'investissement, en présenter les différents objectifs et les diverses catégories.

1. Définitions de l'investissement

A son niveau le plus général, « l'acte d'investir est la renonciation à une consommation (satisfaction) immédiate et certaine contre une consommation (ou exactement une espérance) future dont le bien investi constitue le support »[1].

Au niveau de l'entreprise, l'investissement implique une mise de fonds au départ, un arbitrage dans le temps quant à l'allocation des ressources et un pari sur l'avenir. C'est la raison pour laquelle il constitue la décision la plus importante au niveau de l'entreprise et mobilise le plus de moyens.

Dans le jargon comptable, l'investissement consiste en l'immobilisation par l'entreprise de capitaux dans l'acquisition d'actifs (à long ou à court terme) nécessaires à son activité d'exploitation.

Plus concrètement, l'investissement à long terme (c*apital investment*) est défini comme tout projet entraînant une mobilisation immédiate ou étalée dans le temps de capitaux pour l'acquisition d'actifs à long terme en échange d'une anticipation de flux futurs pour une longue période (généralement plusieurs années). C'est une opération financière qui

[1] Pierre Massé [1959, p. 1]

consiste à engager dans le présent une dépense dans l'espoir de recevoir en retour des recettes futures échelonnées dans le temps.

Cet investissement à long terme est contrasté par l'investissement à court terme ou dans le cycle d'exploitation (*expense investment*) dont l'objet est la mobilisation des dépenses pour l'acquisition d'actifs à court terme (cycle d'exploitation).

2. Les motifs d'investissement

La raison essentielle d'investir est l'amélioration ou le maintien de la rentabilité ou de la valeur de l'entreprise sur le long terme. Toutefois, et selon la situation, des raisons spécifiques peuvent en être la cause. Sans prétendre l'exhaustivité, on peut citer à titre d'exemples :

- Améliorer la productivité via une économie en temps de travail, en énergie consommée, en matière utilisée, en coût de transport etc. ;
- Réduire le cycle de production (en optant pour le juste à temps) ou les délais d'acheminement (en s'approvisionnant en flux tendus) ;
- Améliorer la qualité du produit ou du travail (élimination des tâches répétitives, renforcement de la sécurité pour minimiser les accidents du travail, mise en place de cercles de qualité) ou bien adopter un système de gestion en qualité totale (TQM) ;
- Augmenter la capacité de production et de vente soit par l'acquisition d'actifs physiques soit à travers des opérations de fusions – acquisitions ;
- Profiter d'avantages fiscaux ou de crédit de taxe à l'investissement ;
- Améliorer la compétitivité en investissant en recherche et développement ;
- Former son personnel (cycles de formation, recyclage, stages, colloques…).

3. Classification des investissements

Les investissements peuvent être classés selon leur nature, selon leur destination ou selon leur objectif.

Dans un **classement par nature**, on distingue :

- Les investissements physiques ou corporels : acquisition de terrain, acquisition ou construction d'immeubles, acquisition d'équipements immobiliers ou mobiliers ;
- Les investissements immatériels ou incorporels : acquisition d'un fonds de commerce ou d'un brevet, dépenses en recherche ou de prospection, études économiques, technique ou de marché ;
- Les investissements financiers : acquisitions de toutes sortes de titres ;
- Les investissements humains : dépenses de formation, stages de recyclage, etc.

Dans un **classement par destination**, on distingue :

- Les investissements de remplacement : il s'agit du renouvellement d'un équipement amorti techniquement (par usure) ou économiquement (par désuétude) par un autre neuf ;
- Les investissements d'expansion : construction d'une nouvelle usine, accroissement de la capacité productive pour faire face à une demande croissante ;
- Les investissements de modernisation ou d'innovation : ce son les investissements destinés à comprimer les coûts et augmenter la productivité ou bien améliorer la qualité des produits existants ou la mise au point et le lancement d'un produit nouveau.

Enfin, dans un **classement par objectif**, on distingue :

- Les investissements de croissance : acquisition d'équipements nouveaux ou par rachat d'une société extérieure. Ce type d'investissement a pour objectif d'augmenter la capacité productive, de développer de nouveaux produits ou bien de se diversifier vers d'autres secteurs d'activités ;

- Les investissements de rationalisation : substitution de facteurs de production (capital/travail) à une modernisation du matériel ou à une flexibilité de la production. Ces investissements ont pour objectif de réduire les coûts (augmentation de la productivité du travail, réduction des coûts de fonctionnement) ou du risque (diversification des sources d'approvisionnement).

Section 2. Les paramètres de l'investissement

En se référant aux critères les plus utilisés dans le choix d'investissement. On retient quatre paramètres indispensables à l'évaluation de la rentabilité de tout projet à savoir le coût d'investissement, cash-flows, durée de vie et taux d'actualisation.

4. Le montant ou le coût d'investissement

Ce coût est composé de deux éléments, à savoir le coût d'acquisition ou de construction associé au projet et le besoin en fonds de roulement nécessaire pour relancer le cycle d'exploitation et financer son démarrage.

4.1. Le coût d'acquisition

Ce coût inclut le prix d'acquisition augmenté de tous les frais accessoires. Les frais accessoires comprennent aussi bien les frais de douane, de transport, d'installation et de montage, de mise en marche, de TVA non récupérable que les frais de prospection, d'études, de faisabilité et de formation. Toutefois, tous les frais de montages financiers et ceux associés à la collecte des fonds sont exclus car ils sont déjà pris en considération dans le calcul du taux d'actualisation et entrent alors dans le coût de financement. Les investissements complémentaires à réaliser après le démarrage doivent être distingués des dépenses assimilées à des charges et inclus dans le coût d'investissement après actualisation.

Dans le cas d'un projet de remplacement, on applique le raisonnement différentiel. On comptera donc le coût de remplacement net des cessions et de l'effet de l'impôt associé à la plus ou moins value de cession.

Remarque 1 : Les actifs en possession de l’entreprise, et qui seront utilisés par le projet, doivent être pris en considération. Ce sont les **coûts d’opportunité**. Même si ces actifs ne sont pas utilisés auparavant, il faudra les intégrer à leur valeur d’usage ou la valeur actualisée des revenus qu’ils pourraient générer dans le futur. On peut citer à titre d’exemple d’un terrain abandonné appartenant à l’entreprise. Ce terrain devra être inclus à sa valeur d’usage (c'est-à-dire au prix qu’on aurait payé si on l’avait acheté) s’il est utilisé dans un projet d’investissement.

Remarque 2 : Les dépenses irrécupérables ou fonds perdus ayant été effectuées (***sunk costs***) ne sont pas à prendre en compte car ce sont des coûts payés que le projet soit entrepris ou non. Ces fonds sont engagés avant l’adoption du projet. Même si ces fonds concernent le projet en étude, ils seraient considérés comme perdus s’ils avaient été dépensés avant et en dehors du cadre de l’analyse du projet. Cependant, il ne faut pas confondre ces coûts avec ceux faisant partie de l’étude de faisabilité, qui sont une partie intégrante des coûts d’investissement. Aux termes utilisés par Brealy et Myers (1977), les coûts irrécupérables correspondent au « lait renversé ». On peut citer l’exemple suivant de fonds perdus : une société d’industrie laitière est en train d’étudier la rentabilité du lancement d’un nouveau produit (chocolat au lait). Cette société a payé l’année dernière 10 000 DT à un consultant pour une étude de marché s’intégrant dans un processus d’évaluation de la société. Ces dépenses seront considérés comme fonds perdus et ne seront pas inclus dans le coût d’investissement étant donné qu’elles étaient engagées avant l’idée du nouveau projet et elles ne peuvent pas être récupérées.

Remarque 3 : Certaines entreprises peuvent profiter des subventions. Chaque actif subventionné doit alors figurer au prix réduit et son amortissement doit se faire aussi sur la même base. Par exemple, si un matériel coûtant 200 000 DT rend l’entreprise admissible à une subvention de 20 000 DT, le coût net qui doit figurer dans le calcul de la VAN sera de 180 000 DT qui fera à son tour la base de calcul des amortissements.

4.2. Le besoin en fons de roulement

Ce montant couvre le besoin de financement supplémentaire du cycle d'exploitation occasionné par le projet. L'entreprise a toujours besoin d'argent pour financer son cycle d'exploitation car il s'écoule généralement un laps de temps entre la date d'acquisition des matières premières et la date de livraison des produits finis ou de recouvrement des créances. Il englobe toutes les dépenses nécessaires au financement du démarrage (de l'acquisition des stocks jusqu'à l'encaissement des ventes).

FR = Capitaux permanents – Emplois stables = CP + DLMT – ANC

= (AC + AT) – (PC + PT) = (AC – PC) + (AT – PT) = BFR + TN

Plusieurs méthodes sont proposées pour prévoir le BFR. Nous citons à titre d'exemple la méthode proportionnelle, la méthode du taux d'expansion, la méthode du plan comptable, la méthode probabiliste, etc. Toutefois, puisque le BFR varie constamment au cours de l'exercice, on admet qu'une bonne situation est celle pour laquelle le fonds de roulement est égal au BFR moyen qui est appelé aussi besoin en fonds de roulement normatif. Deux méthodes sont généralement utilisées : la méthode de délais et la méthode des experts comptables.

❖ ***Evaluation selon la méthode des experts comptables :*** cette méthode consiste à évaluer chaque poste (P) en jours de CAHT en faisant intervenir le temps d'écoulement (TE) et les coefficients de structure (CS). Ainsi P = TE x CS.

❖ ***Evaluation selon la méthode des délais :*** Plusieurs méthodes de calcul sont proposées. La plus simple consiste à évaluer d'abord les différentes composantes du BFR en multipliant leur délai par la consommation par jour et faire ensuite leur sommation.

Ces deux méthodes se basent sur les mêmes hypothèses, mais suivent des démarches différentes pour les calculs. Nous exposons dans ce qui suit les hypothèses et le principe des deux méthodes.

Hypothèses :

- L'activité de l'entreprise est uniformément répartie sur la durée de l'exercice ;
- Le BFRN est directement proportionnel au CAHT. Chacun des postes constituant le BFRN est lui-même directement proportionnel au CAHT. On aura : BFRN = k x CAHT.
- Sauf changement dans les conditions d'exploitation, les coefficients de proportionnalité restent constants dans le temps.

Application 1 :

Les achats hors taxes de matières premières et le CAHT s'élèvent respectivement à 200.000 D et 800.000 D. Les fournisseurs sont réglés à 30 jours fin de mois alors que la durée du crédit accordée aux clients est de 40 jours. Calculer le BFR selon la méthode des experts comptables et la méthode des délais. Taux de TVA est 18%.

Solution :

BFR = Clients – Fournisseurs

1- La méthode des experts comptables

Poste	Délai d'écoulement	Coefficient de structure (CS)	Poste en j du CAHT
Clients	40 j	$\frac{CATTC}{CAHT}$ =1,18	47,200
Fournisseurs	$\frac{30}{2}$ + 30 = 45 j	$\frac{Achats\ TTC}{CAHT} = \frac{200.000\ x\ 1{,}18}{800.000}$ = 0,295	13,275
BFR en jours du CAHT			33,925

BFRN en D = 33,925 J x CAHT = $\frac{33{,}925\ x\ 800.000}{360}$ =75.388,9 D

2- La méthode des délais

Poste	Temps d'écoulement	Consommation par jour	TE x Cons.

Clients	40 j	$\frac{CATTC}{360} = \frac{800.000\ 1{,}18}{360}$ =2.622,222	104.888,889
Fournisseurs	$\frac{30}{2}$ + 30 = 45 j	$\frac{Achats\ TTC}{360} = \frac{200.000\ x 1{,}18}{360}$ =655,556	29.500,000
BFR en DT			75.388,889

Rappel :

Délai de recouvrement des clients : $\frac{Clients\ x\ 360\ j}{CATTC}$

Délai de recouvrement des fournisseurs : $\frac{Fournisseurs\ x\ 360\ j}{Achats\ TTC}$

5. Les cash-flows

Il s'agit des flux de trésorerie associés à l'exploitation du projet ; autrement dit, des flux de trésorerie rapportés par le projet pendant toute sa durée. Deux méthodes sont proposées pour calculer les cash-flows : la méthode comptable et la méthode encaissement-décaissement.

5.1. La méthode comptable

La méthode consiste à récupérer les cash-flows à partir de l'état de résultat. Les flux d'exploitation attachés à un projet sont obtenus en ajoutant au bénéfice net, calculé sans tenir compte des frais financiers, les amortissements car ceux-ci représentent en réalité un moyen pour récupérer des montants déjà investis.

CF = (R – D – A) (1 - T) + A = (1 – T) (R – D) + T A

Où CF les cash-flows ; R les recettes d'exploitation ; D les dépenses d'exploitation ; A l'amortissement ; T le taux d'imposition sur les bénéfices.

	0	1	..	n

			.	
Chiffre d'affaires - Charges décaissables - Charges non décaissables				
Résultat avant impôt				
- Impôt				
Résultat net				
+ Charges non décaissables				
+VR				
- Impôt sur plus-value				
- Δ BFR				
Cash-flow net				

5.2. La méthode encaissement-décaissement

Le cash-flow ou le flux de trésorerie est donné par la différence entre :

- D'une part, les revenus ou plus exactement les recettes associées au projet et qui sont encaissables;
- Et d'autre part, les dépenses d'exploitation et d'impôt liées au projet et décaissables.

	0	1	...	n
Encaissements Chiffre d'affaires Economie d'impôt sur charges décaissables Economie d'impôt sur charges non décaissables				

Valeur résiduelle Récupération BFR				
Total encaissements (1)				
Décaissements Investissement initial Charges décaissables Perte d'impôt sur chiffre d'affaires Perte d'impôt sur plus-value Financement BFR				
Total décaissements (2)				
Cash-flow net = (1) – (2)				

Remarque 1 : Lors du calcul des CFN, nous ne tiendrons pas compte des charges financières étant donné que la décision d'investissement est prise indépendamment de la décision de financement car on opère dans un marché financier parfait.

Remarque 2 : Lors du calcul des CFN, nous excluons les charges non décaissables (amortissements et provisions) puisqu'elles n'affectent pas les décaissements mais nous mesurons juste leur effet sur l'impôt à payer (économie d'impôt encaissée).

Remarque 3 : L'activité de l'entreprise génère souvent un besoin de fonds de roulement né du décalage entre les dates de réalisation des opérations et leurs règlements, et entre les dates des encaissements et décaissements. Le cash-flow doit être alors ajusté par la variation du BFR. La récupération du BFR est considérée comme un encaissement alors que le financement du BFR correspond à un décaissement.

Remarque 4 : Dans le cas d'un report déficitaire associé au projet et ne pouvant faire l'objet de compensation avec le reste de l'activité, l'économie d'impôt associée au déficit sera reportée également sur les exercices ultérieurs.

Remarque 5 : Les recettes associées aux cessions d'actifs du projet sont intégrées dans les cash-flows après la prise en compte de l'effet de l'impôt sur les plus ou moins values de cession. Lorsqu'on réalise une plus-value, on doit payer l'impôt. Au contraire, si on réalise une moins-value sur la vente, l'impôt sur cette moins-value constitue un encaissement pour l'entreprise.

Remarque 6 : Dans le cas d'un investissement permettant de réduire les coûts d'exploitation et sans effet sur les recettes, les flux de trésorerie correspondant à l'économie des coûts constituent les cash-flows du nouvel investissement.

Remarque 7 : L'approche marginale ou différentielle s'impose lorsqu'il s'agit d'un problème d'extension ou de remplacement d'un matériel. Pour déterminer les flux monétaires imputables au projet de remplacement, il s'agit de comparer année par année le flux monétaire dans les deux situations :

- ✓ si le nouveau projet est accepté (situation 2)
- ✓ si le nouveau projet n'est pas accepté (situation 1)

Les flux monétaires à imputer au projet à étudier se calculent alors ainsi :

FM projet = FM situation 2 – FM situation 1

6. La durée de vie du projet

C'est la période de temps pendant laquelle le projet peut générer des flux monétaires jugés satisfaisants. Il faut distinguer trois durées différentes ayant chacune son influence particulière sur l'évaluation de la rentabilité : la durée de vie technique, la durée de vie économique et la durée de vie fiscale.

6.1. La durée de vie technique

Cette durée est en principe communiquée par le constructeur et correspond à la durée de vie probable du bien compte tenu des conditions et de l'intensité de son utilisation.

6.2. La durée de vie économique

Cette durée correspond à la durée de vie probable du produit compte tenu de l'évolution des goûts, de la technologie, obsolescence, demande sur le marché, etc.

6.3. La durée de vie fiscale

C'est la durée fixée par les autorités fiscales.

Généralement, on retient la durée de vie la plus courte. Pour l'analyse de la rentabilité, le choix s'effectue entre la durée économique et la durée technique. On retient la durée la plus courte entre les deux. La durée fiscale ne sert que pour le calcul de l'économie d'impôt associée à la charge d'amortissement.

7. Le taux d'actualisation

C'est le coût du capital destiné à financer le projet. Plusieurs définitions lui sont données (taux de rendement requis, taux de rejet, coût d'opportunité, coût de renonciation à la liquidité immédiate), mais convergent toutes vers la même mesure, à savoir le coût moyen pondéré des différentes sources de financement de l'investissement. Lorsque le projet est financé par plusieurs sources, il faut tenir compte du coût spécifique de chaque source et des économies d'impôt qui peuvent en découler.

Lorsque le projet est financé totalement par des fonds propres, le taux d'actualisation correspond au taux de rendement économique. Il est composé du taux sans risque et d'une prime de risque économique. Cette prime est la somme de deux composantes : une prime de risque liée à l'activité normale ou actuelle plus une prime de risque spécifique au projet.

Application 3 :

Soit une entreprise ABC qui vous demande l'adoption d'un projet. Elle vous communique les informations suivantes :

- Le chiffre d'affaires annuel prévu durant les dernières cinq années est de 360.000 D ;
- Les matières premières coûteront annuellement 120.000 D ;

- Autres charges d'exploitation : 120.000 D ;
- L'investissement nécessite l'achat d'une machine de valeur de 300.000 D amortissable sur 5 ans.
- Taux de l'impôt : 35%.

T.A.F :

1- Evaluer par les deux méthodes la série des cash-flows.

2- Sachant que la valeur résiduelle de la machine est de 70.000 D, évaluer la nouvelle série des cash-flows.

3- Supposant que l'entreprise accorde un délai de 3 mois à ses clients et que ses fournisseurs lui exigent un délai identique, évaluer la nouvelle série des cash-flows.

Solution :

1- Calcul des séries des cash-flows :

- **Méthode encaissements-décaissements**

	0	1	2	3	4	5
Encaissements						
CAHT		360 000	360 000	360 000	360 000	360 000
Eco impôt/MP		42 000	42 000	42 000	42 000	42 000
Eco impôt/aut.charges		42 000	42 000	42 000	42 000	42 000
Eco impôt/Amts		21 000	21 000	21 000	21 000	21 000
Total encaissements	**-**	**465 000**	**465 000**	**465 000**	**465 000**	**465 000**
Décaissements						
Matières premières		120 000	120 000	120 000	120 000	120 000
Autres charges exp		120 000	120 000	120 000	120 000	120 000
Perte d'impôt/CA		126 000	126 000	126 000	126 000	126 000
Investissement initial	300 000					
Total décaissements	**300 000**	**366 000**	**366 000**	**366 000**	**366 000**	**366 000**

Cash-flow	**- 300 000**	**99 000**	**99 000**	**99 000**	**99 000**	**99 000**

- **Méthode comptable**

	0	1	2	3	4	5
Produits exp						
CAHT		360 000	360 000	360 000	360 000	360 000
Total encaissements	**-**	**360 000**	**360 000**	**360 000**	**360 000**	**360 000**
Charges exp						
Matières premières		120 000	120 000	120 000	120 000	120 000
Autres charges exp		120 000	120 000	120 000	120 000	120 000
Amortissements		60 000	60 000	60 000	60 000	60 000
Total charges exp		**300 000**	**300 000**	**300 000**	**300 000**	**300 000**
Résultat brut d'exp		**60 000**	**60 000**	**60 000**	**60 000**	**60 000**
Impôt		21 000	21 000	21 000	21 000	21 000
Résultat net d'exp		**39 000**	**39 000**	**39 000**	**39 000**	**39 000**
Amortissements		**60 000**	**60 000**	**60 000**	**60 000**	**60 000**
Investissement initial	- 300 000					
Cash-flow	**- 300 000**	**99 000**	**99 000**	**99 000**	**99 000**	**99 000**

2- Cas de la valeur résiduelle

Prix de cession = Valeur résiduelle = 70.000 D

VCN = Valeur d'origine – cumul des amortissements =0

+/value = Prix de cession – VCN = 70.000

Perte d'impôt/plus-value = 0,35 x 70.000 = 24.500

Méthode encaissements-décaissements

	0	1	2	3	4	5
Encaissements						
CAHT		360 000	360 000	360 000	360 000	360 000
Eco impôt/MP		42 000	42 000	42 000	42 000	42 000
Eco impôt/aut.charges		42 000	42 000	42 000	42 000	42 000
Eco impôt/Amts		21 000	21 000	21 000	21 000	21 000
Valeur résiduelle						70 000
Total encaissements	**-**	**465 000**	**465 000**	**465 000**	**465 000**	**535 000**
Décaissements						
Matières premières		120 000	120 000	120 000	120 000	120 000
Autres charges exp		120 000	120 000	120 000	120 000	120 000
Perte d'impôt/CA		126 000	126 000	126 000	126 000	126 000
Investissement initial	300 000					
Perte d'impôt/+value						24 500
Total décaissements	**300 000**	**366 000**	**366 000**	**366 000**	**366 000**	**390 500**
Cash-flow	**- 300 000**	**99 000**	**99 000**	**99 000**	**99 000**	**144 500**

Méthode comptable

	0	1	2	3	4	5
Produits exp						
CAHT		360 000	360 000	360 000	360 000	360 000
Total produits	**-**	**360 000**	**360 000**	**360 000**	**360 000**	**360 000**
Charges exp						
Matières premières		120 000	120 000	120 000	120 000	120 000
Autres charges exp		120 000	120 000	120 000	120 000	120 000
Amortissements		60 000	60 000	60 000	60 000	60 000

Total charges exp		**300 000**	**300 000**	**300 000**	**300 000**	**300 000**
Résultat brut d'exp		**60 000**	**60 000**	**60 000**	**60 000**	**60 000**
Impôt		21 000	21 000	21 000	21 000	21 000
Résultat net d'exp		**39 000**	**39 000**	**39 000**	**39 000**	**39 000**
Amortissements		**60 000**	**60 000**	**60 000**	**60 000**	**60 000**
Investissement initial	- 300 000					
Valeur résiduelle						70 000
Impôt/+value						24 500
Cash-flow	**- 300 000**	**99 000**	**99 000**	**99 000**	**99 000**	**144 500**

3- Cas de BFR

Calcul du BFR :

Clients = 90 x 360.000/360 = 90.000 D

Fournisseurs = 90 x 120.000 / 360 = 30.000 D

BFR = Clients – Fournisseurs = 60.000

Tableau de variation du BFR

	0	1	2	3	4	5
Financement BFR	60	60	60	60	60	
Récupération BFR		60	60	60	60	60
variation BFR	**60**	**-**	**-**	**-**	**-**	**- 60**

Remarque : la somme des variations du BFR est nulle.

Pour la méthode comptable, on incorpore juste au-dessous - Δ BFR ;

CF net = CF - Δ BFR

Pour la méthode encaissements-décaissements, le financement BFR est inclus au niveau des encaissements et la récupération BFR est intégrée au niveau des décaissements.

Méthode encaissements-décaissements

	0	1	2	3	4	5
Encaissements						
CAHT		360 000	360 000	360 000	360 000	360 000
Eco impôt/MP		42 000	42 000	42 000	42 000	42 000
Eco impôt/aut.charges		42 000	42 000	42 000	42 000	42 000
Eco impôt/Amts		21 000	21 000	21 000	21 000	21 000
Récupération BFR		60 000	60 000	60 000	60 000	60 000
Total encaissements	**-**	**525 000**	**525 000**	**525 000**	**525 000**	**525 000**
Décaissements						
Matières premières		120 000	120 000	120 000	120 000	120 000
Autres charges exp		120 000	120 000	120 000	120 000	120 000
Perte d'impôt/CA		126 000	126 000	126 000	126 000	126 000
Financement BFR	60 000	60 000	60 000	60 000	60 000	
Investissement initial	300 000					
Total décaissements	**360 000**	**426 000**	**426 000**	**426 000**	**426 000**	**366 000**
Cash-flow net	**- 360 000**	**99 000**	**99 000**	**99 000**	**99 000**	**159 000**

Méthode comptable

	0	1	2	3	4	5
Produits exp						
CAHT		360 000	360 000	360 000	360 000	360 000
Total encaissements	**-**	**360 000**	**360 000**	**360 000**	**360 000**	**360 000**
Charges exp						
Matières premières		120 000	120 000	120 000	120 000	120 000
Autres charges exp		120 000	120 000	120 000	120 000	120 000
Amortissements		60 000	60 000	60 000	60 000	60 000
Total charges		**300**	**300**	**300**	**300**	**300**

exp		**000**	**000**	**000**	**000**	**000**
Résultat brut d'exp		**60 000**	**60 000**	**60 000**	**60 000**	**60 000**
Impôt		21 000	21 000	21 000	21 000	21 000
Résultat net d'exp		**39 000**	**39 000**	**39 000**	**39 000**	**39 000**
Amortissements		**60 000**	**60 000**	**60 000**	**60 000**	**60 000**
Investissement initial	- 300 000					
Cash-flow	**- 300 000**	**99 000**	**99 000**	**99 000**	**99 000**	**99 000**
- var BFR	**- 60 000**	**-**	**-**	**-**	**-**	**60 000**
Cash-flow net	**- 360 000**	**99 000**	**99 000**	**99 000**	**99 000**	**159 000**

Section 3. Les critères de choix d'investissement

Le principe général à appliquer dans les études de rentabilité est que tout critère utilisé doit permettre la comparaison entre les fonds engagés et les flux générés par le projet et déboucher sur une décision d'acceptation ou de rejet. Plusieurs critères ont été avancés par la littérature et utilisés dans la pratique. Nous y distinguons les critères traditionnels dont notamment le taux de rendement comptable (TRC) et le délai de récupération et les critères basés sur l'actualisation à savoir la valeur actuelle nette (VAN), le taux de rendement interne (TRI), l'indice de profitabilité, l'indice de rentabilité et le délai de récupération actualisé (DRA).

1. Le taux de rendement comptable ou moyen

D'origine comptable, ce taux est utilisé en comptabilité pour évaluer la rentabilité de ses capitaux investis à partir des documents comptables. Il est donné par le rapport entre le bénéfice moyen et l'investissement moyen

$$TRC = \frac{Résultat\ net\ moyen}{Investissement\ moyen}$$

Le résultat net moyen est égal à la moyenne arithmétique annuelle des résultats nets d'impôt dégagés pendant la durée du projet. L'investissement moyen est la moyenne entre l'investissement initialement engagé et l'investissement final (valeur résiduelle). Ce taux peut être comparé au rendement des investissements de l'entreprise ou celui du secteur pour juger la rentabilité du projet.

Bien que cet avantage présente l'avantage de simplicité, il souffre de trois inconvénients : il ne respecte pas d'abord le principe général à appliquer dans les études de rentabilité, à savoir la comparaison en termes de flux des sorties et des entrées des fonds liés au projet. Ensuite, le choix des différentes méthodes de comptabilisation influence le montant du résultat comptable et par conséquent le TRC. Enfin, ce critère n'intègre pas le facteur temps. En effet, le facteur temps influence l'évaluation de la rentabilité à deux niveaux, d'une part à travers la répartition des flux sur les périodes et d'autre part à travers le taux d'actualisation.

2. Le délai de récupération

Il correspond à la période de temps au bout de laquelle nous récupérons le capital investi ; c'est-à-dire, les cash-flows prévus cumulés égalisent le montant investi. C'est le *payback period*. Pour le calculer, il s'agit d'accumuler les flux monétaires jusqu'à ce que le cumul corresponde au montant de l'investissement initial.

$$? DR \ / \ \sum_{j=1}^{DR} CF_j = I_0$$

Un investissement est jugé intéressant si son coût d'investissement est récupéré le plutôt possible avant un délai critique, délai fixé arbitrairement par l'investisseur.

Ce critère souffre de deux limites majeures : il n'intègre pas d'abord le facteur temps et il néglige les cash-flows postérieurs à la période du *payback*. Pour pallier à la première lacune, les partisans de ce critère ont proposé de corriger les cash-flows par un taux d'actualisation (coût d'opportunité). Le capital investi est désormais rémunéré. Le délai de récupération actualisé est défini comme suit :

$$? DRA / \sum_{j=1}^{DR} \frac{CF_j}{(1+k)^j} = I_0$$

3. La valeur actuelle nette

La VAN mesure la richesse ou valeur créée par le projet. Elle est définie comme la différence entre la somme des cash-flows actualisés (CF_j) et l'investissement initialement engagé (I_0). Le taux d'actualisation tant le coût du capital qui va servir pour financer le projet. Nous aurons ainsi :

$$\text{VAN} = -I_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{CF_j}{(1+k)^j}$$ avec k est le coût du capital.

Selon ce critère, un projet ne sera choisi que si sa VAN est positive. Les projets à VAN positive contribuent à augmenter la valeur e l'entreprise. Dans cette hypothèse, nous dirons que le projet crée de la valeur. La VAN est aussi une évaluation par le marché de tous les flux monétaires impliqués par le projet car le taux d'actualisation est un taux suggéré par le marché. Enfin, entre deux projets mutuellement exclusifs, nous retenons celui qui a la VAN la plus élevée.

4. Le taux de rentabilité interne

Le taux de rendement interne est défini comme le taux d'actualisation qui annule la VAN, c'est-à-dire la valeur actuelle des cash-flows prévus égalise l'investissement initialement engagé. Le TRI est donné par la formule suivante :

VAN = 0 ; c'est-à-dire : $I_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{CF_j}{(1+TRI)^j}$

L'équation précédente est une équation polynomiale de degré n. Sa résolution peut conduire à plusieurs valeurs pour le TRI comme elle peut ne pas aboutir à de solutions. Pour la résolution effective, il faudra procéder par interpolation linéaire.

Selon ce critère, le projet est rentable lorsque le TRI est supérieur au taux de rendement exigé par les actionnaires (le coût du capital). Dans le cas des projets mutuellement exclusifs, nous acceptons, à priori, celui qui a le TRI le plus élevé, à condition qu'il excède le taux de rendement requis.

5. L'indice de rentabilité ou VAN unitaire

C'est la VAN unitaire. Il mesure la richesse crée par unité d'investissement initialement engagé. Il est défini par le rapport entre la VAN et l'investissement initial. Un projet est accepté si VANU est positive. Dans le cas de plusieurs projets, plus la VANU est élevée, plus le projet est intéressant.

$$IP = VANU = \frac{VAN}{I_0} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{CF_j}{(1+k)^j} - I_0}{I_0}$$

6. L'indice de profitabilité

C'est la somme des cash-flows actualisés divisée par l'investissement initial. Le projet est accepté lorsque son IR est supérieur à 1. Dans le cas de plusieurs projets, plus, l'IR est élevé, plus le projet est rentable.

$$IR = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{CF_j}{(1+k)^j}}{I_0} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{CF_j}{(1+k)^j} - I_0 + I_0}{I_0} = \frac{VAN}{I_0} + 1 = VANU + 1 = IP + 1$$

Section 4. Limite de VAN/TRI et le recours aux critères intégrés

En règle générale, appliqués à des projets normaux et isolés, les deux critères VAN et TRI aboutissent à la même décision en matière d'acceptation ou de rejet. Cependant, lorsque nous sommes face à des projets mutuellement exclusifs, les deux critères peuvent déboucher sur des résultats contradictoires en matière de rentabilité.

Cette situation conflictuelle pourrait se présenter dans les trois cas suivants :

Disparité au niveau des montants investis ;

Disparité au niveau de la distribution des cash-flows dans le temps ;

Disparité au niveau des maturités des projets.

Nous recourrons dans ce cas aux critères intégrés.

1. Limite des critères VAN et TRI

Il existe une relation inverse entre la VAN et le taux d'actualisation du projet. La VAN du projet est égale à la différence entre la somme des cash-flows actualisés à ce taux et l'investissement initial. La VAN baisse à mesure que le taux d'actualisation augmente et s'annule lorsque le taux d'actualisation devient égal au TRI.

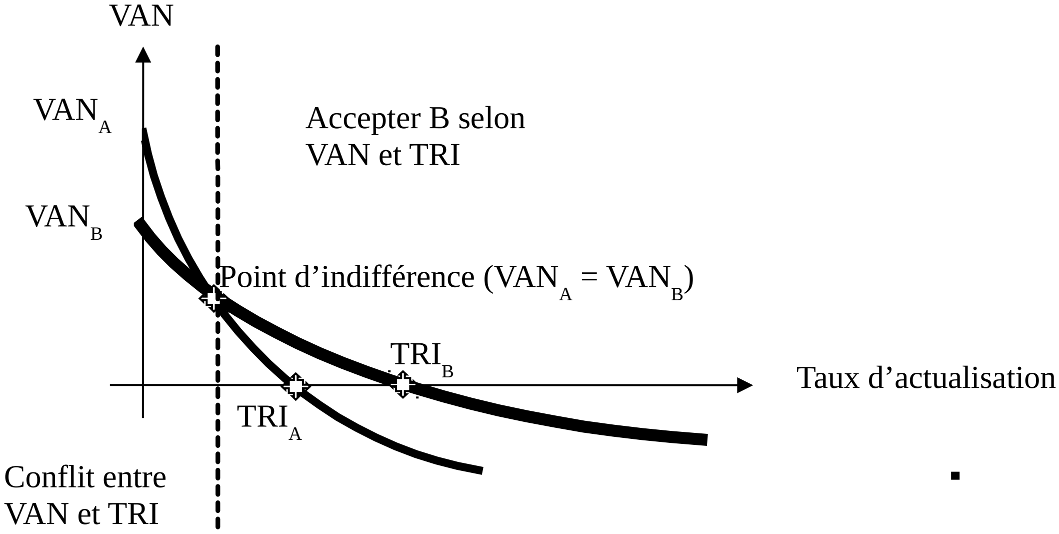
Pour un même projet, les deux critères VAN et TRI aboutissent à la même décision

Si VAN > 0 alors TRI > CMPC ; le projet est rentable

Si VAN = 0 alors TRI = CMPC

Si VAN < 0 ; TRI < CMPC ; le projet est non rentable

En revanche, lorsqu'il s'agit de classer plusieurs projets mutuellement exclusifs, la VAN et le TRI peuvent aboutir à des décisions contradictoires. Graphiquement, cette situation peut se présenter graphiquement comme suit :



Cette possibilité de contradiction réside dans l'hypothèse implicite à la formule de calcul de ces grandeurs et relative au taux de réinvestissement des cash-flows intermédiaires. En effet, les cash-flows intermédiaires sont supposés être réinvestis au coût du capital lors du calcul de la VAN. alors en cas du TRI, les cash-flows sont réinvestis au taux spécifique du projet, c'est le TRI lui-même.

Remarque : Certains insistent sur la supériorité théorique de la VAN. Ce critère est le seul qui est en accord total avec l'objectif financier de l'entreprise qui consiste à maximiser sa valeur marchande. Il est donc celui à privilégier lors de la sélection des projets. Le Tri est très influencé par la répartition temporelle des flux monétaires. De même, la démarche mathématique peut conduire à plusieurs TRI, ce qui n'est pas pratiquement satisfaisant. Quant aux autres critères d'évaluation, ils apparaissent comme étant complémentaires à la VAN et susceptibles d'apporter un éclairage additionnel sur les projets d'investissement analysés.

2. Disparité au niveau du montant investi

Pour éliminer la contradiction de choix existant entre la VAN et le TRI dans une telle situation, il faut adopter l'approche marginale ; c'est-à-dire calculer le TRI marginal à partir des flux différentiels.

Application 3 :

Considérons les projets mutuellement exclusifs X et Y dont les caractéristiques sont les suivantes :

	Projet X	Projet Y
Investissement initial	500.000	100.000
Flux monétaires	150.000	40.000
Durée de vie	10 ans	10 ans
TRI	27,32%	38,45%
VAN (k=12%)	347.538,45	126.008,92

Selon le TRI, on retient le projet Y alors qu'on sélectionne le projet X selon la VAN. Il y a contradiction entre la Van et le TRI. Pour résoudre ce problème, on adopte une approche différentielle (X – Y) dont l'investissement initial est (I_X – I_Y) et les cash-flows sont (CF_X – CF_Y).

	Projet X	Projet Y	Projet (X- Y)
Année 0	500.000	100.000	I_X-I_Y=400.000
Année 1 à 10	150.000	40.000	CF_X-CF_Y =110.000

VAN $_{X-Y}$ $= \sum_{j=1}^{10} \frac{CF_{X-Y}}{(1+k)^j} - I_{X-Y} =$ $\sum_{t=1}^{10} \frac{110.000}{1{,}12^t} - 400.000 =$

$$\frac{110.000}{1{,}12} \frac{1-\frac{1}{1{,}12^{10}}}{1-\frac{1}{1{,}12}} - 400.000$$

$= \frac{110.000}{0{,}12}\left(1-\frac{1}{1{,}12^{10}}\right) - 400.000 =$ 221.524,53 > 0

L'investissement additionnel est rentable. Donc le projet X est plus rentable que Y.

TRI_{X-Y} est tel que VAN $_{X-Y}$ = 0 ; c'est-à-dire $\sum_{j=1}^{10} \frac{CF_{X-Y}}{(1+TRI_{X-Y})^j} - I_{X-Y} = 0$;

$\frac{110.000}{TRI}\left(1-\frac{1}{(1+TRI)^{10}}\right) - 400.000 = 0$; TRI_{X-Y} = 24,4% > 12%= CMPC.

L'investissement additionnel est rentable ; le projet X est plus rentable que Y.

Remarque 1 : Pour un taux d'actualisation inférieur à TRI marginal de 24,4%, il y a contradiction entre la VAN et le TRI. Selon la VAN, le projet X est meilleur alors que selon le TRI, le projet Y est préféré. Pour un taux supérieur à ce taux, les deux critères stipulent que le projet Y est préféré à X.

Remarque 2: Le TRI marginal est appelé taux d'indifférence. On est indifférent entre choisir le projet X ou Y. Il est obtenu en égalisant les deux VAN des deux projets.

TRI_{X-Y} est tel que $VAN_{X-Y} = 0$; c'est-à-dire $\sum_{j=1}^{n} \frac{CF_{X-Y}}{(1+TRI_{X-Y})^j} - I_{X-Y} = 0$

Cela signifie $\sum_{j=1}^{n} \frac{CF_X}{(1+TRI_X)^j} - I_X = \sum_{j=1}^{n} \frac{CF_X}{(1+TRI_Y)^j} - I_X$; c'à-d $VAN_X = VAN_Y$

3. Disparité au niveau de la répartition des flux monétaires

Dans ce cas, le critère de la Van suppose que les flux monétaires sont réinvestis au taux d'actualisation utilisé dans le calcul, tandis que la méthode du TRI suppose que les flux monétaires sont réinvestis au TRI du projet. Pour résoudre le conflit, il s'agit de supposer un taux de réinvestissement identique pour les deux critères. De cette façon, le projet qui a la VAN intégrée la plus élevée aura nécessairement le plus grand taux de rendement. Le taux de réinvestissement des cash-flows peut être différent du taux de rendement exigé. Si une entreprise a la possibilité d'investir ses cash-flows à un taux supérieur au taux de rendement exigé, la VAN constituera une sous-estimation de l'enrichissement qu'ils peuvent procurer.

Application 4 :

Considérons les projets mutuellement exclusifs X et Y dont les caractéristiques sont les suivantes :

	Projet X	Projet Y
Investissement initial	100.000	100.000
Cash-flow 1	50.000	10.000
Cash-flow 2	40.000	20.000
Cash-flow 3	30.000	30.000
Cash-flow 4	20.000	40.000
Cash-flow 5	10.000	50.000
Cash-flow 6	10.000	60.000
Durée de vie	6 ans	6 ans

TRI	22,08%	19,71%
VAN (k=12%)	21.326	30.407

On remarque que les cash-flows les plus importants de X surviennent au début de la période alors que pour Y, c'est à la fin de période.

Le taux d'indifférence, pour lequel $VAN_X = VAN_Y$, est égal à 16,75%. Pour un taux d'actualisation inférieur à TRI marginal de 16,75%, il y a contradiction entre la VAN et le TRI. Selon la VAN, le projet Y est meilleur alors que selon le TRI, le projet X est préféré. Pour un taux supérieur à ce taux, les deux critères stipulent que le projet X est préféré à Y.

Soit le taux de réinvestissement de 14%.

$VANI_X$=29.521=

$$-100.000+\frac{(50.000x1{,}14^5+40.000x1{,}14^4+30.000x1{,}14^3+20.000x1{,}14^2+10.000x1{,}14^1+10.000x1{,}1}{1{,}12^6}$$

$VANI_Y$=34.990=

$$-100.000+\frac{(10.000x1{,}14^5+20.000x1{,}14^4+30.000x1{,}14^3+40.000x1{,}14^2+50.000x1{,}14^1+60.000x1{,}1}{1{,}12^6}$$

TRII / VANI=0 ; $\frac{\sum_{t=1}^{n} CF_t (1+r)^{n-t}}{(1+TRII)^n} - I_0 = 0$; TRII = $\left(\frac{\sum_{t=1}^{n} CF_t (1+r)^{n-t}}{I_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$

	Projet X	Projet Y
VAN	22,08%	19,71%
TRI	21.326	30.407
VANI	29.521	34.990
TRII	16,93%	17,74%

Selon les deux critères VANI et TRII, le projet Y est plus rentable que le projet X.

Remarque : Si le taux de réinvestissement est égal au taux de rendement exigé 12%, on obtiendra le même résultat.

4. Disparité au niveau des maturités

Plusieurs méthodes ont été proposées pour sélectionner le meilleur projet. Ces méthodes diffèrent principalement selon la considération ou non de la possibilité de renouvellement à l'identique des projets.

Dans le cadre de ce cours, nous nous limiterons à la méthode de l'annuité équivalente (AEQ) et de la VAN répliquée à l'infini.

L'AEQ est définie comme l'annuité théorique qu'on recevra à la fin de chaque année à la place des flux monétaires et qui génère en utilisant le même taux d'actualisation une valeur actuelle égale à celle de la VAN du projet.

$VAN = \frac{AEQ}{1+k} + \frac{AEQ}{(1+k)^2} + \ldots + \frac{AEQ}{(1+k)^n}$; c'est la somme d'une suite géométrique de n termes, de premier terme $\frac{AEQ}{1+k}$, de raison $\frac{1}{1+k}$.

$$VAN = \frac{AEQ}{1+k}\,\frac{1-\frac{1}{(1+k)^n}}{1-\frac{1}{(1+k)}} = AEQ\,\frac{1-(1+k)^{-n}}{k} \;; \qquad VAN = AEQ\;\frac{k}{1-(1+k)^{-n}}$$

Le projet le plus rentable est celui qui a la l'AEQ la plus élevée. Toutefois, la période (n) à prendre en considération dépend de l'existence ou non de la possibilité de renouvellement des projets.

Dans le cas de non renouvellement des projets, on prend pour valeur de n la durée de vie la plus longue.

Lorsque le renouvellement à l'identique est possible, la période à prendre en considération est la durée spécifique pour chaque projet.

Lorsque le renouvellement à l'identique à l'infini est possible, on applique la technique de la VAN répliquée à l'infini. Il s'agit alors de trouver la valeur actuelle d'une série d'annuités constantes chacune égale à la VAN, payée au début de la première période et ainsi indéfiniment à la fin de chaque nième période.

Notons par Van (n, ∞) la valeur actuelle répliquée à l'infini d'un projet de durée de vie égale à n années et dont la VAN simple est VAN(n), N le nombre de renouvellement ; nous aurons alors :

$$VAN(N,\infty) = VAN(n) + \frac{VAN(n)}{(1+k)^{n}} + \frac{VAN(n)}{(1+k)^{2n}} + \ldots + \frac{VAN(n)}{(1+k)^{Nn}}$$

C'est une suite géométrique de N+1 termes dont le premier est VAN(n) et dont la raison est égale à $\frac{1}{(1+k)^{n}}$. On aura alors :

$$VAN(N,\infty) \quad = VAN(n)\ \frac{1-(1+k)^{-(N+1)n}}{1-(1+k)^{-n}} = VAN(n)\ \frac{1}{1-(1+k)^{-n}} \ \text{car} \ \lim_{n\to\infty}(1+k)^{-(N+1)n} \longrightarrow 0$$

Remarque :

$$VAN(n,\infty) \quad = \frac{VAN(n)}{1-(1+k)^{-n}} = AEQ\,\frac{1-(1+k)^{-n}}{k}\,\frac{1}{1-(1+k)^{-n}} = \frac{AEQ}{k}$$

Application 5 :

Considérons les projets mutuellement exclusifs X et Y dont les caractéristiques sont les suivantes :

	Projet X	Projet Y
Investissement initial	15.000	15.000
Flux monétaires	4.500	3.100
Durée de vie	5 ans	9 ans
TRI	25,24%	14,62%
VAN (k=10%)	2.058,540	2.852,970

Selon le TRI, on retient le projet X alors qu'on sélectionne le projet Y selon la VAN.

Nous calculons alors l'annuité équivalente dans les trois cas possibles : non renouvellement, renouvellement limité et le renouvellement illimité.

	Non renouvellement	Renouvellement limité	Renouvellement illimité
	la durée la plus longue	Chacun sa période	$VAN(n,\infty) = \frac{VAN(n)}{1-(1+k)^{-n}}$
Projet X	AEQ = 357,446 (a)	AEQ = 543,038 (c)	$VAN(n,\infty)$ =5.430,377 (d)
Projet Y	AEQ = 495,391 (b)	AEQ = 495,391 (b)	$VAN(n,\infty)$ = 4.953,391 (e)
Décision	On choisit Y	On choisit X	On choisit X

(a) : 2.058,540 = $AEQ\,\frac{1-(1{,}1)^{-9}}{0{,}1}$; AEQ = 357,446

(b) : 2.852,970 = $AEQ\,\frac{1-(1{,}1)^{-9}}{0{,}1}$; AEQ = 495,391

(c) : 2.058,540 = $AEQ\,\frac{1-(1{,}1)^{-5}}{0{,}1}$; AEQ = 543,038

(d) : $VAN(N,\infty) = 2.058{,}540\,\frac{1}{1-(1{,}1)^{-5}}$ = 5.430,377 = $\frac{543{,}038}{0{,}1}$ = $\frac{AEQ}{k}$

(e) : $VAN(N,\infty) = 2.852{,}970\,\frac{1}{1-(1{,}1)^{-5}}$ = 4.953,391= $\frac{495{,}391}{0{,}1}$ = $\frac{AEQ}{k}$

Remarque : il faut remarque qu'en cas de duplication, les deux critères $VAN(N,\infty)$ et AEQ aboutissent à la même décision. En effet :

$$VAN(N,\infty) = VAN(N)\frac{1}{1-(1+k)^{-N}} = AEQ\,\frac{1-(1+k)^{-N}}{k}\,\frac{1}{1-(1+k)^{-N}} = \frac{AEQ}{k}$$

5. Disparité dans le capital investi et la durée de vie prévue

Dans ce cas particulier, le seul moyen pour lever la contradiction est d'appliquer les critères de la VANI et le TRII. Pour cela :

Retenir d'abord le montant d'investissement le plus important et la durée de vie la plus longue.

Aligner tous les projets à ces deux paramètres et leur appliquer la VANII. On capitalise d'abord les flux intermédiaires de chaque projet au taux de réinvestissement entre la date de leur apparition et celle de la fin du projet le plus long.

Ajouter la valeur acquise du projet différentiel (la différence entre les investissements initiaux) à la fin de la durée de vie la plus longue au taux de réinvestissement.

Calculer enfin la VANI et le TRII. Le projet à retenir est celui offrant la rentabilité la plus élevée selon les deux critères.

Application 6 :

Considérons les projets mutuellement exclusifs X et Y dont les caractéristiques sont les suivantes :

	Projet X	Projet Y
Investissement initial	1.400.000	1.200.000
Cash-flow 1	500.000	700.000
Cash-flow 2	700.000	600.000
Cash-flow 3	600.000	400.000
Cash-flow 4	300.000	200.000
Cash-flow 5	250.000	200.000
Cash-flow 6	250.000	-
TRI	25,92%	29,97%
VAN (k=15%)	362.494,97	339.174,34

On suppose le taux de réinvestissement de 20%.

$VANI_X$=638.199,81=

$$-1.400.000+\frac{(500.000x1,2^{5}+700.000x1,2^{4}+600.000x1,2^{3}+300.000x1,2^{2}+250.000x1,2^{1}+250.000x1}{1,15^{6}}$$

$VANI_Y$=676.201,75=

$$-1.400.000+\frac{(700.000x1,2^{5}+600.000x1,2^{4}+400.000x1,2^{3}+200.000x1,2^{2}+200.000x1,2^{1}+200.000^{*}x1}{1,15^{6}}$$

* 200.000 = 1.400.000 – 1.200.000

TRII / VANI=0 ; $\frac{\sum_{t=1}^{n} CF_t (1+r)^{n-t}}{(1+TRII)^n} - I_0 = 0$; TRII = $\left(\frac{\sum_{t=1}^{n} CF_t (1+r)^{n-t}}{I_0} \right)^{\frac{1}{n}} - 1$

$$TRII_X = \left(\frac{500.000x1,2^5 + 700.000x1,2^4 + ... + 250.000}{1.400.000} \right)^{\frac{1}{6}} - 1 = 22,42\%$$

$$TRII_Y = \left(\frac{700.000x1,2^5 + 600.000x1,2^4 + ... + 200.000x1,2^1 + 200.000x1,2^6}{1.400.000} \right)^{\frac{1}{6}} - 1 = 22,80$$

	Projet X	Projet Y
VANI	638.199,81	676.201,75
TRII	22,42%	22,80%

Selon les deux critères VANI et TRII, le projet Y est plus rentable que le projet X.

Chapitre 2

DECISION D’INVESTISSEMENT EN AVENIR INCERTAIN ET RISQUE

L’incertitude est un phénomène qui caractérise beaucoup la vie économique. Elle peut ainsi toucher aux paramètres d’investissement et tous les éléments entrant dans l’évaluation de la rentabilité d’un projet de façon directe ou indirecte. Pour qu’elle soit intégrée dans la prise de décision, l’incertitude doit être détectée, caractérisée et dans la mesure du possible quantifiée.

Selon qu’elle est quantifiable ou pas, l’incertitude est intégrée dans la prise de décision conformément à des modèles de décision. Ainsi, on parle d’avenir incertain ou indéterminé lorsqu’on n’a aucune idée sur la vraisemblance de la survenance des événements futurs. On parle, au contraire d’avenir probabiliste ou risqué lorsque le futur peut être caractérisé et on peut associer des distributions de probabilité aux différentes composantes de la décision.

Plusieurs techniques et outils statistiques ont été préconisés pour intégrer l’incertitude ou risque dans la prise de décision. Lorsque le futur est difficilement caractérisable, on peut soit utiliser des méthodes approximatives du risque, soit faire appel à des modèles de décision en avenir incertain empruntés à la théorie de la décision, c‘est l’objet de la première section.

Dans la deuxième et la troisième section, nous présentons successivement les méthodes traditionnelles pour tenir compte et mesurer le risque ainsi que l’approche probabiliste. Au sein de la quatrième section, la théorie de l’utilité sera explicitée comme une technique d’aide à la décision.

Section 1. Les méthodes d’appréciation en avenir incertain

On peut dire que l’incertitude est généralement associée à des phénomènes naturels (conditions climatiques), sociaux et politiques (pression syndicale, grèves inattendues, migrations massives touchant le marché de travail, règlementations nouvelles), technologiques (découvertes scientifiques), etc… Lorsque l’avenir ne peut être prévisible d’une manière objective, il n’est pas possible d’appliquer les outils statistiques connus pour prendre des décisions rationnelles. La situation d’incertitude se traduit par l’ignorance soit du champ de la variable de cash-flow ou de la distribution de probabilité qui lui est attachée.

Les modèles de décision empruntés à la théorie de décision ont proposé des critères d’évaluation en avenir incertain. L’analyse de sensibilité, la méthode des scénarios et la simulation ont aussi fait leur preuve en finance.

1. Les critères de la théorie des jeux

Quatre critères de classement issus de la théorie des jeux sont applicables aux procédures de choix d’investissement en avenir incertain, à savoir : le critère de Laplace, le critère de Wald, le critère de Savage et le critère de Hurwicz.

1.1. Le critère de Laplace Bayes ou de moyenne arithmétique

Ce critère consiste à effectuer la moyenne arithmétique simple des revenus futurs espérés pour chacune des stratégies. En matière de décision, on retient la stratégie qui offre le revenu espéré moyen le plus élevé. Ce critère a l’avantage de simplicité mais l’inconvénient majeur est qu’il accorde le même poids à tous les états de la nature alors qu’on prétend raisonner en avenir incertain.

1.2. Le critère de Wald ou Maximin

L’adoption de ce critère correspond à une attitude prudente. On cherche à identifier pour chaque stratégie possible l’état de nature qui conduirait aux moins bons résultats. Puis, on adopte la stratégie qui est susceptible de fournir le résultat le moins mauvais possible. C’est le maximum des minimums potentiels : le meilleur des pires

1.3. Le critère de Savage ou Minimax

Ce critère traduit aussi une attitude de prudence. D’abord, on identifie pour chacun des états de nature la stratégie la plus favorable, qui dégage le moins mauvais résultat. Puis, on évalue le manque à gagner que représenterait l’adoption de cette stratégie par rapport aux autres stratégies. Le manque à gagner ou regret correspond à la différence entre le cas le plus favorable et le cas en question. C’est la différence entre ce qu’on a effectivement encaissé par rapport à ce qu’on aurait encaissé si on avait adopté la meilleure stratégie. Enfin, on retient la stratégie qui conduit au plus petit des regrets maximums. C’est le minimum des regrets maximums.

1.4. Le critère de Hurwicz

Ce critère permet de relativiser la prise de décision. En utilisant les critères précédents, on considère que les décisions sont équiprobables. Le critère de Hurwicz consiste à calculer pour chacune des stratégies une moyenne pondérée du pire et de meilleur de ses résultats potentiels, et à choisir la stratégie pour laquelle la moyenne pondérée H est plus grande.

$H = (1-\alpha)\ P + \alpha\ M$; P : pire des résultats, M : meilleur des résultats ; α : coefficient subjectif compris entre 0 et 1 reflétant le degré d’optimisme ou pessimisme du décideur, sa nature offensive ou prudente.

Lorsque $\alpha \to 0$, le décideur est pessimiste. Lorsque $\alpha \to 1$, le décideur est optimiste. Lorsque $\alpha = 0$, le critère de Hurwicz se confond au critère Maximin.

Application 1 :

Soit les trois stratégies suivantes dont les états de nature se présentent comme suit :

Stratégies	Etat 1	Etat 2	Etat 3
Stratégie 1	- 60.000	40.000	110.000
Stratégie 2	- 5.000	10.000	30.000
Stratégie 3	- 10.000	30.000	80.000

T.A.F : Quelle sera la stratégie à adopter selon chacun des critères de Laplace, de Maximin, de Minimax et de Hurwicz ?

Solution :

- **Critère de Laplace**

Stratégies	Moyenne arithmétique	Décision
Stratégie 1	$\frac{-60.000+40.000+110.000}{3} = 30.$	Retenir la stratégie 3 : la moyenne la plus élevée
Stratégie 2	$\frac{-5.000+10.000+30.000}{3} = 11.66$	
Stratégie 3	$\frac{-10.000+30.000+80.000}{3} = 33.3$	

- **Critère de Wald ou Maximin**

Stratégies	Etat 1	Etat 2	Etat 3	Le minimum	Décision
Stratégie 1	- 60.000	40.000	110.000	-60.000	Retenir la stratégie 2 : Le maximum des minimums
Stratégie 2	- 5.000	10.000	30.000	-5.000	
Stratégie 3	- 10.000	30.000	80.000	-10.000	

- **Critère de Savage ou Minimax Regret**

Stratégies	Etat 1	Etat 2	Etat 3	Regret	Décision

				max	
Maximum	***-5.000***	***40.000***	***110.000***		
Stratégie 1	- 60.000	40.000	110.000	55.000	Retenir la stratégie 3 : Le minimum des regrets maximums
Regret max	*-5.000-(-60.000) =55.000*	*40.000-40.000 =0*	*110.000-110.000 =0*		
Stratégie 2	- 5.000	10.000	30.000	80.000	
Regret max	*-5.000-(-5.000) =0*	*40.000-10.000 =30.000*	*110.000-30.000 =80.000*		
Stratégie 3	- 10.000	30.000	80.000	30.000	
Regret max	*-5.000-(-10.000) =5.000*	*40.000-30.000 =10.000*	*110.000-80.000 =30.000*		

- **Critère de Hurwicz**

Stratégies	Etat 1	Etat 2	Etat 3	Min	Max	$H_{\alpha=0}$	$H_{\alpha=0,5}$	$H_{\alpha=0,6}$	$H_{\alpha=1}$
Stratégie 1	-60.000	40.000	110.000	-60.000	110.000	-60.000	25.000	42.000	110.000
Stratégie 2	-5.000	10.000	30.000	- 5.000	30.000	- 5.000	12.500	16.000	30.000
Stratégie 3	-10.000	30.000	80.000	-10.000	80.000	- 10.000	35.000	44.000	80.000
Décision						S2	S3	S3	S1

Plus α augmente, plus la pondération associée au meilleur résultat est élevée, le décideur est moins averse au risque et plus prudent.

Remarque 1 : $H_{\alpha=0}$ se confond avec le critère de Wald.

Remarque 2 : L'appréciation en avenir indéterminé et incertain aboutit à des résultats divergents. La prise de décision doit être alors beaucoup mieux formalisée.

2. L'analyse de sensibilité

Cette analyse a pour objectif d'identifier les variables les plus importantes sur lesquelles le décideur doit porter toute son attention. A cet effet, on peut calculer soit :

- le coefficient de sensibilité : $\Delta \; relative \; du \; paramètre \; x = \dfrac{x_i - x_0}{x_0}$

Pour déterminer ce coefficient, on calcule le point mort, c'est-à-dire la valeur du paramètre qui annule la VAN du projet. On calcule ensuite sa variation relative. Plus le pourcentage sera faible, en valeur absolue, plus grande sera la sensibilité de ce paramètre.

- soit le coefficient d'élasticité : $\dfrac{\Delta \; relative \; VAN}{\Delta \; relative \; paramètre \; x} = \dfrac{\dfrac{VAN_i - VAN_0}{VAN_0}}{\dfrac{x_i - x_0}{x_0}}$.

Plus le coefficient d'élasticité est élevé, en valeur absolue, plus la sensibilité de ce paramètre est élevée.

3. La méthode de scénarios

Cette méthode est en réalité un cas particulier de l'analyse de sensibilité. C'est d'ailleurs, l'approche la plus utilisée. On parle de méthode de scénarios quand les paramètres sont modifiés conjointement car ils sont jugés interdépendants (une baisse du prix de vente et une augmentation de la quantité vendue, ou une diminution du coût et une diminution du prix de vente, etc..).

Cette analyse est souvent appelée BOP Analysis (Best Optimistic Pessimistic Analysis). On envisage des scénarios selon qu’on est optimiste, réaliste ou pessimiste et on attribue subjectivement des valeurs aux différents paramètres du projet. Chaque scénario aboutira à une VAN spécifique. En comparant les VAN obtenues, on a une idée sur l’étendue possible des résultats et donc sur la sensibilité de chacune des variables. L’écart entre la VAN du scénario optimiste et celle du scénario pessimiste indique donc le degré de variabilité de la rentabilité ou du risque du projet. Une limite notable de cette méthode est que les scénarios ne sont pas perçus de la même manière par les tous les individus.

4. Les techniques de simulation de Hertz

On parle de simulation quand l’opérateur économique cherche à tester une modification simultanée de toutes les variables influençant la VAN. La VAN ainsi obtenue est déterminée par plusieurs facteurs tels que le prix, le coût et les prévisions des ventes, la durée de vie du projet, la valeur résiduelle de l’investissement, etc… Cette technique est qualifiée de méthode empirique car elle cherche à estimer la distribution empirique des paramètres du projet avant de les synthétiser dans la distribution de la VAN. La distribution de probabilité de la rentabilité (VAN ou TRI) est obtenue à partir des distributions de probabilité de chaque variable. Cette méthode ne peut pas être appliquée manuellement et nécessite le recours à l’ordinateur. Hertz (1968) Par ailleurs, c’est à David Hertz (1964) que revient le mérite d’avoir développé ce modèle combinant plusieurs paramètres économiques et c’est lui qui a réglé les difficultés techniques de manipulation d’un grand nombre de variables aléatoires. Il s’agit en réalité de la simulation de Monte-carlo qui utilise comme intrants des variables aléatoires.

Application 2 :

Dans le but de faire face à une demande en pleine expansion, les dirigeants de l’entreprise IBS envisage d’implanter une nouvelle unité de production qui nécessite un investissement initial de 1.000 MD, hors coût du terrain qui sera récupéré au bout de 5 ans. A la fin de la période de 5 ans, on envisage de céder cette unité pour une valeur de 400 MD.

Le directeur technique chargé du projet estime que le coût variable unitaire est de 6 D et que les frais fixes de production sont de 400 MD.

Le directeur commercial estime la taille du marché à 1.000.000 unités par année et estime à 40% la part de marché de l'entreprise. Par ailleurs, il établit à 8 D le prix de vente unitaire. Le taux d'imposition de l'entreprise est de 35% et le taux d'actualisation approprié de 15%. On demande de :

1- Calculer la VAN du projet.
2- Analyser la sensibilité du projet (a) au nombre d'unités vendues ; (b) au prix de vente unitaire.

Supposons que le prix de vente unitaire peut varier de 5%, que le coût variable peut varier aussi de 5% et que la quantité à vendre peut varier de 10%. On demande de :

3- Calculer et interpréter le coefficient de l'élasticité du prix de vente, du coût variable et de la quantité à vendre.
4- Donner les trois scénarios qu'il faut analyser (optimiste, réaliste et pessimiste) et calculer la probabilité que la VAN soit positive sachant que : (i) les flux monétaires sont normalement distribués ; (ii) le scénario réaliste a deux fois plus de chance que chacun des deux autres scénarios.

Solution :

1- VAN du projet en MD

$$VAN = -I_0 + \sum_{t=1}^{5} \frac{CF}{(1+k)^t} + \frac{PC - TxPV}{(1+k)^5} = -I_0 + CF\,\frac{1-(1+k)^{-5}}{k} + \frac{PC - TxPV}{(1+k)^5} \;;$$

CF=(1-T) x (CA-V-F) + T x A = (1-T)x [(p – v) Q – F] + T x A

CA : chiffre d'affaires ; V : coût variable total ; F : coût fixe total ; p : prix de vente unitaire ; v : coût variable unitaire ; A : amortissement ; T : taux d'impôt ; PC : prix de cession ; PV : plus-value ; I_0 : investissement initial.

Investissement initial		-1.000,000
Ventes nettes :	$0{,}65\,x\,0{,}008\,x\,400.000\ \frac{1-1{,}1}{0{,}1}$	6.972,483
Coûts variables nets	$0{,}65\,x\,0{,}006\,x\,400.000\ \frac{1-1{,}1}{0{,}1}$	-5.229,362
Frais fixes nets	$0{,}65\,x\,400\ \frac{1-1{,}15^{-5}}{0{,}15} =$	-871,560
Economie d'impôt/Amts	$0{,}35\,x\,200\ \frac{1-1{,}15^{-5}}{0{,}15} =$	234,651
Valeur résiduelle nette	$0{,}65\,x\,400\ \ x\ 1{,}15^{-5} =$	129,266
VAN =		235,478

2- Analyse de la sensibilité du projet

a- Analyse du projet au nombre d'unités vendues

Il s'agit tout d'abord de calculer la quantité Q que l'entreprise doit vendre pour avoir une VAN = 0.

$$VAN = -I_0 + \sum_{t=1}^{5} \frac{CF}{(1+k)^t} \frac{PC - TxPV}{(1+k)^5} = -I_0 + CF\frac{1-(1+k)^{-5}}{k} + \frac{PC - TxPV}{(1+k)^5} \ ;$$

CF=(1-T) x (CA-V-F) + T x A = (1-T)x [(p – v) Q – F] + T x A

$$\frac{1-1{,}15^{-5}}{0{,}15} = 3{,}3521551$$

VAN(Q) = -1000 + 0,65(0,008 – 0,006) Q x 3,3521551– 871,560 + 234,651 + 129,266 = 0 ;

VAN(Q) = - 1.507,643 + 0,00436 Q = 0 ;

Q* = 345.964 unités

Le coefficient de sensibilité de la quantité à vendre est :

$$\frac{345.964 - 400.000}{400.000} = \text{-13,5\%}$$

Le projet continue à être acceptable même si la quantité à vendre baisse de 13,5%.

b- Analyse de la sensibilité du projet au prix de vente unitaire

Il s'agit de calculer le prix P qui annule la VAN ; ce qui convient à résoudre l'équation suivante :

VAN(p) = -1000 + 0,65 P x 400.000 x 3,3521551 – 5.229,362 – 871,560 + 234,651 + 129,266 = -6.737,005 + 871.520 p = 0 ;

p* = 0,00773 MD = 7,73 D

Le coefficient de sensibilité du prix de vente est : $\frac{7{,}73-8}{8}=$ -3,38%

Cette analyse montre que la variable la plus sensible est le prix de vente unitaire car $|-3{,}38\%|<|-13{,}5\%|$. En effet, la quantité doit varier d'au moins 13,5% pour que la VAN s'annule alors qu'il suffit que le prix de vente diminue de 3,38% pour que la VAN s'annule.

3- Le tableau suivant résume les résultats des différentes hypothèses :

	Baisse	Hausse	Baisse	Hausse	Baisse	Hausse
Prix (D)	7,6	8,4	8	8	8	8
Q (unités)	400.00	400.000	400.00	400.00	360.00	440.00
CA (MD)	3.040	3.360	3.200	3.200	2.880	3.520
CVU	6	6	5,7	6,3	6	6
CV	2.400	2.400	2.280	2.520	2.160	2.640
CF	226 (a)	434	408	252	278	382
VAN (MD)	(113)	584	497	(26)	61	410
Δ relative VAN	-148%	+148%	+111%	-111%	-74%	+74%
Δ relative	-5%	+5%	-5%	+5%	-10%	+10%
Coeff élasticité	29,6	29,6	-22,2	-22,2	7,4	7,4

(a) CF = 0,65 (3.040 – 2.400 - 400) + 0,35 x 200 = 226

(b) (b) : VAN= - 1.000 + 226 $\frac{1-1{,}15^{-5}}{0{,}15}$ + 0,65 x 400 x $1{,}15^{-5}$ = 113

Situation initiale : p_0 = 8D ; v_0=6 D ; Q_0= 400.000 unités ; VAN_0=235,478 MD

Coefficient d'élasticité : $\frac{\Delta\ relative\ VAN}{\Delta\ relative\ \ paramètre\ x} = \frac{\frac{VAN_i - VAN_0}{VAN_0}}{\frac{x_i - x_0}{x_0}}$

Le coefficient d'élasticité du prix de vente, en valeur absolue, est plus élevé que ceux du coût variable et de la quantité à vendre. La VAN du projet est plus sensible à ce paramètre qu'aux coûts variables ou à la quantité vendre.

4- Les trois scénarios

Les trois scénarios à considérer sont les suivants :

	Pessimist	Réalist	Optimist
Prix (D)	7,6	8	8,4
Q (unités)	360.000	400.00	440.000
CA (MD)	2.736	3.200	3.696
CVU	6,3	6	5,7
CV	2.268	2.400	2.508
CF	114,2	330	582,2
VAN (MD)	(487,918)	235,47	1.080,89

Le scénario réaliste correspond à la situation initiale.

Partant du fait que le scénario réaliste a deux fois plus de chance de se réaliser que les deux autres scénarios, on peut alors établir le tableau suivant :

	Pessimist	Réalist	Optimist
VAN (MD)	(487,918	235,4	1.080,89
Probabilité	0,25	0,5	0,25

$$p(VAN > 0) = p\left(\frac{VAN - E(VAN)}{\sigma(VAN)} > -\frac{E(VAN)}{\sigma(VAN)}\right) = p\left(Z > -\frac{265{,}982}{555{,}496}\right) = p(Z > -0{,}48) = 1 - p(Z < -0{,}48)$$

=1- [1-p (Z < 0,48)]= p(Z<0,48) = 0,6844

E(VAN) = $\sum_{i=1}^{3} p_i VAN_i$ =265,982 ;

V(VAN) = $\sum_{i=1}^{3} p_i \left(VAN_i - E(VAN)\right)^2$ = 308.575,852 ; σ(VAN) = 555,496

Rappel: p(Z>x) = 1- p(Z<x) ; p(Z<-x) = 1 - p(Z<x)

Section 2. Les méthodes usuelles de prise en compte de risque

Il s'agit des méthodes subjectives utilisées dans la pratique pour tenir compte du facteur risque d'une manière simple. Le risque est perçu comme une pénalité à appliquer à la rentabilité sans risque. Ainsi, la rentabilité obtenue sera une rentabilité ajustée pour le risque. La pénalité n'est pas évaluée d'une manière objective, mais est fixée subjectivement par le décideur selon ses perceptions et son attitude face au risque. Le projet analysé est retenu lorsque sa VAN ajustée est positive. Cet ajustement s'effectue par la modification de l'un des paramètres d'investissement.

1. La réduction de la durée de vie du projet

Cette méthode consiste à éliminer la rentabilité des cash-flows jugés trop incertains par ce qu'ils sont trop éloignés dans le temps. Cette méthode est très appropriée pour les entreprises appartenant à un secteur de mutations technologiques rapides. Toutefois, le nombre d'années à retrancher de la durée de vie initiale reste imprécis. Le calcul de la VAN ajustée s'effectue comme suit :

$$VAN_{ajustée} = \sum_{t=1}^{n-m} \frac{E(CF_t)}{(1+k)^t} - I_0$$

n : durée de vie probable ; m : nb années à retrancher où les cash-flows sont jugés incertains ; $E(CF_t)$: Cash-flow espéré de l'année t ; k : taux d'actualisation pour les flux monétaires certains.

2. La méthode de l'équivalent certain

Cette méthode consiste à corriger les cash-flows espérés en leur appliquant un coefficient d'équivalent certain α_t. Les coefficients d'ajustement sont compris entre 0 et 1 et varient de façon inverse avec le degré de risque des flux. Ainsi, plus un flux est incertain, plus la valeur de α_t sera faible.

$$VAN_{ajustée} = \sum_{t=1}^{n} \frac{\alpha_t E(CF_t)}{(1+k)^t} - I_0$$; α_t : coefficient d'équivalent certain.

Remarque : Même si le coefficient d'équivalent certain est fixé d'une valeur arbitraire, il n'empêche qu'il intègre implicitement deux dimensions, l'une subjective et l'autre objective : la fonction de préférence du décideur et la distribution associée au cash-flow :

Equivalent certain = cash-flow espéré – Prime de risque

$$EC = E(CF) - \left[-\frac{U''(CF)}{U'(CF)} \, x \, \frac{\sigma^2(CF)}{2} \right]_0$$

$-\frac{U''(CF)}{U'(CF)}$: indice d'aversion absolue au risque ; $\frac{\sigma^2(CF)}{2}$: distribution du cash-flow.

3. Le taux d'actualisation ajusté pour le risque

Cette méthode consiste à corriger le taux d'actualisation en ajoutant une prime de risque. Plus le degré de risque est élevé, plus la prime est élevée. Le fait de majorer le taux d'actualisation aura pour effet de réduire la VAN. Cette prime de risque est composée en réalité de deux primes : une prime de risque normal correspondant au risque de l'activité actuelle et une prime de risque spécifique au projet.

$$VAN_{ajustée} = \sum_{t=1}^{n} \frac{E(CF_t)}{(1+k+PR)^t} - I_0 \quad ; \quad PR = PR_N + PR_S$$

PR_N : prime de risque normal de l'activité actuelle ; PR_S : prime de risque spécifique au projet.

Remarque : Comparaison entre la méthode d'équivalent certain et celle du taux d'actualisation ajusté :

Si les deux méthodes devraient conduire au même résultat en termes de VAN ajustée, alors on devrait avoir l'égalité suivante :

$$VAN_{ajustée} = \sum_{t=1}^{n} \frac{E(CF_t)}{(1+k+PR)^t} - I_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{\alpha_t E(CF_t)}{(1+k)^t} - I_0 \text{ signifie } \frac{E(CF_t)}{(1+k+PR)^t} = \frac{\alpha_t E(CF_t)}{(1+k)^t}$$

signifie $\frac{1}{(1+k+PR)^t} = \frac{\alpha_t}{(1+k)^t}$ signifie $\left(\frac{1+k}{1+k+PR}\right)^t = \alpha_t$; sachant que 0 $< \alpha <$ 1.

Application 3 :

Soit un projet X dont les données relatives aux flux monétaires sont les suivantes :

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CF_t	-1000	200	250	300	300	250	100	50	50	50	50
α_t		0,95	0,9	0,85	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2

Pour tenir compte du risque entaché au projet, le directeur financier peut choisir entre trois alternatives :

1- Soit retrancher les trois dernières années

2- Soit attribuer les coefficients d'ajustement correspondants à chaque année.

3- Considérer une prime de risque spécifique au projet pour 2%.

Déterminer la VAN du projet selon chacune des hypothèses. Commenter.

Le taux sans risque est de 10%.

Solution :

1- La VAN sans tenir compte de risque est :

$$VAN = \sum_{t=1}^{10} \frac{E(CF_t)}{(1+r_f)^t} - I_0 = 119{,}871$$

2- Pour une pénalité de 3 ans, on aura:

$$VAN_{ajustée} = \sum_{t=1}^{7} \frac{E(CF_t)}{(1+r_f)^t} - I_0 = 56{,}060$$

3- En ajustant les cash-flows, on obtient :

$$VAN_{ajustée} = \sum_{t=1}^{10} \frac{\alpha_t E(CF_t)}{(1+r_f)^t} - I_0 = -\ 110{,}908$$

4- En ajustant le taux d'actualisation, on aura :

$$VAN_{ajustée} = \sum_{t=1}^{10} \frac{E(CF_t)}{(1+PR+r_f)^t} - I_0 = 51{,}520$$

On note l'arbitraire relatif à cette approche qui est dû à la subjectivité du décideur. En effet, la VAN ajustée varie énormément selon le paramètre à aménager. Il suffit de changer le paramètre à ajuster pour avoir accepter un projet qui devrait être rejeté ou de rejeter un projet qui devrait être accepté.

Section 3. L'évaluation des projets en avenir risqué

On parle de risque lorsqu'il s'agit d'une incertitude mesurable. L'outil communément utilisé est l'outil probabiliste. Ainsi, un avenir risqué est qualifié d'avenir probabiliste. En finance, le risque au sens large est généralement associé aux situations de perte financière. D'une manière plus précise, il est mesuré par la variabilité du rendement attendu. Ainsi, pour étudier la rentabilité d'un projet en contexte risqué, il s'agit de considérer les distributions de probabilités des flux monétaires ou des différentes VAN.

Règle de décision :

Pour apprécier le risque d'un projet, on peut :

soit comparer la probabilité d'avoir une VAN positive au seuil d'acceptation du décideur, qui dépend de l'attitude du décideur face au risque ;

soit comparer le coefficient de variation de la VAN ($C.V. = \frac{\sigma_{VAN}}{E_{VAN}}$) au seuil toléré par le décideur. Le coefficient de variation mesure le degré de risque par unité de rentabilité escomptée. C'est une mesure de risque relative. Le projet retenu est celui qui aura le CV le moins élevé car c'est le moins risqué.

Exemple :

	δ (VAN)	E(VAN)	C.V
Projet A	0,5	100	0,005
Projet B	0,7	250	0,0028

Selon l'écart-type de la VAN, on retient le projet A : c'est le projet le moins risqué.

Selon l'espérance de la VAN, on retient le projet B : c'est le projet le plus rentable.

Il y a donc un conflit. C'est le coefficient de variation qui permettra de résoudre ce problème et de concilier entre les deux paramètres l'écart-type et l'espérance. Selon le C.V, on retient le projet B. Il présente le risque relatif le moins élevé.

Au sein de cette section, nous allons considérer dans un premier temps le cas d'un projet à vocation indépendante de l'activité normale de l'entreprise. Ensuite, on s'attarde aux projets qui s'insèrent totalement dans les activités de l'entreprise. La démarche est la même, mais l'interprétation des résultats diffère.

1. Etude des projets indépendants de l'activité de l'entreprise

Pour évaluer la performance d'un projet, il s'agit tout d'abord de calculer les paramètres (espérance et variance) de sa VAN. Ceux-ci peuvent être calculés sur la base des flux monétaires ou directement à partir des différentes VAN et leur distribution de probabilité.

Pour cela, on part de la définition de la VAN.

$$VAN = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+k)^t} - I_0$$

- **Espérance de la VAN**

$$E(VAN) = E\left(\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+k\ )^t} - I_0\ \right) = \sum_{t=1}^{n} \frac{E(CF_t)}{(1+k\ )^t} - I_0$$

- **Variance de la VAN**

$$V(VAN) = V\left(\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r\ )^t} - I_0\right) = V\left(-I_0 + \frac{CF_1}{(1+k)} + \frac{CF_2}{(1+k)^2} + \ldots + \frac{CF_n}{(1+k)^n}\right)$$

$$V(VAN) = V\left(\frac{CF_1}{(1+k)}\right) + V\left(\frac{CF_2}{(1+k)^2}\right) + \ldots + V\left(\frac{CF_n}{(1+k)^n}\right) + 2\operatorname{cov}\left(\frac{CF_1}{(1+k)};\frac{CF_2}{(1+k)^2}\right) + \ldots + 2\operatorname{cov}\left(\frac{CF_{n-1}}{(1+k)^{n-1}};\frac{CF_n}{(1+k)^n}\right)$$

$$V(VAN) = \frac{V(CF_1)}{(1+k)^2} + \frac{V(CF_2)}{(1+k)^4} + \ldots + \frac{V(CF_n)}{(1+k)^{2n}} + 2\frac{\operatorname{cov}(CF_1;CF_2)}{(1+k)^3} + 2\frac{\operatorname{cov}(CF_1;CF_3)}{(1+k)^4} + \ldots + 2\frac{\operatorname{cov}(CF_{n-1};CF_n)}{(1+k)^{2n-1}}$$

$$V(VAN) = \frac{\sigma_1^2}{(1+k)^2} + \frac{\sigma_2^2}{(1+k)^4} + \ldots + \frac{\sigma_n^2}{(1+k)^{2n}} + 2\frac{\varphi_{1;2}\,\sigma_1\,\sigma_2}{(1+k)^3} + 2\frac{\varphi_{1;3}\,\sigma_1\,\sigma_3}{(1+k)^4} + \ldots + 2\frac{\varphi_{n-1;n}\,\sigma_{n-1}\,\sigma_n}{(1+k)^{2n-1}}$$

Pour calculer la VAN, il faut distinguer le cas d'indépendance totale, de dépendance totale ou de dépendance partielle.

❖ ***1er cas. Les cash-flows sont partiellement dépendants :*** $-1 < \varphi < 1$

$$V(VAN) = \frac{\sigma_1^2}{(1+k)^2} + \frac{\sigma_2^2}{(1+k)^4} + \ldots + \frac{\sigma_n^2}{(1+k)^{2n}} + 2\frac{\varphi_{1;2}\,\sigma_1\,\sigma_2}{(1+k)^3} + 2\frac{\varphi_{1;3}\,\sigma_1\,\sigma_3}{(1+k)^4} + \ldots + 2\frac{\varphi_{n-1;n}\,\sigma_{n-1}\,\sigma_n}{(1+k)^{2n-1}}$$

$$V(VAN) = \sum_{t=1}^{n} \frac{\sigma_t^2}{(1+k)^{2t}} + 2\sum_{t=1}^{n}\sum_{t'>t}^{n} \frac{\varphi_{tt'}\sigma_t\sigma_{t'}}{(1+k)^{t+t'}}$$

❖ ***2ème cas. Les cash-flows sont totalement indépendants :*** $\varphi = 0$

$$V(VAN) = \frac{\sigma_1^2}{(1+k)^2} + \frac{\sigma_2^2}{(1+k)^4} + \ldots + \frac{\sigma_n^2}{(1+k)^{2n}} = \sum_{t=1}^{n} \frac{\sigma_t^2}{(1+k)^{2t}}$$

❖ ***3ème cas. Les cash-flows sont positivement et parfaitement corrélés :*** $\varphi = 1$

$$V(VAN) = \sum_{t=1}^{n} \frac{\sigma_t^2}{(1+k)^{2t}} + 2\sum_{t=1}^{n}\sum_{t'>t}^{n} \frac{\sigma_t\sigma_{t'}}{(1+k)^{t+t'}} = \left(\sum_{t=1}^{n} \frac{\sigma_t}{(1+k)^t}\right)^2$$

$$\sigma(VAN) = \sum_{t=1}^{n} \frac{\sigma_t}{(1+k)^t}$$

- ***4ème cas. Les cash-flows sont négativement et parfaitement corrélés :*** $\varphi = -1$

$$V(VAN) = \sum_{t=1}^{n} \frac{\sigma_t^2}{(1+k)^{2t}} - 2\sum_{t=1}^{n}\sum_{t'>t}^{n} \frac{\sigma_t \sigma_{t'}}{(1+k)^{t+t'}}$$

Application 4 :

Soit un projet d'investissement initial nécessitant 5.000 D et ayant une durée de vie de 2 ans. La distribution des flux monétaires pour les deux années se présente comme suit :

Flux monétaires	2.500	5.000	7.500
Probabilité	0,3	0,4	0,3

Le taux de rendement exigé par les actionnaires est de 10%.

T.A.F : Etudier la rentabilité du projet en cas d'indépendance et dépendance totale. Commenter.

Solution :

1- Espérance de la VAN

E(VAN) = $-I_0 + \frac{E(CF_1)}{1+k} + \frac{E(CF_2)}{(1+k)^2}$ = -5.000 + $\frac{5.000}{1,1}$ + $\frac{5.000}{1,1^2}$ = 3.677

E(CF_1) = E(CF_2) = $\sum_{i=1}^{3} p_i CF_i$ = 5.000

2- Variance de la VAN

V(VAN) = $\frac{V(CF_1)}{(1+k)^2} + \frac{V(CF_2)}{(1+k)^4} + \frac{2\varphi_{1,2}\sigma_1\sigma_2}{(1+k)^3}$

V(CF_1) =V(CF_2) = $\sum_{i=1}^{3} p_i \left(CF_i - E(CF)\right)^2$ = 3.750.000 ; $\sigma_{CF} = 1.936{,}491$

2.1- En cas d'indépendance totale

$$V(VAN) = \frac{V(CF_1)}{(1+k)^2} + \frac{V(CF_2)}{(1+k)^4} = \frac{3.750.000}{1{,}1^2} + \frac{3.750.000}{1{,}1^4} = 5.660.474\ ;$$

$\sigma_{VAN} = 2.379$

2.2- En cas de dépendance totale positive

$$V(VAN) = \frac{V(CF_1)}{(1+k)^2} + \frac{V(CF_2)}{(1+k)^4} + \frac{2\sigma_1\sigma_2}{(1+k)^3} = \left(\frac{\sigma_1}{(1+k)} + \frac{\sigma_2}{(1+k)^2}\right)^2$$

$$\sigma_{VAN} = \frac{\sigma_1}{(1+k)} + \frac{\sigma_2}{(1+k)^2} = \frac{1.936{,}491}{1{,}1} + \frac{1.936{,}491}{1{,}1^2} = 3.361$$

2.3- En cas de dépendance totale négative

$$V(VAN) = \frac{V(CF_1)}{(1+k)^2} + \frac{V(CF_2)}{(1+k)^4} - \frac{2\sigma_1\sigma_2}{(1+k)^3} = \left(\frac{\sigma_1}{(1+k)} - \frac{\sigma_2}{(1+k)^2}\right)^2$$

$$\sigma_{VAN} = \left|\frac{\sigma_1}{(1+k)} - \frac{\sigma_2}{(1+k)^2}\right| = \frac{1.936{,}491}{1{,}1} - \frac{1.936{,}491}{1{,}1^2} = 160{,}04$$

Le risque de projet est plus élevé lorsque les cash-flows sont parfaitement et positivement corrélés. Il est le moins élevé lorsque les cash-flows sont négativement et totalement dépendants.

2. Technique de l'arbre de décision

C'est une technique permettant une représentation schématique des alternatives possibles de décisions et des conséquences y afférentes. Le problème se pose dans ce cadre comme une succession d'évènements dont l'apparition des uns est conditionnée par l'apparition de ceux qui les précèdent. A cet effet :

- On commence par identifier tous les nœuds relatifs à toutes les possibilités de la dernière année de la vie du projet. Soit x le nombre des alternatives.
- On calcule ensuite pour chaque nœud la VAN du projet et sa probabilité de réalisation comme suit, avec j = 1, … , x et n la durée de vie du projet :

$$VAN_j = -I_0 + \frac{CF_{1j}}{(1+k)} + ... + \frac{CF_{nj}}{(1+k)^n}$$

$$p_j = p_j\left(CF_1 \cap CF_2 \cap ... \cap CF_n\right) = p_j\,(CF_n \,/\, CF_{n-1})\ x\ p_j\,(CF_{n-1} \,/\, CF_{n-2})\ x ... p_j\,(CF_2 \,/\, CF_1$$

- L'espérance et la variance de la VAN du projet seront enfin obtenues de la manière suivante :

$$E(VAN) = \sum_{j=1}^{x} p_j\, VAN_j \quad ; \quad \sigma^2(VAN) = \sum_{j=1}^{x} p_j \left[VAN_j - E(VAN)\right]^2$$

Rappel : $p(A/B) = \frac{p\left(A \cap B\right)}{p(B)}$ *signifie* $p\left(A \cap B\right) = p(A/B)\ x\ p(B)$

Application 5 :

Retrouver les mêmes résultats de l'application précédente en utilisant la technique de l'arbre de décision dans le cas d'indépendance totale et dépendance positive totale.

Solution :

1- Indépendance totale des cash-flows

CF_0	P_{CF1}	CF1	$P_{CF2/CF1}$	CF2	VAN_j	P_j	$p_j x VAN_j$	$p_j(VAN_j\text{-}E(VAN))^2$
			0,3	2 500	- 661,157	0,09	- 59,504	1 694 300,253
	0,3	2 500	0,4	5 000	1 404,959	0,12	- 168, 595	- 619 834,711
			0,3	7 500	3 471,074	0,09	- 312, 397	- 3 841,951
			0,3	2 500	1 611,570	0,12	- 193, 388	- 512 260,092
- 5	0,4	5	0,4	5	3	0,1	- 588,	- -

000		000		000	677,686	6	430	
			0,3	7 500	5 743,802	0,12	- 689, 256	- 512 260,092
			0,3	2 500	3 884,298	0,09	- 349, 587	- 3 841,951
	0,3	7 500	0,4	5 000	5 950,413	0,12	- 714, 050	- 619 834,711
			0,3	7 500	8 016,529	0,09	- 721, 488	- 1 694 300,253
	$1,1^{-1}$	0,909 09	$1,1^{-2}$	0,826 45		**1**	**3 677,686**	**5 660 474,011**
							Ecart-type	**2 379,18**

E(VAN) = 3.677,686 ; σ_{VAN} = 2.379,18

2- Dépendance positive totale des cash-flows

CF_0	P_{CF1}	CF1	$P_{CF2/CF1}$	CF2	VAN_j	P_j	$p_j x VAN_j$	$p_j(VAN_j-E(VAN))^2$
	0,3	2 500	1	2 500	- 661,157	0,3	- 198,347	5 647 667,509
- 5 000	0,4	5 000	1	5 000	3 677,686	0,4	- 1 471,074	- -
	0,3	7 500	1	7 500	8 016,529	0,3	- 2 404,959	- 5 647 667,509
	$1,1^{-1}$	0,909	$1,1^{-2}$	0,826		**1**	**3 677,686**	**11 295 335,018**
							Ecart-type	**3 360,85**

On a retrouvé les mêmes résultats que précédemment.

Remarque : Pour avoir une idée sur le degré d'acceptabilité du projet, on peut calculer la probabilité que la VAN soit positive, en prenant l'hypothèse que la distribution des flux monétaires est une variable qui suit la loi normale.

En cas d'indépendance des cash-flows ; on a :

$VAN \longrightarrow N\left(E(VAN);\sigma_{VAN}\right)$; $VAN \longrightarrow N(3.677;2.379)$

P(VAN>0) $= p\left(Z > \frac{0-3.677}{2.379}\right)$= p(Z>-1,545) = 1- p(Z<-1,545) = 1- [1 – p(Z<1,545)]= p(Z<1,545) = 0,9388

Cette probabilité est très élevée, le projet pourrait donc être considéré comme acceptable.

3. Etude d'un projet s'intégrant dans l'activité de l'entreprise

La valeur de l'entreprise est fonction de la valeur de ses projets d'investissement considérés dans leur ensemble. Dans ces conditions, il apparaît plus approprié d'évaluer le risque du projet en considérant son impact sur le risque global de l'entreprise. Ainsi, entre deux projets, le meilleur, pris isolément, n'est pas nécessairement le meilleur si l'on prend en considération le portefeuille de projets déjà existant de l'entreprise. La démarche proposée pour évaluer l'effet de l'interaction entre un projet et l'ensemble des projets de l'entreprise, déjà existants, s'inspire de la théorie de portefeuille.

La variabilité totale pour une combinaison ou un portefeuille de projets est :

$$\sigma^2(VAN_P) = \sum_{i=1}^{n}\sigma^2(VAN_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1/\,j\neq i}^{n}\mathrm{cov}(VAN_i, VAN_j)$$

La covariance des VAN des deux projets se calcule en appliquant la formule suivante :

$$\mathrm{cov}(VAN_i, VAN_j) = \sum_{k=1}^{n} p_k\left[VAN_{ik} - E(VAN_i)\right]\left[VAN_{jk} - E(VAN_j)\right]$$

Application 6 :

Conjoncture	Prob	VAN des projets actuels	VAN des nouveaux projets		
			X	Y	Z
Bonne	0,15	100 000	5 000	6 000	15 000

Moyenne	0,7	50 000	3 500	2 500	10 500
Mauvaise	0,15	20 000	1 500	300	3 500

T.A.F : Quel est le projet qu'il faut choisir parmi X, Y et Z ?

Solution :

Il s'agit de calculer pour chaque projet l'espérance, la variance et le coefficient de variation de la VAN :

Projets	E(VAN)	V(VAN)	σ_{VAN}	CV	Cov(a,j)
actuels	53 000	501 000 000	22 383	0,422	1
X	3 425	931 875	965,34	0,282	20 475 000
Y	2 695	2 525 475	1 589,17	0,590	35 565 000
Z	10 125	10 246 875	3 201,07	0,316	66 375 000

Projets	$E(VAN_j+VAN_E)$	$V(VAN_j+VAN_E)$	σ_{VAN}	CV
X	56 425	542 881 875	23 299,83	0,413
Y	55 695	574 655 475	23 971,97	0,430
Z	63 125	643 996 875	25 377,09	0,402

$E(VAN) = \Sigma p_i \, VAN_i$;

$V(VAN) = \Sigma p_i \, (VAN_i - E(VAN))^2$

$E(VAN_X+VAN_E) = E(VAN_E) + E(VAN_X) = 53.000 + 3.425 = 56.425$

$V(VAN_X+VAN_E) = V(VAN_E) + V(VAN_X) + 2 \text{ Cov } (X,E) = 501.000.000 + 931.875 + 2 \times 20.475.000 = 542.881.875$

Les résultats indiquent que l'entreprise devrait choisir le projet Z et non le projet X. En effet, le projet Z est celui qui, combiné avec les autres projets de l'entreprise, maximise la VAN totale espérée de l'entreprise, tout en minimisant le risque global de cette dernière. L'effet de diversification qu'apport le projet Z au portefeuille existant de projets permet de réduire le risque initial de l'entreprise.

Section 4. Le recours à la théorie de l'utilité

C'est à Von Neuman et Morgenstern (1944) que revient le mérite d'avoir développé cette théorie. Mais leur approche en matière de construction des courbes d'utilité ainsi que l'analyse de l'attitude d'un agent vis-à-vis du risque sont considérées relativement longue. Cette approche suppose la construction des indices qui expriment les préférences des agents, le calcul de l'équivalent certain et le calcul d'autres points d'indifférence. Friedman et Savage (1948) avancent une solution à ces limites et proposent le lien entre le comportement d'un agent vis-à-vis du risque et le signe de la dérivée seconde de la fonction d'utilité par rapport à la richesse (W).

Au sein de cette section, nous présentons les différents axiomes sur lesquels se basent la théorie de l'utilité ainsi que les propriétés des fonctions d'utilité. Quelques fonctions d'utilité seront exposées à la fin de cette section.

1. Les axiomes de la fonction de l'utilité

La loterie (Prospect) est une liste de n résultats x_i affecté chacun d'une probabilité p_i.

$L = \{ x_1 , p_1 ; x_2 , p_2 ; \ldots ; x_n , p_n \}$

La fonction d'utilité U(.) est tel que Max л = max Σ p_i $U(x_i)$ = max $E[U(x_i)]$

Si on utilise la richesse comme argument, on a : max $E[U(w_i)]$ avec $w_i = x_0 + x_i$

Remarque : En remplaçant $U(w_i)$ par une transformation linéaire positive $\alpha+\beta\ U(w_i)]$, le classement donné n'est pas modifié.

La fonction de l'utilité repose sur plusieurs axiomes :

- **La comparabilité :** l'individu sait exprimer des préférences concernant des montants certains (dire $x < y$ ou $x > y$ ou $x \sim y$).

- **La transitivité :** Si un individu préfère x à y et y à z alors il préfère x à z.

si x > y et y > z alors x > z

- **La continuité :** Si x est préféré à y et si y est préféré à z, il existe alors une unique probabilité p tel que l'individu soit indifférent entre y et {x , p ; z , 1-p}.

si x > y et y > z alors il existe p / **y** ~ {x , p ; z , 1-p}.

- **L'indépendance :** Si x est préféré à y et si y est préféré à z, il existe alors une unique probabilité p tel que {x , p ; y , 1-p} est préféré à {z , p ; y , 1-p}.

si x > y et y > z alors il existe p / {x , p ; **y , 1-p** } > {z , p ; **y , 1-p**}.

- **La dominance :** si x est préféré à z alors il existe une unique probabilité p > p' tel que {x , p ; z , 1-p} est préféré à {x , p' ; z , 1-p'}.

Si x > z alors il existe p > p' / {x , **p** ; z , 1- p } > {x , **p'** ; z , 1- p'}.

- **La non-satiété :** l'individu veut consommer davantage. La décision 'un investisseur rationnel consiste à maximiser l'espérance de sa fonction d'utilité.

2. Les propriétés de la fonction de l'utilité

Les deux hypothèses fondamentales de la théorie de l'utilité sont :

1- L'utilité marginale de la fortune est toujours positive, de sorte que l'utilité est toujours fonction monotone croissante du niveau de la fortune ;

2- Dans toutes leurs prises de décision, les agents économiques préfèrent toujours une utilité supérieure à une utilité moindre (postulat de rationalité et axiome de non satiété).

Dans tous les cas où le preneur de décision n'est pas indifférent au risque, le seul critère de décision correct est celui de la maximisation de l'utilité espérée des conséquences de ses actions.

Théorème de Von Neuman et Morgenstern

Utilité espérée du gain $E(U(x)) \neq$ Utilité du gain espéré $U(E(x))$

Utilité espérée du gain = $E(U(x)) = p_1 U(x_1) + p_2 U(x_2) \neq U(p_1 x_1 + p_2 x_2) = U(E(x))$ Utilité du gain espéré = $U(E(x))$

3. Fonctions d'utilité et attitudes face au risque

L'attitude vis-à-vis du risque de l'agent économique détermine la forme de sa fonction d'utilité de la fortune (W). Trois attitudes sont à distinguer : l'indifférence au risque, l'aversion au risque et la préférence pour le risque.

Deux notions importantes sont à mettre en évidence l'équivalent certain et la prime de risque.

- **L'équivalent certain**

L'équivalent certain mesure le plus faible revenu certain auquel une personne engagée dans une situation de risque serait d'accord de céder son droit de participation au jeu car il procure la même utilité que l'utilité espérée du revenu aléatoire de la situation risquée. C'est le montant dont l'encaissement certain procure la même utilité que le jeu aléatoire.

Il se calcule en partant du principe général $\mathbf{U(EC) = E(U(x)) \neq U(E(x))}$.

A partir de l'équivalent certain de chaque alternative risquée, on peut construire autant de points de la courbe d'utilité que l'on souhaite.

- **La prime de risque**

C'est la somme d'argent qu'il faut allouer à l'individu considéré indifférent entre la participation et la non participation à la loterie. Pour un individu averse au risque, elle représente la somme qu'il est disposé à payer pour se soustraire au risque (exemple : les primes d'assurances). Réciproquement, c'est la somme qu'un amateur de risque exigerait d'encaisser pour céder son droit de participer au jeu aléatoire.

Cette somme correspond à la différence entre l'espérance mathématique de la loterie et l'équivalent certain : **PR = л = E(x) – EC.**

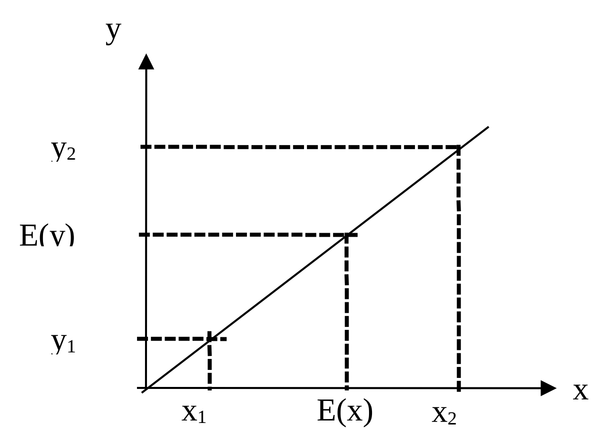
Rappel :

$E(x) = p\,x_1 + (1-p)\,x_2$

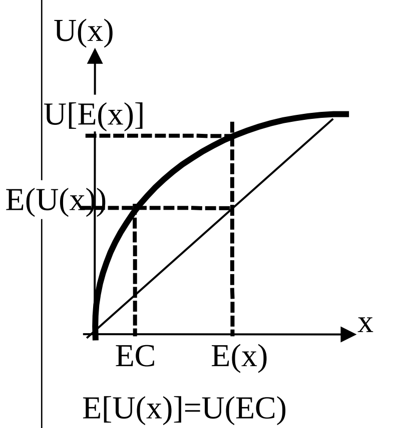
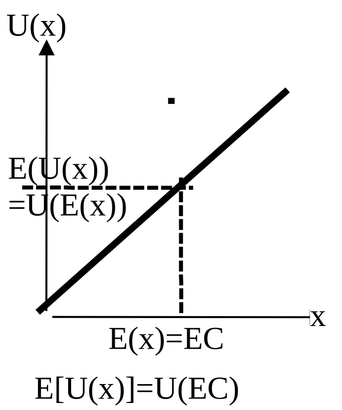
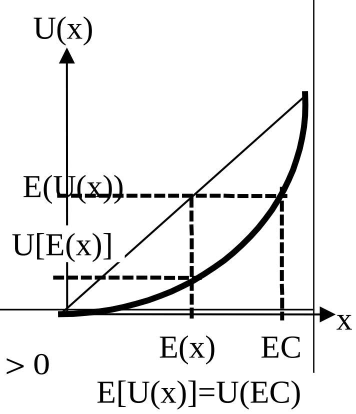
$x_1 \longrightarrow y_1$

$x_2 \longrightarrow y_2$

$E(x) \longrightarrow E(y)$



Nous récapitulons dans le tableau ci-dessous les propriétés de la fonction d'utilité pour chaque attitude :

Attitude	**Aversion au risque**	**Neutralité**	**Goût pour le risque**
Courbe			
$\frac{\partial U(x)}{\partial x}$	$\frac{\partial U(x)}{\partial x} > 0$ -Utilité marginale positive -Fonction d'utilité monotone croissante	$\frac{\partial U(x)}{\partial x} > 0$ -Utilité marginale positive -Fonction d'utilité monotone croissante	$\frac{\partial U(x)}{\partial x} > 0$ -Utilité marginale positive -Fonction d'utilité monotone croissante
$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} < 0$ -Utilité marginale décroissante -Fonction d'utilité concave	$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} = 0$ -Utilité marginale constante -Fonction d'utilité rectiligne	$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} > 0$ -Utilité marginale croissante -Fonction d'utilité convexe
Formule VNM	E [U(x)] < U[E(x)]	E [U(x)] = U[E(x)]	E [U(x)] > U[E(x)]

Prime de risque	E(x) – EC > 0	E(x) – EC = 0	E(x) – EC < 0

4. Les mesures de l'aversion au risque

Il est important de mesurer le degré d'aversion pour le risque. La littérature financière fournit deux mesures : l'aversion absolue pour le risque (ARA) et l'aversion relative pour le risque (RRA).

- **L'indice d'aversion absolue pour le risque ARA:**

Il est appelé aussi indice d'Arrow et permet d'expliquer la variation des préférences de l'investisseur suite à une variation de sa richesse.

Il est défini comme suit : $R_A = ARA = -\dfrac{U''(x)}{U'(x)}$

Lorsque l'individu est averse au risque, U '' < 0 ; $ARA(W_0) > 0$ et $\pi > 0$

- Si $\dfrac{\partial ARA}{\partial x} < 0$: l'indice ARA de l'investisseur est décroissant ; l'augmentation de la richesse est suivie d'une diminution de l'aversion au risque ; autrement dit l'augmentation du montant investi en actifs risqués.

- Si $\dfrac{\partial ARA}{\partial x} > 0$: l'indice ARA de l'investisseur est croissant ; l'augmentation de la richesse est suivie d'une augmentation de l'aversion au risque ; c'est-à-dire la diminution du montant investi en actifs risqués, alors: ;

- Enfin, si $\dfrac{\partial ARA}{\partial x} = 0$; une aversion absolue pour le risque constante ; la préférence de l'investisseur n'est pas affectée par l'augmentation de sa richesse.

- **L'indice d'aversion relative pour le risque RRA :**

Il s'agit d'analyser la variation, en pourcentage, du montant investi en actifs risqués suite à une variation de la richesse. Cette variation relative est mesurée par l'indice RRA. Cet indice est mesuré par :

$$R_R = RRA = -\,x\frac{U''(x)}{U'(x)} = x(ARA)$$

- Une dérivée première négative de RRA par rapport à la richesse traduit la diminution de l'aversion au risque ; c'est-à-dire l'augmentation de la part investie en actifs risqués avec l'augmentation de la richesse.

- Une dérivée positive traduit l'augmentation de l'aversion au risque, autrement dit la diminution de la proportion investie en actifs risqués.

- Et une dérivée nulle implique que la proportion de la richesse investie en actifs risqués reste la même quelle que soit la croissance de cette richesse.

Application 6 :

Soit la fonction logarithmique U(x) = log(a x) ; a > 0

Quelle est la condition nécessaire pour que cette fonction soit une fonction d'utilité ? Quelle attitude cette fonction décrit-elle ?

Calculer les indices d'aversion au risque. Commenter.

Solution

Pour que U(x) soit une fonction d'utilité, il faut que U'(x)>0 ;

$U'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$; U'(x) = >0 signifie x > 0

$U''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$: l'utilité marginale est décroissante ; la fonction d'utilité est concave. L'individu est donc averse au risque.

Les indices d'aversion au risque :

$$R_A = RARA = -\frac{U''(x)}{U'(x)} = -\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} > 0$$

$\frac{\partial R_A}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} < 0$: suite à l'augmentation de la richesse de l'individu, l'aversion au risque de l'agent diminue.

$R_R = RRA = -x\frac{U''(x)}{U'(x)} = xR_A = \frac{1}{x}x = 1$ = constante

$\frac{\partial R_A}{\partial x} = 0$; l'aversion relative pour le risque est constante ; la part investie en actifs risquée n'est pas affectée par l'augmentation de la richesse de l'investisseur.

Chapitre 3

CHOIX DE FINANCEMENT ET COUT DE CAPITAL

Pour faire face à ses besoins et financer son activité, l'entreprise peut faire appel à différentes sources de financement. Ces sources peuvent être soit des fonds propres, soit des fonds externes, soit encore des fonds quasi-fonds propres.

Pour sélectionner la meilleure source de financement, l'entreprise est soumise d'abord à des contraintes préalables qui vont délimiter le champ des choix. Parmi ces contraintes, nous énumérons les règles financières exigées par l'emprunteur, le statut juridique de l'entreprise, sa taille, l'état du marché financier. La source de financement choisie doit par ailleurs répondre à certains critères de choix exigés par la direction. Ces critères peuvent être soit financiers, à savoir le coût de financement, la rentabilité financière, les flux disponibles, l'adaptabilité des modalités de paiement, soit non financiers tels que la procédure de l'obtention, les garanties demandées, le risque technologique, la dilution du pouvoir).

Au sein de chapitre, nous allons présenter au niveau de la première section les différentes sources de financement. Au niveau des sections qui suivent, nous calculerons leurs coûts.

Section 1. Les sources de financement

La classification la plus intuitive est celle entre le financement interne et externe. Mais on peut classer les différentes catégories de ressources correspond à l'ordre d'exigibilité des capitaux.

Financement de l'entreprise

Fonds propres	Quasi-fonds propres	Fonds externes
CAF Cessions éléments d'actif Augmentation du capital Primes et subventions Capital risque	Titres participatifs Prêts participatifs Titres subordonnés Obligations remboursables ou convertibles en actions	- Emprunts auprès du groupe et des associés Emprunts bancaires Emprunts obligataires Billets de trésorerie Crédit-bail

1. Le financement par fonds propres

C'est l'ensemble des ressources que l'entreprise peut se procurer de façon autonome, soit grâce à son activité courante (CAF), soit à l'occasion de ses opérations de désinvestissement (cession des éléments d'actifs immobilisés).

La CAF est le flux potentiel de trésorerie (sans tenir compte des décalages temporels) dégagé par l'ensemble de l'activité normale de l'entreprise. La CAF n'est pas exactement un flux de trésorerie (cash flow en anglais). En effet, elle ne tient pas compte des encaissements et des décaissements effectivement réalisés au cours de la période. Pour obtenir le flux de trésorerie issu de l'activité d'exploitation, il faut retrancher à la CAF la variation du besoin en fonds de roulement de la période.

L'entreprise peut aussi renforcer ses fonds propres grâce à une augmentation du capital en numéraire. Si les actionnaires ne peuvent pas assurer tous seuls l'augmentation de capital, ils peuvent recourir au capital risque en faisant appel aux sociétés d'investissement à capital risque (SICAR). Ces sociétés prennent une participation minoritaire dans le capital de la société cible de façon temporaire dans l'objectif de leur rétrocession après quelques années, lorsque la société cible est en mesure de se financer par elle-même. Les primes et subventions que l'entreprise peut obtenir auprès de l'Etat ou les associations à but non lucratif constituent également des fonds propres.

2. Le financement par quasi-fonds propres

Les quasi-fonds propres sont des sources de financement hybrides, dont la nature se situe entre les fonds propres et les dettes. Nous y distinguons spécifiquement les titres et prêts participatifs, les titres subordonnés et les obligations remboursables ou convertibles en actions. Alors que les titres participatifs sont réservés aux sociétés publiques et aux coopératives, les prêts participatifs sont accordés aux PME. Les titres subordonnés sont des obligations émises par les sociétés de capitaux dont le remboursement ne peut être effectué qu'après désintéressement de tous les autres créanciers (à l'exception des titulaires de prêts ou titres participatifs). Les obligations remboursables en actions seront échangées, à l'échéance, contre des actions. Les obligations convertibles en actions seront échangées contre des actions si l'obligataire le demandera quand il y trouve un avantage financier.

3. Les fonds externes

Les fonds externes constituent le complément indispensable du financement par capitaux propres. Ses formes peuvent être diverses : des emprunts auprès du groupe et associés, auprès des établissements bancaires, les emprunts obligataires et le crédit-bail (leasing). L'emprunt obligataire est émis par l'Etat, les entreprises et les collectivités publiques. Le contrat de crédit-bail est un contrat de location portant sur un bien meuble ou immeuble à usage professionnel, assorti d'une option d'achat à un prix fixé d'avance. Les billets de trésorerie, les bons de Trésor et les certificats de dépôt sont également des fonds externes. Ce sont des titres de créances négociables émis respectivement par les sociétés anonymes, l'Etat et les banques de dépôt et les banques d'investissement.

Section 2. Le coût des fonds propres

Le coût des capitaux propres correspond au taux de rendement minimum exigé par les actionnaires. La théorie financière a offert différents modèles permettant de calculer le prix et le coût de l'action, dont notamment le MEDAF (CAPM) et les modèles basés sur la distribution des dividendes.

1. Le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)

Le modèle d'évaluation des actifs financiers MEDAF ou Capital Asset Pricing Model (CAPM) tel que formulé par Sharpe (1964), Lintner (1965) et Mossin (1966) permet d'énoncer la relation entre l'espérance du rendement d'une action et son risque systématique comme suit : $E(R_i) = R_f + \beta_i \left(E(R_M) - R_f\right)$

L'espérance du return de la valeur i est égale au return de l'actif non risqué augmenté de l'espérance de la prime de risque propre à la valeur i. Celle-ci est égale au produit de l'espérance de la prime de risque du marché $\left(E(R_M) - R_f\right)$ par la quantité de risque systématique (β_i) qui est un coefficient mesurant la contribution de la valeur i au risque total du portefeuille de marché.

$$\beta_i = \frac{\operatorname{cov}(R_i, R_M)}{\operatorname{var}(R_M)} = \frac{\rho_{iM}\sigma_i\sigma_M}{\sigma_M^2} = \frac{\rho_{iM}\sigma_i}{\sigma_M}$$

Remarque 1 : L'interprétation de la valeur β_i s'avère d'un intérêt majeur.

$$E(R_i) - R_f = \alpha_i + \beta_i \left(E(R_M) - R_f\right) \quad + \quad \varepsilon_{it}$$

$$\textit{prime de risque du titre} = \alpha_i + \beta_i \,\textit{prime de risque du marché} \quad + \quad \varepsilon_{it}$$

$\beta_i = \dfrac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$: pente de la droite de régression

Remarque : Risque de l'actif = risque du marché systématique + risque spécifique

Seul le risque de marché est rémunéré. Le risque spécifique n'est pas rémunéré, le rendement est lié seulement à β_i, car il peut être éliminé grâce à la diversification. Il mesure en effet la volatilité du return de la valeur i, c'est la mesure dans laquelle une variation de R_M se répercute dans Ri.

- Lorsque β_i <1, la valeur de i est défensive ; les variations de R_M sont répercutées de manière atténuée dans les variations de R_i.
- Lorsque β_i >1, la valeur est agressive. Les variations de R_M sont répercutées de manière amplifiée dans les variations de R_i.

Remarque 2 : L'indice boursier doit être :

1- exhaustif : calculé à partir de tous les actifs financiers risqués traités sur le marché

2- indice de returns et non pas seulement un indice de prix, Il doit donc tenir compte des revenus liquides distribués (dividendes, intérêts) ;

3- un indice pondéré et non une moyenne arithmétique simple (on tient compte de la capitalisation boursière).

Application 1 :

Un analyste financier a effectué les prévisions suivantes :

$E(R_M) = 14\%$; $R_f = 9\%$; $\sigma_{R_M} = 8\%$; $\sigma_{R_i} = 12\%$; $\rho_{iM} = 60\%$

T.A.F. : Calculer $E(R_i)$.

Solution :

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(R_i, R_M)}{\text{var}(R_M)} = \frac{\rho_{iM}\sigma_i\sigma_M}{\sigma_M^2} = \frac{\rho_{iM}\sigma_i}{\sigma_M} = \frac{0,6x0,12}{0,08} = 0,9$$

$$E(R_i) = R_f + \beta_i \left(E(R_M) - R_f\right) = 9\% + 0,9\,(14\% - 9\%) = 13,5\%$$

2. Les modèles basés dur la distribution de dividendes

Le coût des capitaux propres est défini comme étant le coût qui égalise la valeur actuelle de tous les dividendes futurs attendus par les actionnaires avec le cours de l'action sur le marché et éventuellement le prix de cession de l'action à la fin de période de détention de l'action.

$$k_{CP} \; / \quad \sum décaissée\ actualisée = \sum encaissée\ actualisée$$

$$k_{CP} \; / \quad prix\ de\ l'action\ à\ t_0 = VA(dividendes\ \ futures\ à\ t + \quad prix\ de\ cession\ à\ t_n)$$

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{\mathrm{D_t}}{(1+k_{CP})^t} + \frac{P_n}{(1+k_{CP})^n} = \frac{D_1}{(1+k_{CP})^1} + \frac{D_2}{(1+k_{CP})^2} + \ldots + \frac{D_n}{(1+k_{CP})^n} + \frac{P_n}{(1+k_{CP})^n}$$

Avec : P_0 la valeur de l'action en 0 ; P_n prix de revente de l'action en n ; D_t dividende reçu en t, k_{CP} : le taux d'actualisation ; n période de détention de l'action.

2.1. Distribution des dividendes constants

$D_1 = D_2 = \ldots = D_n$

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{\mathrm{D_t}}{(1+k_{CP})^t} + \frac{P_n}{(1+k_{CP})^n} = \frac{D_1}{(1+k_{CP})^1} + \frac{D_1}{(1+k_{CP})^2} + \ldots + \frac{D_1}{(1+k_{CP})^n} + \frac{P_n}{(1+k_{CP})^n}$$

$\sum_{t=1}^{n} \frac{\mathrm{D_t}}{(1+k_{CP})^t}$ est une somme d'une suite géométrique de n termes de premier terme $\frac{\mathrm{D_1}}{(1+k_p)^1}$ et de raison $\frac{1}{(1+k_p)}$;

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+k_{CP})} \frac{1 - \frac{1}{(1+k_{CP})^n}}{1 - \frac{1}{(1+k_{CP})}} + \frac{P_n}{(1+k_{CP})^n} = \frac{D_1}{k_{CP}}\left[1-(1+k_{CP})^{-n}\right] + \frac{P_n}{(1+k_{CP})^n}$$

Si $n \to \infty$ lim $(1 + k_{CP})^{-n} = 1$ et lim $\frac{\mathrm{P_n}}{(1+k_p)^n} = 0$

D'où $P_0 = \frac{D_1}{k_{CP}}$ ou encore $k_{CP} = \frac{D_1}{P_0}$

2.2. Le modèle de Gordon & Shapiro

On s'attend à ce que le dividende augmente à un taux constant g proportionnel à la croissance des bénéfices ; $g < k_{CP}$.

D_1 = constante

$D_2 = D_1\,(1+g)$

$D_3 = D_2\,(1+g) = D_1\,(1+g)^2$

$D_n = D_{n-1}\,(1+g) = D_1\,(1+g)^{n-1}$

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{\mathrm{D_t}}{(1+k_{CP})^t} + \frac{P_n}{(1+k_{CP})^n} = \frac{D_1}{(1+k_{CP})^1} + \frac{D_2}{(1+k_{CP})^2} + \ldots + \frac{D_n}{(1+k_{CP})^n} + \frac{P_n}{(1+k_{CP})^n}$$

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+k_{CP})^1} + \frac{(1+g)D_1}{(1+k_{CP})^2} + \frac{(1+g)^2 D_1}{(1+k_{CP})^3} \ldots + \frac{(1+g)^{n-1} D_1}{(1+k_{CP})^n} + \frac{P_n}{(1+k_{CP})^n}$$

$\sum_{t=1}^{n} \frac{\mathrm{D_t}}{(1+k_{CP})^t}$ est une somme d'une suite géométrique de n termes de

premier terme $\frac{\mathrm{D_1}}{(1+k_p)^1}$ et de raison $\frac{1+g}{1+k_{CP}}$;

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+k_{CP})} \frac{1-\left(\frac{1+g}{1+k_{CP}}\right)^n}{1-\left(\frac{1+g}{1+k_{CP}}\right)} + \frac{P_n}{(1+k_{CP})^n} = \frac{D}{k_{CP}-g}\left[1-\left(\frac{1+g}{1+k_{CP}}\right)^n\right] + \frac{P_n}{(1+k_{CP})^n}$$

Si n →∞ $\lim \left(\frac{1+g}{1+k_{CP}}\right)^n = 0$ car $g < k_{CP}$ et $\lim \frac{\mathrm{P_n}}{(1+k_p)^n} = 0$

D'où $P_0 = \frac{D_1}{k_{CP}-g}$ ou encore $k_{CP} = \frac{D_1}{P_0} + g$

2.3. Le modèle de Solomon

Soit b le taux de rétention des bénéfices ; d le taux de distribution, b+d=1 ; soit r le taux de rendement annuel moyen constant des capitaux investis. La croissance est assurée uniquement par l'autofinancement, la partie du bénéfice non distribué.

$$B_t = B_{t-1} + r\,b\,B_{t-1} = (1+r\,b)\,B_{t-1}$$

$$D_t = (1-b)B_t = (1-b)\,(1+r\,b)\,B_{t-1} = (1+r\,b)\,[(1-b)\,(1+r\,b)] = (1+r\,b)\,D_{t-1}$$

$$soit\ g = r\,b\,; \quad r\,b < k_{CP}; \quad k_{CP} = \frac{D}{P} + r\,b$$

2.4. Le modèle de Bates

Le modèle de Bates est une extension du modèle Gordon & Shapiro. Il prévoit les bénéfices s'accroissent à un taux différent. Le taux de distribution des dividendes n'est pas également constant.

les bénéfices par action augmentent à un taux $g < k_{CP}$;

soit d le taux de rétention du dividende ; $D_1 = d\ BPA_0$;

soit le $PER_t = \frac{P_t}{BPA_t}$; un indicateur plus important que le prix en lui-même

$$P_t = PER_t x BPA_t ; \quad valeur\ de\ l'entreprise = N\ x\ P_t = PER\ x\ Bénéfice\ total$$

Le Price Earning Ratio est un indicateur de capitalisation des bénéfices. C'est le nombre de fois que les investisseurs sont prêts à acheter le bénéfice de l'entreprise. Cet indice est sensible à plusieurs facteurs notamment l'état de marché financier, la notoriété de l'entreprise, etc. Ses variations traduit une évaluation globale du risque de l'entreprise. Cet indice est fréquemment utilisé dans l'estimation du prix de l'action lors de son introduction en bourse. Il doit être comparé aux PER antérieurs et ceux des entreprises appartenant au même secteur.

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{d_t BPA_t}{(1+k_{CP})^t} + \frac{P_n}{(1+k_{CP})^n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{d_1(1+g_1)BPA_0}{(1+k_{CP})} + \frac{d_2(1+g_1)(1+g_2)BPA_0}{(1+k_{CP})^2} + \ldots + \frac{P_n}{(1+k_{CP})^n}$$

Si d=constante ; g=constante ; $D_1 = d\ BPA_0$;

$BPA_1 = BPA_0\ (1+g)$

$BPA_2 = BPA_1\ (1+g) = BPA_0\ (1+g)^2$

$BPA_n = BPA_0\ (1+g)^n$

On alors : $P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{d(1+g)BPA_0}{(1+k_{CP})} + \frac{d(1+g)^2 BPA_0}{(1+k_{CP})^2} + \ldots + \frac{d(1+g)^n BPA_0}{(1+k_{CP})^n} + \frac{P_n}{(1+k_{CP})^n}$

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_1}{(1+k_{CP})^t} + \frac{P_n}{(1+k_{CP})^n} = \frac{D_1}{k_{CP}-g}\left[1-\left(\frac{1+g}{1+k_{CP}}\right)^n\right] + \frac{P_n}{(1+k_{CP})^n}$$

Or $PER_0 = \frac{P_0}{BPA_0}$ signifie $P_0 = PER_0 x\ BPA_0$;

$PER_n = \frac{P_n}{BPA_n}$ signifie $P_n = PER_n x\ BPA_n = PER_n xBPA_0\ (1+g)^n$

$$PER_0 x\ BPA_0 = \frac{dBPA_à}{k_{CP} - g}\left[1 - \left(\frac{1+g}{1+k_{CP}}\right)^n\right] + \frac{PER_0\ BPA_0\ (1+g)^n}{(1+k_{CP})^n}$$

$$PER_0 = \frac{d}{k_{CP} - g}\left[1 - \left(\frac{1+g}{1+k_{CP}}\right)^n\right] + PER_0\left(\frac{1+g}{1+k_{CP}}\right)^n$$

Si n →∞ lim $\left(\frac{1+g}{1+k_{CP}}\right)^n$ = 0 car g < k_{CP} et lim $\left(\frac{1+g}{1+k_{CP}}\right)^n$ = 0

D'où $PER_0 = \frac{d}{k_{CP} - g}$ ou encore $k_{CP} = \frac{d}{PER_0} + g$

Remarque : $k_{CP} = \frac{d}{PER_0} + g = \frac{d\ x\ BPA_0}{PER_0\ x\ BPA_0} + g = \frac{D_1}{P_0} + g$

Application 2 :

La société MECANICA vient de distribuer un dividende de 3 Dinars par action. On prévoit qu'il augmentera à un taux constant de 5% indéfiniment. Si les actionnaires exigent un taux de rendement minimum de 12%, quel est le prix du titre ? Quel sera son prix dans 3 ans ? Dans 15 ans ?

Selon le modèle à croissance stable :

$$P_0 = \frac{D_1}{k_{CP} - g} = \frac{D_0\ (1+g)}{k_{CP} - g} = \frac{3 \times 1{,}05}{0{,}12 - 0{,}05} = 45\ D$$

$$P_3 = \frac{D_4}{k_p - g} = \frac{D_1\ (1+g)^3}{k_p - g} = P_0\ (1+g)^3 = 45 \times (1{,}05)^3 = 52{,}093\ D$$

$$P_{15} = \frac{D_{16}}{k_p - g} = \frac{D_1\ (1+g)^{15}}{k_p - g} = P_0\ (1+g)^{15} = 45 \times (1{,}05)^{15} = 93{,}552\ D$$

Section 3. Le coût de la dette

Le coût de dette est le taux qui égalise le montant reçu à la date 0 et les différents décaissements échelonnés décaissés. Pour calculer le coût brut ou net, on retient respectivement les annuités brutes ou nettes d'impôt.

On a toujours : $k_d / \sum$ *encaissée actualisée* $= \sum$ *décaissée actualisée* ; $V_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t}{(1+k)^t}$

1. Les modalités de paiement

Il existe quatre Il existe quatre modalités principales de remboursement : par annuités constantes, par amortissements constants, in fine et enfin avec ou sans différé. Alors que l'amortissement constitue la partie de l'annuité consacrée au remboursement de l'emprunt, l'annuité est composée de l'amortissement et des intérêts. C'est le montant à verser chaque année au prêteur.

Annuités = Intérêt + Amortissement ; $a_t = i_t + p_t$

Amortissement = Partie de l'annuité consacrée au remboursement du montant principal de l'emprunt ; Σ amortissements = montant total emprunté ; $V_0 = \sum_{t=1}^{n} p_t$

Les intérêts sont calculés sur la base du capital restant dû.

Remarque : L'annuité correspond à un paiement annuel. Dans le cas des paiements mensuels et trimestriels, etc, on parlera respectivement de mensualités, trimestrialités, etc.

Remboursement par amortissement constant :

Le montant remboursé du principal est le même à la fin de chaque période. Il est égal au montant de l'emprunt divisé par le nombre de périodes ($p_t = p = V_0/n$).

On a : $a_t = p_t + i\,V_{t-1}$; $a_{t+1} = p_{t+1} + i\,V_t$; $p_t = p_{t+1} = \frac{V_0}{n}$; $V_0 = \sum_{t=1}^{n} p_t$

$p_{t+1} = p_t$ signifie $a_{t+1} - i\,V_t = a_t - i\,V_{t-1}; a_{t+1} = a_t - i\,V_{t-1} + i\,V_t = a_t - i\,p_t = a_t - i\frac{V_0}{n}$

On a donc $a_{t+1} = a_t - i\frac{V_0}{n}$; c'est une suite arithmétique.

Remboursement par annuité constante :

Il s'agit d'un remboursement par versements constants (annuités ou mensualités).

On a : $a_t = p_t + i\,V_{t-1}$; $a_{t+1} = p_{t+1} + i\,V_t$; $a_t = a_{t+1}$

$a_{t+1} = a_t$ signifie $p_{t+1} + i\,V_t = p_t + i\,V_{t-1}$

Signifie $p_{t+1} = p_t + i\,V_{t-1} - i\,V_t = p_t + i(V_{t-1} - V_t) = p_t + i\,p_t = p_t(1+i)$

On a donc $p_{t+1} = p_t(1+i)$;

$$V_0 = \sum_{t=1}^{n} p_t = p_1 \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = p_1 \frac{1-(1+i)^n}{-i} = p_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$V_0 = p_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i}$; d'où : $p_1 = \frac{i\,V_0}{(1+i)^n - 1}$

$$a_t = a_1 = p_1 + iV_0 = \frac{i\,V_0}{(1+i)^n - 1} + iV_0 = iV_0\left(1 + \frac{1}{(1+i)^n - 1}\right) = iV_0 \frac{(1+i)^n - 1 + 1}{(1+i)^n - 1} == iV_0 \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{iV_0}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$a_t = a_1 = \frac{iV_0}{1-(1+i)^{-n}}$$

On a donc : $p_{t+1} = p_t(1+i)$; $p_1 = \frac{i\,V_0}{(1+i)^n - 1}$; $a_t = a_1 = \frac{iV_0}{1-(1+i)^{-n}}$

Remarque :

Les annuités sont constantes, mais leur composition interne varie. La part consacrée aux intérêts diminue alors que celle relative au remboursement du principal de l'emprunt augmente au fur et à mesure des remboursements.

Remboursement en bloc

C'est un emprunt remboursable en totalité, en bloc, à la fin de la durée prévue. Seuls les intérêts sont payés périodiquement. Les annuités, sauf la dernière, ne sont composées que d'intérêts. La dernière annuité comprend aussi bien le remboursement du principal total de l'emprunt que les intérêts.

Remboursement avec différé

On parle alors du différé de remboursement ou période de grâce. Ni intérêt ni principal ne sera payé durant la période de grâce. En général, le différé est de un ou deux ans. :

Sans période de grâce :

$$V_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t}{(1+k_d)^t} = \frac{a_1}{(1+k_d)} + \frac{a_2}{(1+k_d)^2} + \ldots + \frac{a_n}{(1+k_d)^n}$$

Si a = constante ; $V_0 = \frac{a}{k_d}\left[1-(1+k_d)^{-n}\right]$

Avec un an de différé :

$$V_0 = \frac{0}{(1+k_d)} + \frac{a_1}{(1+k_d)^2} + \frac{a_2}{(1+k_d)^3} + \ldots + \frac{a_n}{(1+k_d)^{n+1}} = \frac{1}{(1+k_d)}\left[\frac{a_1}{(1+k_d)} + \frac{a_2}{(1+k_d)^2} + \ldots + \frac{a_n}{(1+k_d)^n}\right]$$ Si a

= constante ; $V_0 = \frac{a}{(1+k_d)k_d}\left[1-(1+k_d)^{-n}\right]$

Avec deux ans de différé :

$$V_0 = \frac{0}{(1+k_d)} + \frac{0}{(1+k_d)^2} + \frac{a_1}{(1+k_d)^3} + \frac{a_2}{(1+k_d)^4} + \ldots + \frac{a_n}{(1+k_d)^{n+2}} = \frac{1}{(1+k_d)^2}\left[\frac{a_1}{(1+k_d)} + \ldots + \frac{a_n}{(1+k_d)^n}\right]$$ Si

a = constante ; $V_0 = \frac{a}{(1+k_d)^2 k_d}\left[1-(1+k_d)^{-n}\right]$

Avec x ans de différé :

$$V_0 = \frac{1}{(1+k_d)^x}\left[\frac{a_1}{(1+k_d)} + \ldots + \frac{a_n}{(1+k_d)^n}\right]$$

Si a = constante ; $V_0 = \frac{a}{(1+k_d)^x k_d}\left[1-(1+k_d)^{-n}\right]$

2. Le coût d'un emprunt bancaire

Dans le cas d'un emprunt bancaire, les frais de charge et les commissions bancaires de la première année donnent lieu à une économie d'impôt. Les charges financières retenue dans le calcul des annuités donnent lieu également à une économie d'impôt.

Coût de la dette brute : $k_d^b / V_0 - F = \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t \, brutes}{\left(1+k_d^b\right)^t} = \sum_{t=1}^{n} \frac{p_t + iV_{t-1}}{\left(1+k_d^b\right)^t}$;

Coût net de la dette : $k_d^n / V_0 - F(1-T) = \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t \, nettes}{\left(1+k_d^n\right)^t} = \sum_{t=1}^{n} \frac{p_t + iV_{t-1}(1-T)}{\left(1+k_d^n\right)^t}$

Remarque : $i(1-T) < k_d^n$ et $i < k_d^b$; i est le taux d'intérêt facial.

3. Le coût d'un emprunt obligataire

Les caractéristiques des emprunts obligataires sont les suivantes :

Valeur nominale C : Valeur attribuée à une obligation afin de calculer les intérêts ;

Valeur d'émission E : Montant versé par l'obligataire (prêteur, le détenteur de l'obligation, le souscripteur) pour obtenir une obligation.

Primes d'émission PE = C – E

* si E < C, l'émission au-dessous du pair

* si E = C, l'émission au pair

Valeur de remboursement R : Montant versé lors du remboursement de l'obligation par l'entreprise (émettrice) au prêteur souscripteur.

Primes de remboursement PR= R-C ;

* si R = C, remboursement au pair

* si R > C, remboursement au-dessus du pair

Coupon d'intérêt c : intérêts annuels pour une obligation : c = C x i ; i est le taux nominal ou facial qui sert à calculer les intérêts.

Date de jouissance : Date de départ du calcul des intérêts.

Dans le cas d'un emprunt obligataire, les primes de remboursement et d'émission sont amortissables, soit en 3 ans, soit au prorata du nombre des titres remboursés et donnent lieu à une économie d'impôt. Les charges financières sont également déductibles. Les frais d'émission et les autres charges occasionnées l'année de déblocage sont déductibles la même année.

Coût de la dette brute : $k_d^b / N\,E - F = \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t \; brutes}{\left(1+k_d^b\right)^t} = \sum_{t=1}^{n} \frac{n_t R_t + i V_{t-1}}{\left(1+k_d^b\right)^t}$;

Coût net de la dette :

$$k_d^n / N\,E - F(1-T) = \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t \; nettes}{\left(1+k_d^n\right)^t} = \sum_{t=1}^{n} \frac{n_t R + i V_{t-1}(1-T) - Tn_{PE} - Tn_{PE})}{\left(1+k_d^n\right)^t}$$

Remarque : en pratique, on parle de remboursement par annuité brute constante et non par annuité effective constante.

Ce calcul concerne plus spécialement l'entreprise emprunteuse qui émet l'emprunt obligataire. L'obligataire, c'est-à-dire le prêteur, qui réalise un placement en souscrivant une obligation, doit connaître le taux de rentabilité offert pour le comparer à celui d'autres emprunts obligataires ou à celui d'autres placements. C'est le taux de rendement actuariel brut qui intéresse l'obligataire.

C'est le taux qui réalise l'égalité entre le montant versé à la souscription par l'obligataire, le prêteur, et les annuités versées par l'émetteur, l'entreprise emprunteuse, actualisées à ce taux. Les primes d'émission et les frais d'émission ne concerne que l'entreprise émettrice et non pas l'obligataire.

Le TAB est calculé pour l'ensemble des obligataires et suppose qu'ils conservent leurs obligations jusqu'à leur remboursement. C'est un taux de rendement actuel avant impôt. Il peut être calculé à n'importe quel moment de la vie d'une obligation. Les flux fixes (annuités et prix de remboursement) restent inchangés. Le seul élément modifié est le montant investi lors de l'acquisition de l'obligation sur le marché secondaire (la bourse). Pour calculer le taux de rendement actuariel à n'importe quel moment de la vie d'une obligation, il faut écrire la relation d’équivalence entre le prix d’achat et la suite des flux à recevoir actualisés au taux TAB que l’on cherche.

$$TAB / NE = \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t \; brutes}{\left(1+k_d^b\right)^t} = \sum_{t=1}^{n} \frac{n_t R_t + i V_{t-1}}{\left(1+k_d^b\right)^t}$$

En présence d’annuité constante, NE = a $\frac{1 \;-\; (1+k_o)^{-n}}{k_o}$

1- S’il n’y a ni de prime de remboursement, ni de prime d’émission, ni de frais d’émission, les sommes versées par les obligataires et la dette sont de même montant. Le taux de rendement actuariel brut est égal au taux nominal de l’emprunt

Taux de rendement actuariel brut = taux nominal de l’emprunt

2 – S’il y a une prime de remboursement ou une prime d’émission ou frais d’émission, les obligataires ont versé moins lors de la souscription qu’ils ne recevront lors du remboursement. La prime de remboursement est perçue en plus des intérêts et contribue à augmenter le taux de rendement actuariel brut.

Taux de rendement actuariel brut > taux nominal de l’emprunt.

4. Le coût d’un crédit-bail

Le coût net du crédit-bail est le coût qui permet l’équivalence entre la valeur initial de l’équipement acquis en crédit-bail et les différentes redevances payées actualisées à ce taux. On distingue deux cas où l’option est exercée ou non :

Si on n’exerce pas l’option: $k_b^n / I_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{L(1-T) + T\,A}{\left(1+k_b^n\right)^t}$;

I_0 le prix d’achat de l’équipement ; L loyer annuel ; T taux d’impôt ; A dotation aux amortissements ; n durée du contrat de loyer.

La redevance inclut aussi bien le loyer que son économie d’impôt sans oublier la perte d’économie d’impôt sur la dotation d’amortissement du matériel non acquis.

Si on exerce l'option : $k_b^n / I_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{L(1-T) + T\,A}{(1+k_b^n)^t} + \frac{M}{(1+k_b^n)^n} - \sum_{t=n+1}^{n'} \frac{T\,x\,A}{(1+k_b^n)^t}$

I_0 le prix d'achat de l'équipement ; L loyer annuel ; T taux d'impôt ; A dotation aux amortissements ; n durée du contrat de loyer ; M le prix de rachat de l'équipement en n ; n'-n la période d'utilisation de l'équipement lorsqu'il est acheté.

La redevance inclut aussi bien le loyer, son effet fiscal que la perte d'économie d'impôt sur la dotation d'amortissement du matériel non acquis. Au terme de la fin du contrat (t=n), il y aura décaissement du prix de rachat du matériel et l'économie d'impôt relative aux dotations d'amortissement pour la période de son acquisition.

Remarque 1 : l'effet fiscal de la dotation d'amortissement sera calculé en considérant la période d'amortissement fiscal.

Remarque 2 : L'économie d'impôt relative au loyer se réalise en fin d'année. Ainsi, si les loyers sont semestriels, on aura alors :

$$k_b^n / I_0 = \sum_{t=1}^{n2} \frac{L}{(1+k_b^n)^{t/2}} + \sum_{t=1}^{n} \frac{-2LT + AT}{(1+k_b^n)^t}$$

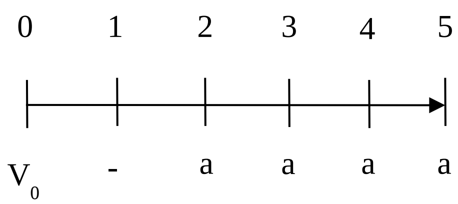
Application 3 :

Soit un emprunt de 2.000 D à 10% sera remboursé sur 4 ans avec amortissement constant et une année de grâce. L'emprunt sera encaissé en deux tranches : 1.000 D à t 0 et 1000 D après 3 mois. Les frais de dossier de 250 D seront réglés après 6 mois. T, le taux d'impôt s'élève à 40%.

T.A.F : Calculer son coût brut et net de financement.

Solution :

L'entreprise versera la première annuité 1 ans après la date de l'emprunt, conformément au schéma suivant :



$$V_0 = \frac{0}{(1+k_d)} + \frac{a}{(1+k_d)^2} + \frac{a}{(1+k_d)^3} + \frac{a}{(1+k_d)^4} . \frac{a}{(1+k_d)^5}$$

$$V_0 = \frac{1}{(1+k_d)}\left[\frac{a}{(1+k_d)} + \frac{a}{(1+k_d)^2} + \frac{a}{(1+k_d)^3} + \frac{a}{(1+k_d)^4}\right]$$

Remarque : Le compteur des intérêts s'incrémente dès le déblocage de l'emprunt, même s'ils ne sont pas payés pendant la période de grâce, les intérêts seront pris en compte dans les décaissements des années qui suivent.

Le tableau d'amortissement

t	Capital restant dû	Intérêts	Economie d'impôt/ints	Principal	Annuité brute	Annuité nette
1	2 000				-	-
2	2 200	220	88	500	720	632
3	1 700	170	68	500	670	602
4	1 200	120	48	500	620	572
5	700	70	28	500	570	542
Total		580	232	2 000	2 580	2 348

Le coût brut de financement

$$k_d^b / NE - F = \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t\, brutes}{(1+k_d^b)^t} = \sum_{t=1}^{n} \frac{n_t R_t + i V_{t-1}}{(1+k_d^b)^t}$$

Déboursement en deux tranches avec frais de dossier de 250 D réglées après 6 mois :

$$1.000 + \frac{1.000}{(1+k_d)^{3/12}} - \frac{250}{(1+k_d)^{6/12}} = \frac{720}{(1+k_d)^2} + \frac{670}{(1+k_d)^3} + \frac{620}{(1+k_d)^4} + \frac{570}{(1+k_d)^5}$$

C'est-à-dire : $\frac{720}{(1+k_d)^2}+\frac{670}{(1+k_d)^3}+\frac{620}{(1+k_d)^4}+\frac{570}{(1+k_d)^5}-1.000-\frac{1.000}{(1+k_d)^{3/12}}+\frac{250}{(1+k_d)^{6/12}}=0$

Par interpolation linéaire, on a :

6%		377,721
20%	-	311,226
kd	0	

D'où : $\frac{k_d-6\%}{20\%-6\%}=\frac{0-377,721}{-311,226-377,721}$; k_d = 13,7% > i

Le coût net du financement

$$k_d^n / V_0 - F(1-T) = \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t \; nettes}{\left(1+k_d^n\right)^t} = \sum_{t=1}^{n} \frac{p_t + iV_{t-1}(1-T)}{\left(1+k_d^n\right)^t}$$

Déboursement en deux tranches avec frais de dossier de 250 D réglées après 6 mois :

$$1.000+\frac{1.000}{(1+k_d)^{3/12}}-\frac{250}{(1+k_d)^{6/12}}+\frac{250 \text{ x } 0,4}{(1+k_d)}=\frac{632}{(1+k_d)^2}+\frac{602}{(1+k_d)^3}+\frac{572}{(1+k_d)^4}+\frac{542}{(1+k_d)^5}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{632}{(1+k_d)^2}+\frac{602}{(1+k_d)^3}+\frac{572}{(1+k_d)^4}+\frac{542}{(1+k_d)^5}-1.000-\frac{1.000}{(1+k_d)^{3/12}}+\frac{250}{(1+k_d)^{6/12}}-\frac{100}{(1+k_d)}=0$$

Par interpolation linéaire, on a :

6%		89,024
20%	-	529,423
kd	0	

D'où : $\frac{k_d-6\%}{20\%-6\%}=\frac{0-89,024}{-529,423-89,024}$; k_d = 8% > i (1- T) = 6%

Application 4 :

Soit un emprunt obligataire remboursable en 4 annuités brutes constantes. Ses caractéristiques sont le suivantes : N = 1000 titres, i =10%, C= 100, E =90, R=110, T = 40%. Les frais d'émission s'élèvent à 2D par titre. Les primes sont amorties linéaires sur 4 ans.

T.A.F :

1- Calculer le montant de l'annuité brute.

2- Dresser le tableau d'amortissement.

3- Calculer le coût brut de la dette.

4- Calculer le coût brut de la dette.

Solution :

1- Il s'agit d'un remboursement par annuité brute constante.

On a : $a_t = n_t R + i\,V_{t-1} = a_{t+1} = n_{t+1} R + i\,V_t$

On a donc : $n_{t+1} = n_t(1+i'')$; $n_1 = \frac{Ni''}{(1+i'')^n - 1}$; $a_t = a_1 = \frac{Ni''R}{1-(1+i'')^{-n}}$ avec

$$i'' = \frac{iC}{R}$$

$$i'' = \frac{iC}{R} = \frac{0{,}1x100}{110} = 0{,}091 \ ;$$

$$n_1 = \frac{Ni''}{(1+i'')^n - 1} = \frac{1000x0{,}091}{(1+0{,}091)^4 - 1} = 218{,}376$$

$$a_t = a_1 = \frac{Ni''R}{1-(1+i'')^{-n}} = \frac{1000x0{,}09x110}{1-(1+0{,}091)^{-4}} = 34.021{,}329$$

2-Tableau d'amortissement de l'emprunt

Voir page suivante

3-Coût brut de la dette

Coût de la dette brute : $k_d^b / NE-F = \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t\ brutes}{(1+k_d^b)^t} = \sum_{t=1}^{n} \frac{n_t R_t + iV_{t-1}}{(1+k_d^b)^t}$;

$$NE - FE = \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t\ brutes}{(1+k_d^b)^t} = \frac{a_t}{k_d^b}\left(1-(1+k_d^b)^{-4}\right)$$

$$90.000 - 2.000 = \frac{34.021{,}329}{k_d^b}\left(1-(1+k_d^b)^{-4}\right)$$

$$\frac{k_d^b}{\left(1-\left(1+k_d^b\right)^{-4}\right)}=\frac{34.021,329}{90.000-2.000}=0,387$$

Par interpolation linéaire, on a :

Pour k= 10% , $\frac{k_d^b}{\left(1-\left(1+k_d^b\right)^{-4}\right)}=$ 0,315 ; pour k=20%, $\frac{k_d^b}{\left(1-\left(1+k_d^b\right)^{-4}\right)}=$ 0,386

$$\frac{k_d^b-0,1}{0,2-0,1}=\frac{0,387-0,315}{0,386-0,315} \;;\; k_d^b=\frac{0,072}{0,071}(0,2-0,1)+0,1=0,201=20,1\%$$

$$k_d^b=20,1\%$$

4-Coût net de la dette :

$$k_d^n / N\,E-F(1-T)=\sum_{t=1}^{n}\frac{a_t\ nettes}{\left(1+k_d^n\right)^t}=\sum_{t=1}^{n}\frac{n_tR+iV_{t-1}(1-T)-Tn_{PE}-Tn_{PE})}{\left(1+k_d^n\right)^t}$$

$$k_d^n / 90.000-2000\,x\,0,6=\frac{28.021,329}{\left(1+k_d^n\right)}\frac{28.894,,832}{\left(1+k_d^n\right)^2}+\frac{29.847,744}{\left(1+k_d^n\right)^3}+\frac{30.887,285}{\left(1+k_d^n\right)^4}$$

$$\frac{28.021,329}{\left(1+k_d^n\right)}\frac{28.894,,832}{\left(1+k_d^n\right)^2}+\frac{29.847,744}{\left(1+k_d^n\right)^3}+\frac{30.887,285}{\left(1+k_d^n\right)^4}-88.800=0$$

Par interpolation linéaire, on a :

Pour k= 10% , $\sum_{t=1}^{4}a_t-88.800=4.075,445$;

pour k=20%, $\sum_{t=1}^{4}a_t-88.800=-13.214,549$

$$\frac{k_d^b-0,1}{0,2-0,1}=\frac{0-4.075,445}{-13.214,549-4.075,445} \;;$$

$$k_d^b=\frac{-4.075,445}{-17.289,993}(0,2-0,1)+0,1=0,1256=12,36\%$$

t	Nb obligations vivantes	Capital restant dû	Intérêts	Nb obligations amorties	Principal	annuité brute	Economie d'IS/intérêts	Economie d'IS/PR	Economie d'IS/PE	annuité nette
1	1 000	100 000,000	10 000	218	24 021,329	34 021,329	4 000,000	1 000,000	1 000,000	28 021,329
2	782	78 162,428	7 816,243	238	26 205,086	34 021,329	3 126,497	1 000,000	1 000,000	28 894,832
3	543	54 339,623	5 433,962	260	28 587,367	34 021,329	2 173,585	1 000,000	1 000,000	29 847,744
4	284	28 351,107	2 835,111	284	31 186,218	34 021,329	1 134,044	1 000,000	1 000,000	30 887,285
	Totaux		**26 085,316**	**1 000**	**110 000,000**	**136 085,316**	**10 434,126**	**4 000,00**	**4 000,00**	**117 651,189**

Section 4. Le coût moyen pondéré de capital

L'entreprise fait appel à des capitaux propres et à des dettes à long terme pour financer ses projets. Le coût de capital sera alors le coût de cette. C'est un coût moyen pondéré des différentes ressources financières.

k_D : le coût de la dette ;

k_{CP} : coût des capitaux propres

$$k_C = k_D(1-T)\frac{D}{D+CP} + k_{CP}\frac{CP}{D+CP}$$

Si le projet est financé par n sources de financement,

$$k_C = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_{si} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

Soit $L = \frac{D}{CP}$ l'effet de levier financier ;

$$k_C = k_D(1-T)\frac{1}{1+\frac{CP}{D}} + k_{CP}\frac{1}{\frac{D}{CP}+1} = k_D(1-T)\frac{1}{1+\frac{1}{L}} + k_{CP}\frac{1}{L+1} = k_D(1-T)\frac{L}{1+L} + k_{CP}\frac{1}{L+1}$$

Pour évaluer la rentabilité d'un projet, il faut comparer son taux de rendement interne à son coût moyen pondéré de capital servant à son financement. Ce dernier consiste le taux de rendement minimum exigé par les actionnaires.

Il est recommandé que les valeurs des dettes et des capitaux propres soient des valeurs boursières, marchandes et non comptables.

Application :

Soit un projet financé à concurrence de 400 D par des capitaux propres et 200 D par des dettes. k_D=10% ; k_{CP}=5% ; Taux d'impôt=35%.

$$k_C = k_D(1-T)\frac{D}{D+CP} + k_{CP}\frac{CP}{D+CP} = 0{,}1\,x\,0{,}65\frac{200}{200+400} + 0{,}05\frac{400}{200+400} = 5{,}5\%$$

Chapitre 4

STRUCTURE FINANCIERE ET VALEUR DE L'ENTREPRISE

Dans le cadre de la décision de financement, l'entreprise est amenée généralement à utiliser une combinaison de ressources financières: une combinaison de ressources financières : des fonds propres a l'entreprise, des apports en capitaux et de l'emprunt lors d'une insuffisance de couvertures des dépenses d'investissement. Elle est amenée ainsi à déterminer la structure financière optimale qui minimise le cout du capital et maximise la valeur de l'entreprise.

Cette question fondamentale de choix de financement et l'impact que peut avoir la structure du capital sur la valeur et sur son cout du capital restaient au centre des controverses de la littérature financière et représentaient une importante question a laquelle plusieurs auteurs ont essayé de répondre (Modigliani et Miller (MM) (1958), Durand (1961), MM (1963), Miller (1977), De Angelo et Masulis (1980), Flath et Knoeber (1980), Valhein (1981), Titman (1982), Bradley, Jarell et Kim (1984), Myers et Majluf (1984), Myers (1984), Titman et Wessels (1985), Titman et Wessels (1988), Harris et Raviv (1990), Harris et Raviv (1991), Cobbaut (1994), Teulie et Sacalian (1994), Vernimmen (1996), ….).

Tous ces travaux s'articulent, généralement, autour de la question suivante : comment effectuer le choix entre les différents moyens de financement dans le but d'accroitre la valeur de l'entreprise ?

L'objectif de ce chapitre est de savoir s'il existe un lien entre la structure financière et le coût de capital ; autrement dit, est ce qu'il existe une relation entre la structure financière et la valeur de l'entreprise.

Section 1. La position traditionnelle

L'approche traditionnelle suppose qu'aussi bien la valeur de l'entreprise que le coût de capital sont constants et indépendants du ratio d'endettement, et ce au-deçà d'un certain seuil.

1. Les hypothèses

La théorie traditionnelle se base sur les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 : le risque d'exploitation de l'entreprise est constant, mesuré par σ_{BAII}, les nouveaux projets ont le même risque que l'activité existante de l'entreprise.

Hypothèse 2 : Le BAII est constant. La taille des actifs ne change pas. La valeur de l'entreprise est déterminée en actualisant le BAII avec le taux k_c ; $V = \frac{BAII}{k_C}$.

Hypothèse 3 : L'entreprise est en exploitation d'une manière indéfinie.

Hypothèse 4 : Le ratio d'endettement D/S peut être modifié instantanément. Cette modification peut prendre la forme de rachat d'actions par émission d'emprunt ou inversement le remboursement d'un emprunt de telle sorte que la taille de l'entreprise reste inchangée.

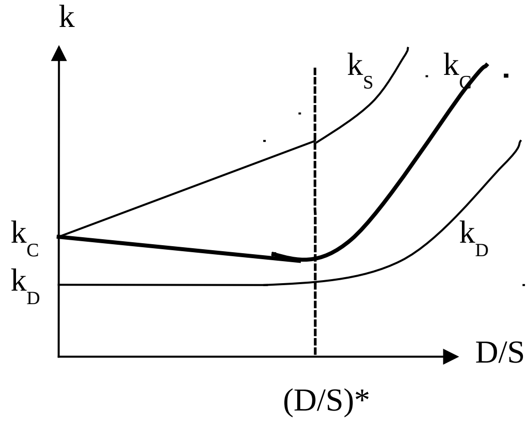
Hypothèse 5 : Tous les bénéfices sont distribués.

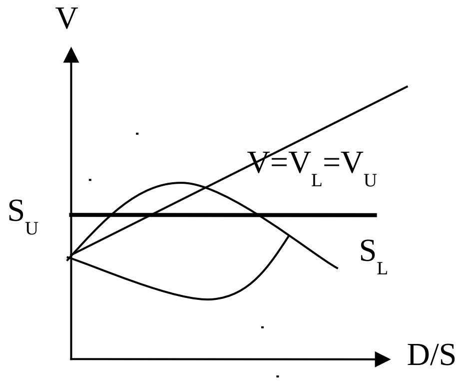
Hypothèse 6 : Pas d'impôts sur les bénéfices, pas de frais de transaction.

2. L'énoncé de la position traditionnelle

L'approche traditionnelle suppose que le taux de rendement des actions K_S augmente avec l'endettement. Il augmente faiblement tant que le ratio d'endettement est modéré ; mais au-delà d'un certain seuil, il augmente de manière très importante. En augmentant l'endettement, le risque financier augmente, la variabilité de la rentabilité s'accroît. Les actionnaires exigent un taux de rendement plus élevé. Le coût de la dette

k_D demeure constant aussi longtemps. Mais au-delà d'un certain seuil, k_D est une fonction positive du ratio d'endettement D/S.





Application : Soit une entreprise qui a un BAII espéré de 30.000 et qui passe par les différents niveaux d'endettement suivants :

D	0	75.000	100.000
k_D	0	8%	9%
k_S	12%	13%	15%

T.A.F : calculer k_C et V.

	U	L1	L2
BAII	30.000	30.000	30.000
Intérêts	0	=75.000x0,08=6.000	=100.000x0,09=9.000
BN = Div	30.000	24.000	21.000
$S = \frac{Div}{k_S}$	$\frac{30.000}{0{,}12} = 250.000$	$\frac{24.000}{0{,}13} = 184.615$	$\frac{22.000}{0{,}15} = 140.000$
D	0	75.000	100.000
V=D+S	250.000	259.615	240.000
$k_C = \frac{BAII}{V}$	$k_C = \frac{30.000}{250.000} = 0{,}12$	$k_C = \frac{30.000}{259.615} = 0{,}1155$	$k_C = \frac{30.000}{240.000} = 0{,}125$
D/S	0	0,406	0,714

3. Les critiques de la position traditionnelle

Cette approche nous renseigne sur l'existence d'une structure financière optimale sans préciser le k_C optimal. C'est une approche qui repose sur des arguments de bon sens et non sur une formulation scientifique.

Section 2. Valeur et structure financière dans un monde sans impôts

En 1958, Modigliani et Miller (MM) étaient les premiers à démontrer qu'à l'opposé de l'approche traditionnelle, le coût de capital est indépendant de la structure financière en absence d'impôt sur le bénéfice. Ces auteurs ont démontré à travers leurs deux propositions, qu'en présence de marche parfait et en l'absence de conflits d'objectifs, de coûts de faillite et des distorsions liées a la fiscalité, la valeur de la firme est indépendante de sa structure de financement.

Hypothèse 1 : Le marché financier est parfait (information gratuite, accessible à tous les investisseurs, anticipations des BAII sont homogènes, pas de coûts de transaction, absence de coûts de faillite). Les investisseurs prêtent et empruntent dans les mêmes conditions. Ils ont la possibilité d'acheter et vendre les titres à volonté. C'est aussi un marché efficient, c'est-à-dire la valeur des titres reflète toute l'information sur ces titres.

Hypothèse 2 : Les entreprises sont classées par classe de risque homogène. Dans un marché parfait, les entreprises de même classe de risque d'exploitation doivent avoir, dans une situation d'équilibre, la même valeur V et le même k_C. Sinon, des opérations d'arbitrages auront lieu et elles permettront en somme de rétablir la situation d'équilibre.

1. Enoncé et démonstration de la 1ère proposition de M&M (1958)

La valeur d'une entreprise est indépendante de sa structure financière. Elle est obtenue en capitalisant le BAII à un taux k_C correspondant à sa classe de risque.

A l'équilibre, $V_L = V_U = \frac{BAII}{k_C}; k_{C_U} = k_{C_L}$

Application 2 : Soient 2 entreprises l'une endettée notée L et l'autre non endettée notée U. Les deux entreprises appartenant à la même classe de risque n'ont ni la même valeur ni le même coût de capital. Le marché est en déséquilibre. Les actions de L sont sur évaluées ou encore capitalisées à un taux inférieur à ce qu'il devrait être.

	U	L
E(BAII)	25.000	25.000
σ_{BAII}	10.000	10.000
Dettes	0	65.000
k_D	12%	12%
Intérêts	0	7.800
BN	25.000	17.250
k_S	15%	16%
$S = \frac{Div}{k_S}$	166.667	107.500
V=S+D	166.667	172.500
$k_C = \frac{BAII}{V}$	15%	14,49%

Les investisseurs détenant les actions de L vont essayer de les arbitrer contre des actions de U pour réaliser des gains d'arbitrage. Ils vont vendre les actions de L et acheter en contrepartie des actions de U. L'arbitrage se fait de L vers U.

Cette tendance de vente des actions de L va entraîner la baisse du prix des actions L et l'augmentation du taux de capitalisation de L. L'entreprise U est supposée à l'état d'équilibre. Son cours reste alors inchangé.

Le processus d'arbitrage s'arrête lorsque le marché atteint l'équilibre, c'est-à-dire

$$V_L = V_U = \frac{BAII}{k_C}; k_{C_U} = k_{C_L}$$

Les investisseurs deviennent indifférents entre acheter les actions de L ou U. Aucun gain d'arbitrage n'est réalisable.

Dans un monde sans impôt, le coût de capital est indépendant de sa structure financière.

Démonstration :

1er cas : arbitrage en situation de déséquilibre :

Soit un investisseur détenant 1% du capital social de L, soit une valeur boursière de 1% x 40.000 = 400 D.

Cet investisseur doit :

vendre ses actions de L pour 400 D

et recrée la même structure financière que L pour avoir le même risque financier, c'est-à-dire :

soit avoir un endettement de $\frac{S_L}{D_L} = \frac{40.000}{30.000} = \frac{400}{D}$; D= 300 D

emprunter un montant équivalent à 1% de DL = 1% 30.000 = 300 D

Les montant disponibles = 400 + 300 = 700 D

L'investisseur doit acheter 1% de capital de U, et ce pour conserver le même risque d'exploitation ; soit 1% x 66.667= 666,67 D.

Son gain d'arbitrage est alors égal à :

Gain d'arbitrage = Revenu après arbitrage - Revenu avant arbitrage

Revenu avant arbitrage

-Investissement dans les actions de L : de 1% x 40.000 = 400 D ;

-Dividende = k_{S_L} x 400 = 16% x 400 D= 64 D (= 1% BN_L= 1% x 6.400)

Revenu après arbitrage

-Investissement dans les actions de U : de 1% x 66.6667 = 666,667 D ;

-Dividende = k_{S_U} x 666,667 – 12% D = 15% x 666,667 – 12% x 300 = 64 D (= 1% BN_U – Intérêts/dette= 1% x 10.000 - 12% x 300)

Gain d'arbitrage

Son revenu annuel est le même avant et après arbitrage, mais il lui reste (300 + 400) – 666,667 = 33,333 D qu'il peut investir dans des titres sûrs au taux sans risque.

Si Rf = 12%, Gain d'arbitrage = 12% x 33,333 D = 3,996 D

Dans le cadre des hypothèses mentionnées auparavant, on peut s'attendre à ce que plusieurs investisseurs tentent de profiter d'une telle opportunité et de s'enrichir aussi facilement. Il s'ensuit une augmentation de l'offre des actions de L, ce qui lui fera diminuer son prix et lui augmenter le taux de rendement.

Quant au prix de l'action U, il ne changera pas puisqu'on suppose qu'il a déjà atteint son prix d'équilibre. Le processus d'arbitrage cesse lorsque la valeur marchande des deux entreprises sera identique ; $V_L^* = V_U = 66.667; \quad S_L^* == V_L^* - D = 36.667$.

De plus, à l'équilibre, $k_{C_L^*} = \frac{BAII}{V_L^*} = \frac{10.000}{66.667} = 15\%$; $k_{S_L^*} = \frac{BN}{S_L^*} = \frac{6.400}{63.667} = 17,5\%$

2ème cas : arbitrage en situation d'équilibre :

Soit un investisseur détenant 1% du capital social de U, soit une valeur boursière de 1% x 66.667 = 666,667 D.

Cet investisseur doit :

vendre ses actions de U pour 666,667 D

et recréer la même structure financière que U pour avoir le même risque financier, c'est-à-dire : prêter un montant de 1% de D_L = 1% 30.000 = 300 D

Les montant disponibles = 666,667 - 300 = 366,667 D

L'investisseur doit acheter 1% de capital de L, S_L^*, et ce pour conserver le même risque d'exploitation ; soit 1% x 36.667= 366,667 D.

Son gain d'arbitrage est alors égal à :

Gain d'arbitrage = Revenu après arbitrage - Revenu avant arbitrage

Revenu avant arbitrage

-Investissement dans les actions de U : de 1% x 66.6667 = 666,667 D ;

-Dividende = k_{S_U} x 666,667 = 15% x 666,667 D= 100 D (= 1% BN_U= 1% x 10.000)

Revenu après arbitrage

-Investissement dans les actions de L : 1% x 36.667= 366,667 D ;

-Dividende = $k^*_{S_L}$ x 366,667 + 12% D = 17,5% x 366,667 + 12% x 300 = 64+36 =100 D (= 1% BN_L + Intérêts/dette= 1% x 6.400 + 12% x 300=100)

Gain d'arbitrage :

Il ne lui reste que : 666,667 – (300 + 366,667)= 0 D

Son revenu annuel est le même avant et après arbitrage ; aucun gain d'arbitrage. Le marché est à l'équilibre.

2. Reformulations de la 1ère proposition de M&M (1958)

M&M (1958) ont présenté deux développements de leur 1ère proposition : une 2ème proposition mettant en lien le taux de rentabilité des actions en fonction de l'endettement ; et une 3ème proposition mettant en évidence l'indépendance entre les décisions d'investissement et de financement.

2.1. 2ème proposition de M&M (1958)

Le taux de rentabilité des actions est fonction linéaire de son endettement autrement dit de son ratio d'endettement.

$$k_C = k_D \frac{D}{D+S} + k_S \frac{S}{D+S}$$

$$k_S = \left(k_C - k_D \frac{D}{D+S}\right)\frac{D+S}{S} = k_C\left(\frac{D}{S}+1\right) - k_D \frac{D}{S} = k_C + \frac{D}{S}(k_C - k_D)$$

2.2. 3ème proposition de M&M (1958)

La décision d'investissement est indépendante de la décision de financement. Le taux de rejet des investissements est toujours égal à k_C qui est indépendant de la structure financière.

V_0, S_0, D_0, $BAII_0$ et k_C^0 : respectivement valeur totale, valeur boursière, dette totale, BAII et coût de capital avant l'investissement ; $V_0 = \frac{BAII_0}{k_C}$

Soit I le montant du nouvel investissement financé par une dette, son TRI est k_I.

$$V_1 = S_1 + D_1 = \frac{BAII_1}{k_C} = \frac{BAII_0 + k_I I}{k_C} = \frac{V_0 k_C + k_I I}{k_C} = V_0 + I\frac{k_I}{k_C} \ ;$$

Or $D_1 = S_1 + D_0 + I$; Donc $V_1 = S_1 + D_1 = S_1 + D_0 + I = V_0 + I\frac{k_I}{k_C}$

$$S_1 = V_0 + I\frac{k_I}{k_C} - D_0 - I = S_0 + I\left(\frac{k_I}{k_C} - 1\right)$$

Si $S_1 > S_0$, $k_1 > k_0$: le projet est rentable ; Si $S_1 < S_0$, $k_1 < k_0$: le projet est rejeté.

3. Les limites de la thèse de M&M (1958)

L'endettement personnel ne peut pas être un substitut parfait à l'endettement social. En effet, l'endettement personnel est plus risqué que l'endettement social. Le taux d'emprunt est généralement plus élevé pour un particulier que pour une société.

L'arbitrage peut être freiné pat les coûts de transaction et par l'impôt sur le gain en capital (plus value de cession).

M&M ont ignoré le risque de faillite et le coût de faillite.

Section 3. Valeur et structure financière en présence d'impôts

Dans l'environnement idéalisé défini par M&M (1958), l'absence d'impôts constitue, sans nul doute, l'hypothèse la moins facile à accepter. Par la suite en 1963, avec la prise en compte de l'impôt, un rapprochement avec la théorie traditionnelle a été marqué. Dans cette section, nous examinons les conséquences de différentes formes d'imposition. Nous montrons que si l'impôt sur les sociétés est la seule forme d'imposition, l'endettement diminue la charge fiscale d'une entreprise. En conséquence, la valeur d'une entreprise endettée est supérieure à celle qu'elle aurait en l'absence d'endettement. A coefficient d'endettement D/A donné, l'impact de l'endettement sur la rentabilité attendue des actions est moindre lorsque les charges d'intérêt sont déductibles du bénéfice taxable et le risque des actions de l'entreprise endettée augmente avec l'endettement. En corollaire, le coût moyen pondéré du capital décroît lorsque l'endettement augmente. Si, outre l'impôt sur les sociétés, nous prenons en compte dans l'analyse l'impôt des personnes physiques, l'avantage fiscal de l'endettement s'atténue, voire disparaît ou peut devenir un désavantage.

1. L'avantage fiscal de l'endettement

Dans tous les pays, les charges financières, notamment les intérêts dus sur dettes, sont déductibles du résultat d'exploitation pour le calcul de l'impôt du par une entreprise. Cette économie fiscale lui permet d'accroître le montant payé, valeur de l'avantage fiscal du total, aux apporteurs de capitaux. Sa valeur s'accroît d'un montant égal à la valeur actuelle des économies fiscales futures ou encore comme la valeur de l'avantage fiscal de l'endettement (V_{AEF}).

La logique du calcul apparaît dans le cas le plus simple fondé sur les hypothèses suivantes : Résultat avant charges financières et impôts attendu constant (REXB) ; Dette constante et perpétuelle ; Dette sans risque.

L'avantage fiscal de l'endettement (AFE), pour une année donnée, est égal au produit du taux d'imposition et de la charge d'intérêt ; cette dernière équivaut au taux d'intérêt multiplié par le montant de la dette : $AFE = T_{IS} \times r_{Dette} \times D$.

La valeur actuelle de l'ensemble des revenus distribués aux apporteurs de capitaux en cas d'endettement est égale à la valeur des revenus sans endettement à la quelle s'ajoute la valeur actuelle des économies fiscales. Formellement : $V = V_U + V_{AFE}$, où V désigne la valeur des revenus totaux en cas d'endettement, V_U la valeur sans endettement et V_{AFE} la valeur de l'avantage fiscal de l'endettement.

Si l'économie fiscale est certaine, la valeur actuelle des économies fiscales dues à l'endettement est obtenue en actualisant au taux d'intérêt sans risque les économies fiscales annuelles. Comme nous traitons des perpétuités :

$V_{AFE} = \frac{T_{ISOC}\ x\ r_{Dette}\ x\ D}{r_{Dette}} = T_{ISOC}\ D$ et donc : $V = V_U + T_{ISOC} D$

Lorsque la dette n'est pas une perpétuité, le calcul de la VAFE est un peu plus complexe. Si la dette de l'entreprise donne lieu à des charges d'intérêt C_{fin1}, C_{fin2}…C_{finT} au cours des T prochaines années, la valeur actuelle des économies fiscales sera : $V_{AFE} = \sum_t \frac{T_{ISOC}\ x\ C_{f\,\text{int}}}{(1 + r_{Dette})^t}$

2. **La valeur de l'entreprise en présence d'impôt sur les bénéfices des sociétés**

Modigliani et Miller ont corrigé leur première approche par l'élaboration de leur article de 1963. Dans cet article, ils réintroduisent l'influence de la fiscalité, en particulier, l'impôt sur les sociétés. Ainsi ils reconnaissent le rôle important de la dette dans le financement d'entreprise du fait de la déductibilité fiscale de la charge financière quelle entraine. Il résulte alors que la valeur de l'entreprise endettée est plus grande que la valeur de celle qui ne l'est pas. Par conséquent, une structure financière optimale peut exister et correspond, selon MM (1963), à une situation ou la structure financière est constituée exclusivement par la dette. Concernant le coût du capital, il est fonction décroissante de l'endettement suite à l'influence de l'impôt sur les sociétés.

2.1. Rentabilité attendue et risque des actions en présence de l'IS

Que devient la proposition II de M&M en présence d'impôts ? Les expressions trouvées précédemment deviennent :

$$r_{Actions} = r_{Actifs} + \left(r_{Actifs} - r_{Dette}\right)\left(1-\tau_C\right)\, x\, \frac{D}{A}$$

Et $\beta_{Actions} = \beta_{Actifs} + \left(\beta_{Actifs} - \beta_{Dette}\right)\left(1-\tau_C\right)\, x\, \frac{D}{A}$

Supposons que l'imposition des revenus des sociétés est uniforme au taux τ_C ; Supposons deux stratégies générant les mêmes flux de revenus comme suit :

Stratégies	Investissement net	Revenu net
Stratégie A : Détenir α % des actions de L	$\alpha\, S_L$	$\alpha\left[\left(\tilde{X}_L - r\, D\right)\left(1-\tau_C\right)\right]$
Stratégie B : Détenir α % des actions de U et emprunter à compte personnel $\alpha D\left(1-\tau_C\right)$	$\alpha\left[V_U - D\left(1-\tau_C\right)\right]$	$\alpha\left[\left(\tilde{X}_U - r\, D\right)\left(1-\tau_C\right)\right]$

Les deux stratégies A et B génèrent les mêmes revenus après intérêts et impôts. Par conséquent, en vertu du principe d'arbitrage et de la loi du prix unique, les deux stratégies sont identiques. $\alpha\, S_L = \alpha\left[V_U - D\left(1-\tau_C\right)\right]$

D'où : $S_L + D = V_L = V_U + \tau_C D$

L'introduction de l'impôt sur les revenus des sociétés a fait augmenté la valeur de l'entreprise endettée par une économie d'impôt égale au produit du taux d'imposition et le montant des dettes, soit $\tau_C D$. En appliquant le principe de la rente perpétuelle infinie, la valeur actuelle des économies d'impôts (VAEI) serait $VAEI = \frac{r_f \tau_C D}{r_f} = \tau_C D$. Le gain du levier représente la VAEI réalisées par l'entreprise.

Le tableau ci-dessous illustre la manière dont vont être répartis les revenus après impôts de deux firmes :

Firmes	Rémunération des créanciers			Rémunérations des bailleurs de fonds
	Obligataires	Actionnaires	Etat	

U	-	$\tilde{X}_U(1-\tau_C)$	$\tau_C \tilde{X}_U$	$\tilde{X}_U(1-\tau_C)$
L	r D	$(\tilde{X}_L - r\ D)(1-\tau_C)$	$\tau_C(\tilde{X}_L - r\ D)$	$\tilde{X}_L(1-\tau_C)+\tau_C r\ D$

La prise en compte de l'impôt sur les sociétés modifie les définitions de rentabilités respectives des entreprises U et L :

$\tilde{r}_u = \dfrac{\tilde{X}_U(1-\tau_C)}{S_U} = \dfrac{\tilde{X}_U(1-\tau_C)}{V_U}$; d'où $V_U = S_U = \dfrac{\tilde{X}_U(1-\tau_C)}{\tilde{r}_u}$; $\tilde{r}_L = \dfrac{(\tilde{X}_L - r_f D)(1-\tau_C)}{S_L}$

Or à partir du CAPM, on a : $(\tilde{r}_u - r_f)\, V_U = (\tilde{r}_L - r_f)\, S_L$;

$$\left(\frac{\tilde{X}_U(1-\tau_C)}{V_U} - r_f\right) V_U = \left(\frac{(\tilde{X}_L - r_f D)(1-\tau_C)}{S_L} - r_f\right) S_L$$

$$\left(\frac{\tilde{X}_U(1-\tau_C)}{V_U} - r_f\right) \frac{V_U}{S_L} = \frac{(\tilde{X}_L - r_f D)(1-\tau_C)}{S_L} - r_f$$

$$\left(\frac{\tilde{X}_U(1-\tau_C)}{V_U} - r_f\right) \frac{S_L + D - \tau_C D}{S_L} = \frac{(\tilde{X}_L - r_f D)(1-\tau_C)}{S_L} - r_f$$

$$(\tilde{r}_u - r_f)\left(1 + \frac{D}{S_L}(1-\tau_C)\right) = \tilde{r}_L - r_f$$

$$\tilde{r}_L = (\tilde{r}_u - r_f)\left(1 + \frac{D}{S_L}(1-\tau_C)\right) + r_f = \tilde{r}_u + (\tilde{r}_u - r_f)(1-\tau_C)\frac{D}{S_L}$$

$$\tilde{r}_L = \tilde{r}_u + (\tilde{r}_u - r_f)(1-\tau_C)\frac{D}{S_L}$$

L'équation traduit la relation de levier, en l'absence de fiscalité, obtenue directement à partir des égalités des primes de risques des entreprises U et L.

Nous pouvons par un raisonnement similaire, préciser l'impact de l'endettement sur le risque des actions :

$$\beta_{Actions} = \beta_{Actifs} + (\beta_{Actifs} - \beta_{Dette})\,(1-\tau_C)\ x\ \frac{D}{S_L}$$

Si la dette est sans risque :

$$\beta_{Actions} = \beta_{Actifs}\left(1+\left(1-\tau_C\right)\ x\ \frac{D}{S_L}\right)$$

Nous retrouvons un résultat comparable à celui trouvé en l’absence d’impôts : le risque des actions de l’entreprise endettée augmente avec l’endettement. La déductibilité des charges d’intérêt du bénéfice taxable a pour conséquence de diminuer le risque financier des actions.

2.2. Le coût moyen pondéré du capital

Une autre approche permet de tenir compte de la déductibilité des charges d’intérêt : celle du coût moyen pondéré du capital ; ou coût du capital ajusté, qui reflète le coût net d’impôts des différentes formes de financement.

Ce coût du capital ajusté et alors pris comme le taux d’actualisation à appliquer aux cash flows nets d’impôts calculés en l’absence pour aboutir à la valeur actuelle des cash flows futurs, étant donné la politique de financement réellement mise en ouvre. Formellement, le coût moyen pondéré du capital est le taux d’actualisation CMPC tel que :

$$V = \sum_t \frac{REXP_t\left(1+\tau_C\right)}{\left(1+CMPC\right)^t}$$

Le numérateur représente le bénéfice de l’entreprise non endettée. L’effet de l’endettement sur la valeur est obtenu en ajustant le taux d’actualisation. Cette approche est très largement utilisée en pratique et selon la politique d’endettement de l’entreprise, différentes formules seront utilisées.

La rentabilité attendue des actions est le rapport entre le bénéfice (distribué aux actionnaires sous forme de dividende) et la valeur de marché des actions : $r_{Actions} = \frac{\left(REXP - r_{Dette}\ x\ D\right)\left(1-\tau_C\right)}{A}$;

ce qui peut s’écrire : $REXP\left(1-\tau_C\right) = r_{Actions}\ x\ A + r_{Dette}\left(1-\tau_C\right)\ x\ D$

Or $V=\frac{REXP\left(1+\tau_{C}\right)}{\left(1+CMPC\right)}$; et donc $V\left(1+CMPC\right)=r_{Actions}\ x\,A+r_{Dette}\left(1-\tau_{C}\right)\,x\,D$

En divisant les deux termes par V, on trouve l'expression du coût moyen pondéré du capital en présence d'impôts sur les sociétés :

$$CMPC=r_{Actions}\ x\ \frac{A}{V}+r_{Dette}\left(1-\tau_{C}\right)\,x\,\frac{D}{V}$$

Cette formule classique suppose que l'on connait le coût des actions $r_{Actions}$. Il s'agit d'une généralisation de la formule présentée précédemment en l'absence d'impôts.

2.3. La formule d'ajustement de M&M

M&M (1963) ont établi une formule qui donne directement le coût moyen pondéré du capital lorsque l'endettement est permanent :

$$CMPC=r_{Actifs}\left(1-\tau_{C}L\right)\quad avec\quad L=\frac{D}{V}$$

Démonstration :

Considérons une entreprise qui génère un résultat d'exploitation annuel REXP. Le montant emprunté pour financer un projet est égal, compte tenu de la définition du coefficient d'endettement, à D=L x V.

En conséquence, la valeur actuelle des cash flows, en désignant par r_{Actifs} le taux d'actualisation qui reflète le risque économique du projet, peut s'écrire : $V=\frac{REXP\left(1-\tau_{C}\right)}{r_{Actifs}}+\tau_{C}D$

Si : $L=\frac{D}{V}$; alors : $V=\frac{REXP\left(1-\tau_{C}\right)}{r_{Actifs}}+\tau_{C}LV$. On en déduit : $V=\frac{REXP\left(1-\tau_{C}\right)}{r_{Actifs}\left(1-\tau_{C}L\right)}$

La valeur de l'entreprise est obtenue en actualisant le cash flow après impôt (en absence d'endettement) au taux ajusté $r_{Actifs}\left(1-\tau_{C}L\right)$; ce taux d'actualisation est le coût du capital ajusté de M&M. Il est égal au coût moyen pondéré du capital :

$$CMPC=r_{Actifs}\left(1-\tau_{C}L\right)$$

Dans cette formule, le point de départ est le coût du capital en l'absence d'endettement r_{Actifs}. Il reflète uniquement le risque économique propre au projet. Ce taux est ensuite ajusté pour tenir compte des retombées fiscales de l'endettement. Si le taux d'imposition est nul, on retrouve l'égalité entre CMPC et r Actifs et donc un coût du capital indépendant de la structure financière. En revanche, le coût du capital ajusté diminue avec l'endettement si le taux d'imposition est positif.

Cette dernière formule fait apparaître clairement les deux éléments importants de l'analyse : le risque économique et l'avantage fiscal de l'endettement. Elle a l'inconvénient, comme pour la formule du coût moyen pondéré d'ailleurs, de supposer que la contribution du projet à la capacité d'endettement de l'entreprise est permanente avec, pour conséquence, une surévaluation de l'avantage fiscal de l'endettement.

3. La valeur de l'entreprise en présence d'impôts sur les revenus des sociétés et des personnes physiques

MM (1963) ont négligé la présence de la fiscalité personnelle ainsi que l'existence des coûts de faillite et des coûts d'agence. Ce qui a amené Miller à élaborer son article en 1977 « Debt and taxes ». Dans cet article, Miller a pris en considération l'importance de ces deux facteurs dans la détermination de la structure financière et il a montré qu'il existe un optimum d'endettement au niveau de l'économie mais il montre qu'il y a indifférence de la structure financière vis à vis de la valeur de la firme. Il retrouve ainsi les conclusions de MM (1958).

Supposons que l'imposition des revenus des personnes physiques est uniforme ; les revenus des actions et ceux des obligations étant cependant, imposés à des taux indifférents. Désignons respectivement par τ_{PS} et τ_{PB} les taux d'imposition des revenus des actions et des obligations. Supposons deux stratégies générant les mêmes flux de revenus comme suit :

Stratégies	Investissement net	Revenu net
Stratégie A : Détenir α % des actions de L	$\alpha\ S_L$	$\alpha\left[\left(\tilde{X}_L - r\ D\right)(1-\tau_C)(1-\tau_{PS})\right]$
Stratégie B : Détenir α % des actions de U et emprunter à compte personnel $\alpha\left[\frac{D(1-\tau_C)(1-\tau_{PS})}{(1-\tau_{PB})}\right]$	$\alpha\left[V_U - \frac{D(1-\tau_C)(1-\tau_{PS})}{(1-\tau_{PB})}\right]$	$\alpha\left[\left(\tilde{X}_U - r\ D\right)(1-\tau_C)(1-\tau_{PS})\right]$

Toujours selon le même principe d'arbitrage, deux actifs ayant les mêmes caractéristiques ne peuvent se négocier, sur un marché concurrentiel, à des prix différents. Dès lors les deux stratégies devraient être identiques puisqu'elles génèrent les mêmes revenus nets :

$$\alpha\ S_L = \alpha\left[V_U - \frac{D(1-\tau_C)(1-\tau_{PS})}{(1-\tau_{PB})}\right]$$

D'où : $S_L + D = V_L = \left(V_U - \frac{D(1-\tau_C)(1-\tau_{PS})}{(1-\tau_{PB})}\right) + D = V_U + \left[1 - \frac{(1-\tau_C)(1-\tau_{PS})}{(1-\tau_{PB})}\right]D$

On peut facilement démontrer cette relation. Soient :

- Revenus des actionnaires : $\left(\tilde{X} - r\ D\right)(1-\tau_C)(1-\tau_{PS})$
- Revenus des obligataires : $r\ D(1-\tau_{PB})$

En additionnant les deux quantités, on obtient les rémunérations totales (R) après impôts des bailleurs de fonds de l'entreprise :

$$R = \left(\tilde{X} - r\ D\right)(1-\tau_C)(1-\tau_{PS}) + r\ D(1-\tau_{PB})$$

$$R = \tilde{X}(1-\tau_C)(1-\tau_{PS}) - r\ D(1-\tau_C)(1-\tau_{PS}) + r\ D(1-\tau_{PB})$$

$$R = \tilde{X}(1-\tau_C)(1-\tau_{PS}) + r\ D\left[(1-\tau_{PB}) - (1-\tau_C)(1-\tau_{PS})\right]$$

Le premier terme de la relation doit être capitalisé au taux $\tilde{r}_U$; tandis que le deuxième eu taux k_D, traduisant le gain du levier dont bénéfice l'entreprise.

$$V_L = \frac{\tilde{X}(1-\tau_C)(1-\tau_{PS})}{\tilde{r}_U} + \frac{r\,D[(1-\tau_{PB})-(1-\tau_C)(1-\tau_{PS})]}{k_D}$$

$$V_L = V_U + D\left[\frac{r}{k_D}[(1-\tau_{PB})-(1-\tau_C)(1-\tau_{PS})]\right]$$

$$V_L = V_U + D\left[\frac{r}{k_D}(1-\tau_{PB})\left[1-\frac{(1-\tau_C)(1-\tau_{PS})}{(1-\tau_{PB})}\right]\right]$$; or $k_D = r\,(1-\tau_{PB})$

$$V_L = V_U + D\left[1-\frac{(1-\tau_C)(1-\tau_{PS})}{(1-\tau_{PB})}\right]$$

Aussi avec l'introduction de l'imposition personnelle, le gain de levier G_L est simplement le second terme de la relation :

$$G_L = \left[1-\frac{(1-\tau_C)(1-\tau_{PS})}{(1-\tau_{PB})}\right]D$$

Notons que si les revenus des actions et des obligations étaient imposées au même taux $\tau_{PS} = \tau_{PB}$, le gain de levier de la relation serait égal à $\tau_C\ D$.

Par ailleurs, si les revenus des obligations étaient imposés à un taux plus élevé que celui des actions $\tau_{PS} < \tau_{PB}$, le gain du levier seraient inférieur à celui dans le cas d'une seule imposition des sociétés ($\tau_C\ D$) ; il pourrait même se transformer en une pénalité. On peut observer que le gain du levier est maximum dans le cas où le taux des revenus des obligations est égal au taux d'imposition des revenus des actions $\tau_{PS} = \tau_{PB}$.

Application :

Soient 2 entreprises U et L ;

$$\tau_C = 50\%; \tau_{PS} = 15\%; \tau_{PB} = 35\%; r_D = 8\%; \tilde{X} = 50.000\ u.m$$

Supposons que le coût du capital de la firme non endettée est de 12%.

	U	L

Bénéfice d'exploitation espéré $\tilde{X}$	50.000	50.000
Intérêts 100.000 x 8%		8.000
Bénéfice après intérêts	50.000	42.000
Impôt sur les sociétés τ_C	25.000	21.000
Bénéfice après intérêts & IS	25.000	21.000
Rémunération nette des pourvoyeurs de fonds : - Actionnaires : $(\tilde{X} - r\ D)(1-\tau_C)(1-\tau_{PS})$ - Obligataires : $r\ D(1-\tau_{PB})$	21.250	17.850 5.200
Total	21.250	23.050
Economies d'impôts	0	-1.800
Total	21.250	21.250

$$V_L = V_U + VAEI = V_U + D\left[1 - \frac{(1-\tau_C)(1-\tau_{PS})}{(1-\tau_{PB})}\right] V_L = \frac{dividende}{\tilde{r}_U} + \frac{Economie\ d'impôt}{k_D(1-\tau_C)}$$

$$V_L = \frac{21.250}{0.12} + \frac{1.800}{0.08(1-0.5)} = 222.083\, u.m$$

Section 4. La théorie du compromis : introduction des coûts de faillite

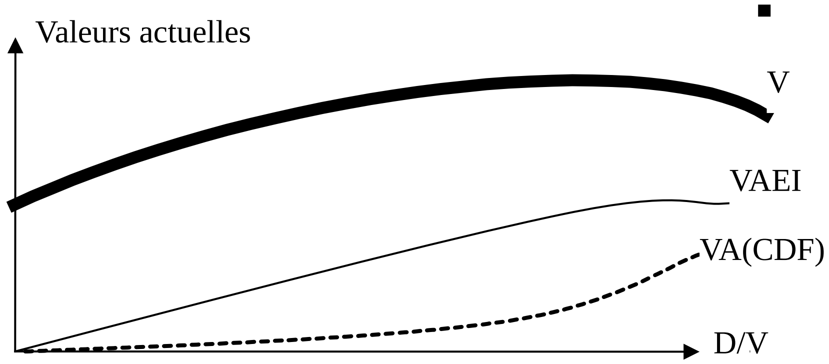
La théorie du compromis considère que la société doit faire un arbitrage entre l'accroissement de l'avantage fiscal et les coûts de détresse financière résultant d'une augmentation de la dette.

1. Les coûts de faillite

S'il existe un avantage fiscal à l'endettement, les entreprises devraient toutes en tirer profit en choisissant les taux d'endettement les plus élevés possibles. Empiriquement, cela n'est pas observé. Le risque le plus évident pour une entreprise fortement endettée est l'impossibilité, à un moment donné, de remplir ses engagements vis-à-vis de ses créanciers. La situation extrême est la faillite. L'impact des difficultés financières potentielles sur la valeur de l'entreprise est lié aux coûts associés à cette situation : coûts directs (avocats, banquiers, frais de liquidation d'actifs, etc.) et indirects (résultant de la difficulté de gérer normalement l'entreprise dans ce type de situation).

2. La valeur optimale de l'entreprise

D'après la théorie du compromis, la valeur de l'entreprise endettée est la somme de la valeur de l'entreprise non endettée à laquelle il faut rajouter la valeur actuelle des économies d'impôt et soustraire la valeur actuelle des coûts de difficultés financières : $V=V_U$ + VAEI – VA(CDF)

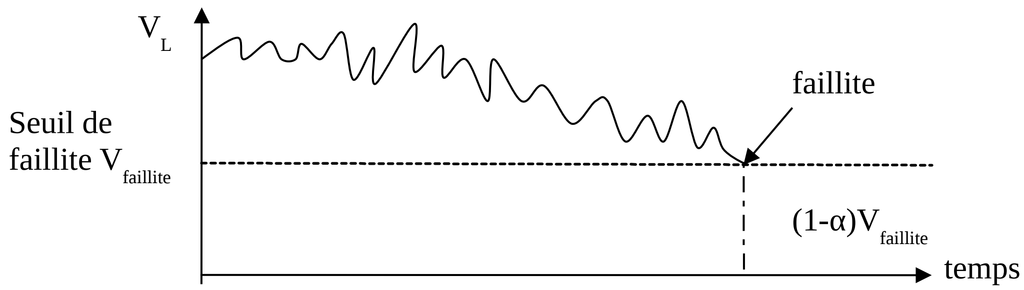


Le niveau optimum d'endettement est atteint lorsque l'avantage marginal de l'endettement est égal à la valeur actuelle des coûts de détresse financière. La figure ci-dessous illustre cette situation. La valeur de l'entreprise croît tant que l'avantage fiscal résultant d'une augmentation de l'endettement compense celle des coûts de détresse financière qu'elle produit.

3. Modélisation de la théorie du compromis

Un modèle récent, développé par Leland (1994), permet d'illustrer la théorie du compromis. Il est construit dans l'esprit du modèle de Merton pour l'analyse de la dette risquée et incorpore de manière simple les deux éléments majeurs de la théorie du compromis : la valeur actuelle des économies fiscales et les coûts de détresse financière.

La valeur de l'entreprise non endettée, V_U, est connue au départ et évolue de manière aléatoire selon un processus stochastique identique à celui utilisé par Black-Scholes (1973) (caractérisé par une volatilité σ qui meure la volatilité des actifs en l'absence d'endettement). Le taux d'intérêt sans risque r_f est constant. L'entreprise s'endette en émettant un emprunt perpétuel donnant lieu au paiement d'un intérêt annuel (le coupon) C. L'entreprise fait faillite si, à un moment donné, la valeur des actions devient nulle. Cette faillite se produit si la V_U tombe au-dessous d'un seuil ($V_{faillite}$) que permet de déterminer ce modèle. Dans ce cas, une fraction α de la valeur est perdue ; cette perte est une mesure de coûts de difficultés financières.



Remarquons que la date de faillite n'est pas connue à priori. Deux résultats préliminaires jouent un rôle essentiel dans le modèle :

- Le seuil de faillite est donné par : $V_{faillite} = \dfrac{C(1-\tau_C)}{(r_f + 0.5\sigma^2)}$

L'entreprise fait faillite si la valeur de ses actifs atteint un niveau égal à la valeur actuelle des intérêts futurs nets d'impôts. En certitude, celle-ci serait égale à $\dfrac{C(1-\tau_C)}{r_f}$. Ici, l'évolution aléatoire de la valeur des actifs a pour effet de diminuer le seuil de faillite. Même si, à un moment donné, la valeur des actifs chute au-dessous de $\dfrac{C(1-\tau_C)}{r_f}$, il existe une possibilité qu'elle remonte au-dessus. Le seuil de faillite en incertitude se situe donc au-dessous du seuil de faillite en certitude.

- Le modèle détermine la valeur actuelle de 1 € en cas de faillite :

$$v_{faillite} = \left(\frac{V_{faillite}}{V_U} \right)^{\frac{2r_f}{\sigma^2}}$$

Ce prix a la nature d'un prix d'actif contingent ayant les propriétés suivantes :

- Il est inférieur à l'unité et d'autant plus faible que la valeur des actifs est importante par rapport au seuil de faillite ;
- Il est une fonction décroissante du taux d'intérêt sans risque (ce qui est assez normal pour un taux d'actualisation) ;
- Il est une fonction croissante de la volatilité des actifs (si la volatilité est élevée, la date probable de la faillite est plus rapprochée).

La valeur de l'entreprise endettée est : $V=V_U$ + VAEI – VA(CDF) ; avec :

$$VAFE = \left(1 - v_{faillite}\right) \frac{\tau_C C}{r_f} = \frac{\tau_C C}{r_f} - v_{faillite} \frac{\tau_C C}{r_f} \ ; \qquad VA(CDF) = v_{faillite}\ \alpha V_{faillite}$$

La valeur de l'économie fiscale de l'endettement est égale à la différence entre la valeur de l'économie fiscale en absence de faillite et la valeur actuelle de l'économie fiscale qui est perdue en cas de faillite.

Les coûts de détresse financière en cas de faillite sont égaux à $\alpha V_{faillite}$. Leur valeur actuelle est obtenue en multipliant ce montant par le prix de marché de 1 € en cas de faillite. Il nous reste à déterminer la valeur des actions et la valeur de la dette.

La valeur de la dette est donnée par : $D = \left(1 - v_{faillite}\right) \frac{C}{r_f} + v_{faillite}\ (1-\alpha)\, V_{faillite}$

Le premier terme reprend la valeur de la dette sans risque multipliée par la valeur de 1€ en présence de faillite. Le second indique le montant que touchent les créanciers lors d'une faillite multipliée par la valeur de 1€ en présence de faillite.

La valeur des actions est obtenue par différence entre la valeur de l'entreprise et la valeur de la dette :

$$A = V_U + (1 - v_{faillite}) \frac{\tau_C C}{r_f} - v_{faillite} \alpha V_{faillite} - (1 - v_{faillite}) \frac{C}{r_f} - v_{faillite} (1 - \alpha) V_{faillite}$$

Ce qui donne : $A = V_U - (1 - v_{faillite})(1 - \tau_C) \frac{C}{r_f} - v_{faillite} V_{faillite}$

Bibliographie

Bouri A., « *Gestion financière, manuel et exercices corrigés* », Ed. , 2000.

Cobbaut, R. (1997), “*Théorie financière* ", Economica, 4ème édition.

Farber A., Laurent M.P, OOsterlinck, K. et Pirotte, H. « *Finance Synthèse de cours & Exercices corrigés* », Collection synthex, Pearson Education France, 2006.

Mattoussi, H. (2000), “*Les décisions financiers de l’entreprise : L’investissement et le financement*”, Centre de Publication Universitaire.