



ECOLE DES MINES D'ALBI
C A R M A U X

THEORIE DES POUTRES

Cours de Gérard BERNHART

Equipe pédagogique :

F. Berthet

O. De Almeida

M. Guichon

L. Robert

F. Schmidt (responsable de l'UE MSF)

V. Velay (responsable de cours)

Edition 2009/2010

SOMMAIRE : Théorie des poutres

<i>Chapitre 1 : Objet et principe de la theorie des poutres.....</i>	<i>.....</i>
1.1. Theorie des poutres : généralites.....
1.1.1. Résistance des matériaux.....	4
1.1.2. Corps prismatique ou « poutre ».....	4
1.1.3. Hypothèses de la théorie des poutres.....	5
1.2. Torseur des efforts intérieurs et liaisons.....
1.2.1. Torseur des efforts intérieurs.....	5
1.2.2. Symbolique des conditions d'appui.....	7
1.2.3. Formules générales des efforts intérieurs dans le cas particulier des poutres droites ($s=x$) à chargement plan	8
1.3. Etat de contrainte dans une section droite.....
1.4. Demarche generale de resolution d'un probleme de poutre.....
<i>Chapitre 2 : Etude des sollicitations élémentaires.....</i>	<i>.....</i>
2.1. Traction et compression simple.....
2.1.1. Définition.....	12
2.1.2. Contrainte.....	12
2.1.3. Déformation.....	12
2.1.4. Déplacement.....	12
2.1.5. Energie de déformation élastique par unité de longueur.....	12
2.1.6 Poutre à section variable d'après [1].....	13
2.2. Flexion pure.....
2.2.1. Définition.....	14
2.2.2. Déformation.....	14
2.2.3. Contrainte.....	14
2.2.4. Déflexion de la poutre.....	15
2.2.5. Energie de déformation élastique.....	15
2.2.6 Arbre à géométrie variable d'après [1].....	16
2.3 Torsion pure des poutres cylindriques de révolution.....
2.3.1 Définition.....	17
2.3.2 Déformation.....	17
2.3.3 Contrainte.....	17
2.3.4 Déplacement angulaire le long de la poutre.....	18
2.3.5 Energie de déformation élastique.....	18
2.3.6 Arbre à section variable d'après [1].....	18
2.4 Cisaillement pur.....
2.4.1 Définition.....	20
2.4.2 Contrainte.....	20
2.4.3 Déformation de cisaillement et déplacement de cisaillement.....	20
2.4.4 Energie de déformation élastique.....	20
2.5 Flexion simple.....
2.5.1 : Définition.....	21
2.5.2 : Contraintes normales.....	21
2.5.3 : Contraintes de cisaillement.....	21
2.5.4 : Déflexion en flexion simple.....	22
2.5.5 : Energie de déformation élastique.....	22
2.6 Flambement d'une poutre.....
2.6.1. Définition.....	23
2.6.2. Théorie d'Euler.....	23
2.6.2 Autres cas.....	24
<i>Chapitre 3 : Theorèmes de l'énergie.....</i>	<i>.....</i>

3.1 : Energie de deformation.....	
3.1.1 : Généralités.....	25
3.1.2 : Energie de déformation élastique d'une poutre.....	25
3.2 : Théorème de Castigliano.....	
3.3 : Théoreme de Ménabrea.....	
Références :.....	

Chapitre 1 : OBJET ET PRINCIPE DE LA THEORIE DES POUTRES

1.1. THEORIE DES POUTRES : GENERALITES

1.1.1. Résistance des matériaux

La résistance des matériaux (RdM) cherche à déterminer par le **calcul analytique** les dimensions des organes d'une machine ou des éléments d'une construction afin qu'ils supportent les efforts auxquels ils sont soumis.

Elle permet de résoudre les problèmes du type :

- déterminer les dimensions d'un organe, connaissant la nature du matériau et les efforts qui lui sont appliqués, de telle façon qu'aucune région ne subisse de déformations et de tensions internes exagérées et dangereuses (c'est le dimensionnement),
- les dimensions étant connues, calculer les déformations et la répartition des contraintes internes pour vérifier qu'il n'y pas dépassement des contraintes admissibles (c'est la vérification).

La RdM est divisée en deux grands domaines en fonction de la nature géométrique des corps à étudier, pour chacune elle fait appel à de nombreuses hypothèses pour obtenir rapidement des résultats exploitables : théorie des poutres (abordée dans cette 3^{ème} partie du cours de MdM), théorie des plaques et coques.

1.1.2. Corps prismatique ou « poutre »

Les corps étudiés dans cette partie seront supposé être des poutres. Nous appellerons « POUTRE », le solide engendré par une surface plane (S) dont le centre de gravité G décrit une courbe G_0G_1 , le plan de (S) restant normal à cette courbe (figure III-1.1).

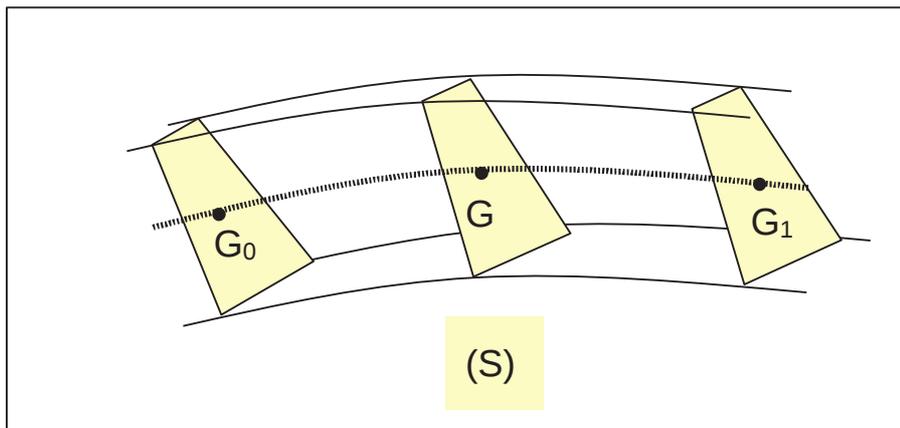


Figure III -1-1 : définition d'une poutre

- (S) est appelée **section droite** ou **section normale**

- $\overrightarrow{G_0G_1}$ est la **fibre moyenne** . Selon la nature de cette fibre, la poutre sera dite gauche, plane ou droite.
- La poutre peut être à section constante ou à section variable selon que l'aire de (S) varie ou non le long de $\overrightarrow{G_0G_1}$.

1.1.3. Hypothèses de la théorie des poutres

- Les matériaux sont homogènes et isotropes.
- Les matériaux sont utilisés dans leur domaine élastique. La loi de Hooke traduit leur comportement.

Ceci entraîne le **principe de superposition** : le déplacement et les contraintes issus de la somme de plusieurs efforts extérieurs sont égaux à la somme des déplacements ou contraintes provoqués par chaque effort séparément. Ainsi s'il est possible de décomposer les efforts extérieurs en une somme de sollicitations simples, les contraintes et déplacements résultants pourront être obtenus en faisant la somme des contraintes et déplacements calculés par les formules correspondants à ces sollicitations simples.

- Géométrie des poutres :

- le rayon de courbure de la fibre moyenne est « grand » par rapport aux dimensions des sections droites (rayon de courbure $> 5 \times$ la plus grande dimension de la section droite) ;
- la longueur de la fibre moyenne $\overrightarrow{G_0G_1}$ est « grande » devant les dimensions des sections droites ($> 20 \times$ la plus grande dimension de la section droite) ;
- les variations de l'aire de la section sont faibles et progressives.

- Hypothèse de **Barré de Saint-Venant** :

On admet qu'en tout point d'une poutre suffisamment éloigné de la zone d'application des efforts extérieurs, l'état de contrainte et de déformation est indépendant du mode d'application de ces efforts. Une conséquence importante de cette hypothèse est que la théorie des poutres ne pourra jamais servir à calculer des zones de concentration de contraintes qui existent souvent au droit des points d'application de la charge (si on cherche à les connaître il faudra faire appel soit aux résolutions en élasticité (cf partie 2 de ce cours) soit aux résolutions éléments finis (cours IFI3)).

- Hypothèse de **Bernouilli** :

Les sections planes, normales aux fibres avant déformation demeurent planes et normales aux fibres après déformation. Cette hypothèse n'est en général qu'approchée, car les phénomènes de cisaillement créent des distorsions et des gauchissements de section droite.

1.2. TORSEUR DES EFFORTS INTERIEURS ET LIAISONS

1.2.1. Torseur des efforts intérieurs

Considérons une poutre de fibre moyenne orientée de G_0 vers G_1 , sens des abscisses curvilignes (s) croissantes. Coupons cette poutre en G (abscisse s_G) en deux parties : partie I à gauche de G et une partie II à droite de G (figure III-1.2).

Isolons la partie I : alors on nomme « **torseur des efforts intérieurs en x_G** » l'action de la région II ($s > s_G$) sur la région I ($s < s_G$) ; il est égal au torseur des efforts extérieurs appliqués sur la partie II de la poutre.

Le torseur des efforts intérieurs en G est noté. ${}_G \{t\} = \begin{matrix} \uparrow & \& \downarrow \\ \circ & R & \circ \\ \rightarrow & \& \leftarrow \\ \circ & M_G & \circ \\ \downarrow & \& \uparrow \end{matrix}$

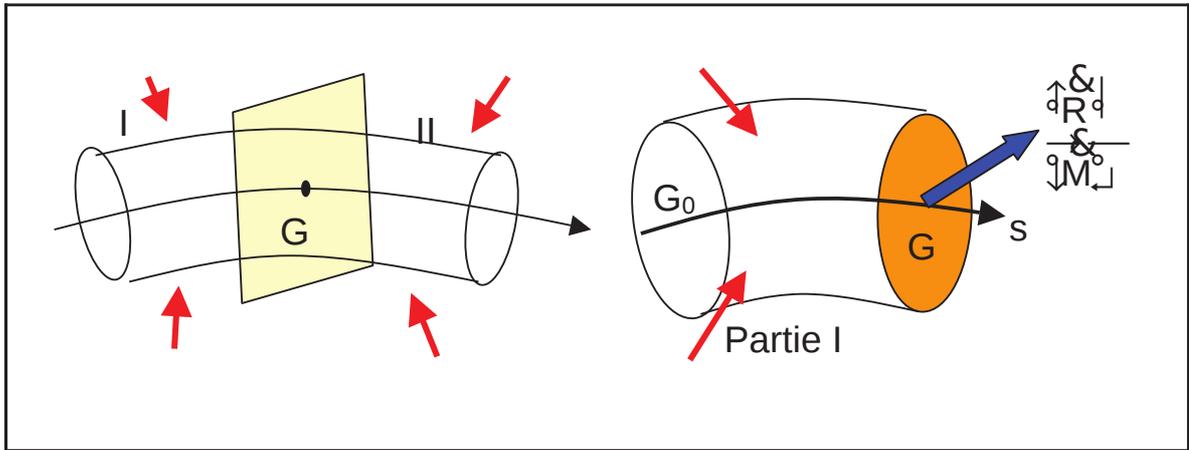


Figure III-1.2 : définition du torseur des efforts intérieurs

Il a pour éléments de réduction dans le repère (x_G, y_G, z_G) orthonormé direct lié à la section droite en G (Nota : si la poutre est droite $x_G=s=x$) :

$${}_G \{t\} = \begin{matrix} \uparrow & \& \downarrow \\ \circ & R & \circ \\ \rightarrow & \& \leftarrow \\ \circ & M_G & \circ \\ \downarrow & \& \uparrow \end{matrix} = \begin{matrix} \uparrow & \& \downarrow \\ \circ & R = N_x & \circ \\ \rightarrow & \& \leftarrow \\ \circ & M_G = M_x & \circ \\ \downarrow & \& \uparrow \end{matrix} = \begin{matrix} \uparrow & \& \downarrow \\ \circ & R = N_x + T_y \cdot y_G + T_z \cdot z_G & \circ \\ \rightarrow & \& \leftarrow \\ \circ & M_G = M_x + M_y \cdot y_G + M_z \cdot z_G & \circ \\ \downarrow & \& \uparrow \end{matrix} = \begin{matrix} \uparrow N & M_x \\ \circ & M_y \\ \rightarrow T_y & \\ \circ & M_z \\ \downarrow T_z & \end{matrix} \quad (\text{éq III-1.1})$$

- Avec :
- N : effort normal (si $N > 0$ traction si $N < 0$ compression)
 - T_y, T_z : efforts tranchants
 - M_x : moment de torsion
 - M_y, M_z : moments de flexion

Convention de signe : par convention le torseur des efforts intérieurs calculé de la manière précédente sera compté positivement. Alors pour satisfaire la relation d'équilibre, le torseur des efforts intérieurs en x_G qu'exerce la partie gauche sur la partie droite devra être affecté d'un signe négatif. Le résultat du calcul sera le même car le torseur des efforts intérieurs en G est unique.

La démarche générale de calcul des composantes du torseur des efforts intérieurs sera donc la suivante :

- on se place en une section s_G ,

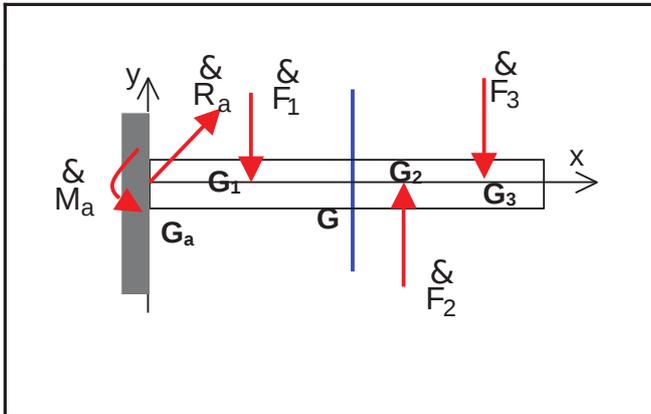
deux méthodes alternatives peuvent alors être utilisées :

- **méthode 1 :** on procède au bilan des efforts extérieurs à la poutre appliqués sur la région II, et on écrit les composantes du torseur des ces efforts extérieurs au point G affecté d'un signe « + », (calcul à droite)
- **méthode 2 :** on procède au bilan des efforts extérieurs à la poutre appliqués sur la région I, et on écrit les composantes du torseur des ces efforts extérieurs au point G affecté d'un signe « - », (calcul à gauche)

Le choix de la méthode dépend de la complexité du système d'effort appliqué ; on a toujours intérêt à faire le choix d'écrire ce bilan sur le coté où le calcul est le plus simple.

Ce calcul doit être fait pour tout s , quand s décrit la poutre : il permet de tracer le **diagramme des efforts intérieurs**. Ce calcul est un préalable au calcul des contraintes, déformations et déplacements dans la poutre.

Exemple : calcul du torseur des efforts intérieurs en G à droite et à gauche (figure III-1.3)



Calcul à droite : (ici $s=x$)

$$\begin{aligned} \uparrow R & \quad \uparrow F_2 + F_3 \\ \rightarrow M_G & \quad \rightarrow GG_2 \wedge F_2 + GG_3 \wedge F_3 \end{aligned}$$

Calcul à gauche :

$$\begin{aligned} \uparrow R_a & \quad \uparrow R_a + F_1 \\ \rightarrow M_G & \quad \rightarrow GG_1 \wedge F_1 + GG_a \wedge R_a + M_a \end{aligned}$$

Figure III-1.3 : exemple de calcul

1.2.2. Symbolique des conditions d'appui

En fonction de la condition d'appuis, les réactions exercées sont différentes. La symbolique usuelle est résumée ci dessous :

- appuis simples

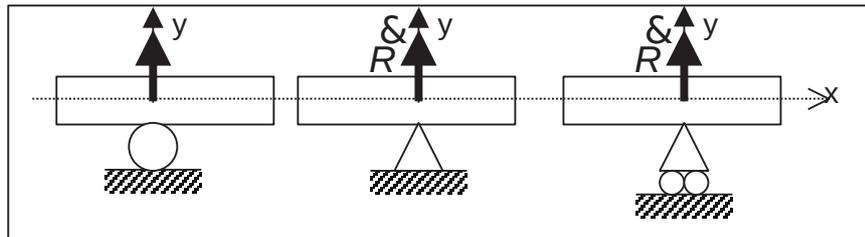


Figure III-1.4 : symboles des appuis simples

- rotule

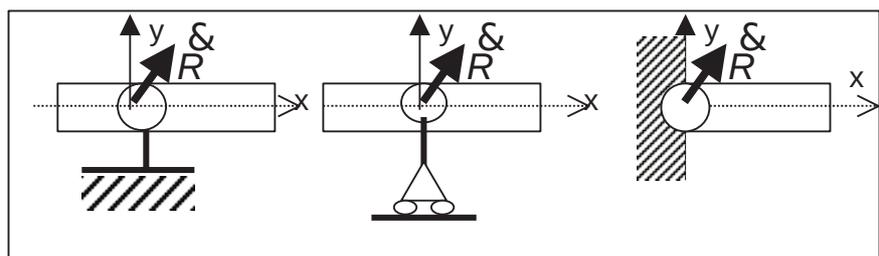


Figure III-1.5 : symbole d'une rotule

- encastrement

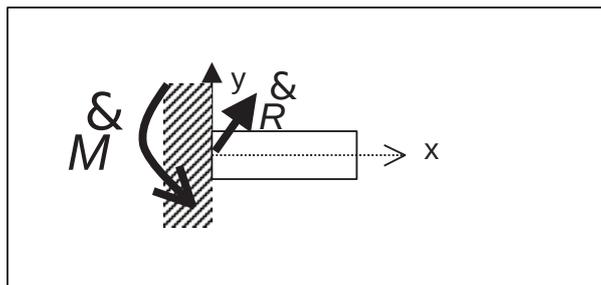


Figure III-1.6 :

symbole d'un encastrement

1.2.3. Formules générales des efforts intérieurs dans le cas particulier des poutres droites (s=x) à chargement plan

Hypothèses :

- La poutre et les charges admettent un même plan de symétrie \hat{I} le moment de torsion disparaît et l'effort tranchant est dans le plan de symétrie.
- La poutre droite est chargée perpendiculairement à la fibre moyenne \hat{I} effort normal nul

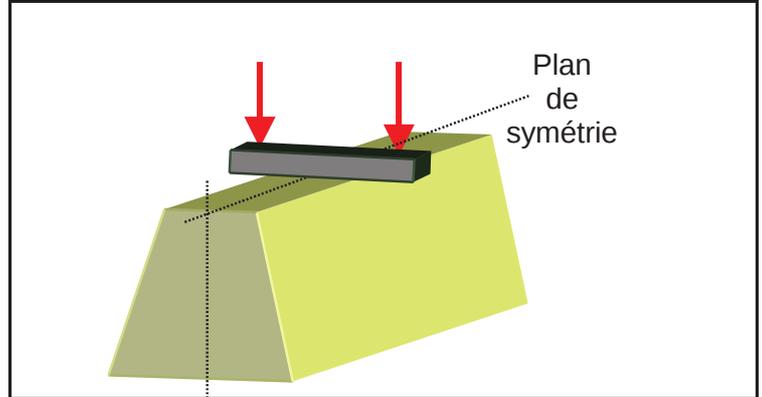
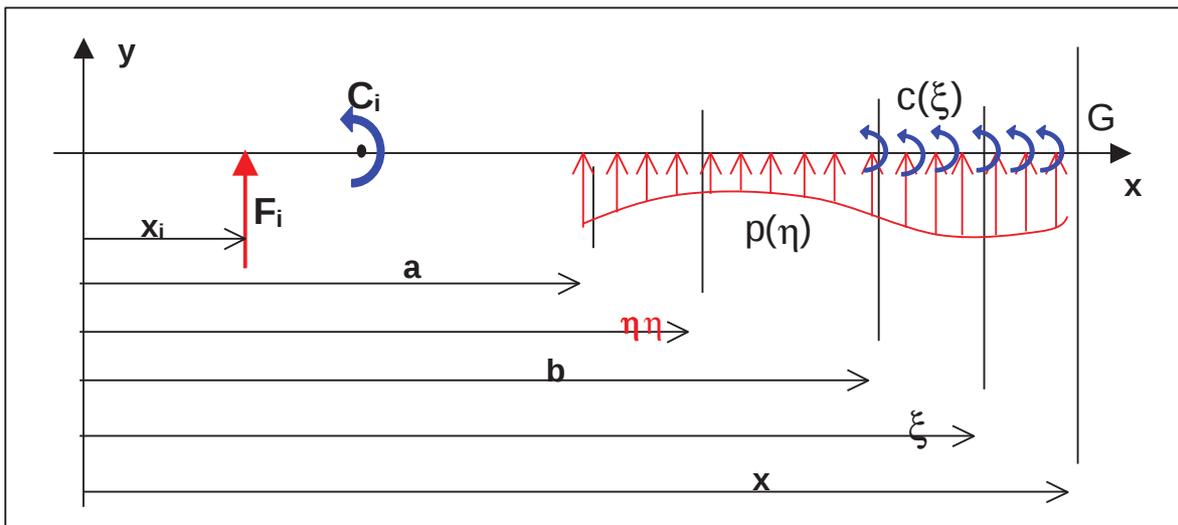


Figure III-1.7 : poutre droite à chargement plan

Relation générales entre chargement, T_y et M_z dans le cas des efforts extérieurs appliqués à gauche de G (de coordonnée x) suivant :

- efforts concentrés F_i avec comme point d'application x_i
- efforts répartis de densité $p(\eta)$ entre a et x,
- couples isolés C_i (mesurés sur \hat{Z}),
- couples répartis de densité $c(\xi)$ (mesurés sur \hat{Z}) entre b et x.



Dans la section d'abscisse x, nous avons donc (attention calcul à gauche donc précédé d'un signe -) :

effort tranchant sur \hat{y} :

$$T_y(x) = - \sum_i F_i + \int_a^x p(\eta) d\eta \quad (\text{éq. III-1.2})$$

moment de flexion sur Z :

$$M_z(x) = - \sum_i f_i F_i(x - x_i) + \sum_i C_i - \int_a^x p(\eta) \cdot (x - \eta) d\eta + \sum_b^x c(\xi) d\xi \quad (\text{éq. III-1.3})$$

Les formules III-1.2 et III-1.3 montrent que :

- a) le diagramme d'effort tranchant présente des discontinuités dans les sections où sont appliqués les forces concentrées,
- b) dans le cas où la poutre ne supporte pas de couples isolés, le moment de flexion est une fonction continue de x,
- c) si nous considérons la fonction $F(a, b, x) = \int_a^{b(x)} p(\eta) (x - \eta) d\eta$ avec a et b fonction de x, alors le théorème de la borne supérieure permet d'écrire $\frac{dF}{dx} = \int_a^{b(x)} p(\eta) d\eta$, et si nous appliquons ce théorème à l'équations III-1.3, alors

$$\frac{dT_y}{dx} = -p(x) \quad (\text{éq. III-1.4})$$

et $\frac{dM_z}{dx} = \sum_i f_i + \int_a^x p(\eta) d\eta - c(x) \quad (\text{éq. III-1.5})$

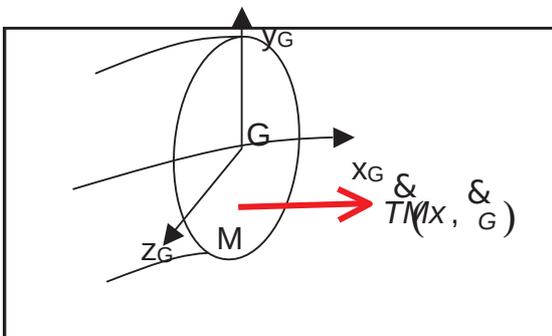
- d) lorsqu'il n'y a pas de couples répartis sur la poutre la relation précédente devient :

$$\frac{dM_z}{dx} = \sum_i f_i + \int_a^x p(\eta) d\eta = -T_y$$

et donc $\frac{dM_z}{dx} = -T_y$ et $\frac{d^2M_z}{dx^2} = p(x) \quad (\text{éq. III-1.6})$

1.3. ETAT DE CONTRAINTE DANS UNE SECTION DROITE

En tout point M d'une section droite, l'état de contrainte peut se représenter dans le repère orthonormé direct (x, y, z) lié à la section droite par le tenseur des contraintes :



$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

et le vecteur contrainte en M selon x_G par

$$T_{M(x, G)} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} \text{ car } x_G = (1, 0, 0)$$

Figure III-1.9

Il en résulte que :

$$\int_S \vec{r}_{M, X_G} dS = R_G$$

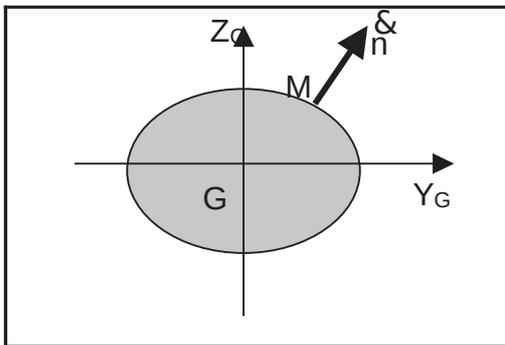
$$\int_S \vec{r}_{M, X_G} \wedge T(M, X_G) dS = M_G$$

éq III-1.7

En posant $G M (0, y_G, z_G)$, la projection sur les axes conduit aux 6 équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 N &= \int_S \sigma_{xx} dS \\
 T_y &= \int_S \sigma_{xy} dS \\
 T_z &= \int_S \sigma_{xz} dS \\
 M_x &= \int_S (y_G \sigma_{xz} - z_G \sigma_{xy}) dS \\
 M_y &= \int_S (z_G \sigma_{xx}) dS \\
 M_z &= - \int_S (y_G \sigma_{xx}) dS
 \end{aligned}
 \tag{éq. III-1.8}$$

Appliquons le principe de Saint-Venant à une section droite (figure III-1.10): nous sommes loin des points d'application des efforts extérieurs et donc le contour de la section droite n'est pas chargé.



(éq. III-1.10)

Le vecteur unitaire de normale extérieure à la section droite s'exprime sous la forme $\vec{n}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et la condition de non chargement du contour s'écrit :

$$T(\vec{M}, \vec{n}) = 0 \quad \forall M \text{ du contour}$$

soit :

$$\begin{aligned}
 \alpha_2 \cdot \sigma_{xy} + \alpha_3 \cdot \sigma_{xz} &= 0 \\
 \alpha_2 \cdot \sigma_{yy} + \alpha_3 \cdot \sigma_{yz} &= 0 \\
 \alpha_2 \cdot \sigma_{yz} + \alpha_3 \cdot \sigma_{zz} &= 0
 \end{aligned}$$

Les deux dernières équations de III-1.9 sont les seules faisant intervenir $\sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$ et nous poserons, vu les petites dimensions des sections droites que ces quantités sont uniformément nulles en tout point de la section.

En conclusion, l'état de contrainte dans une section droite de la poutre s'écrira donc :

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec les conditions III-1.8 et III-1.9 à vérifier.}$$

Une grande partie de la suite de ce chapitre consistera à déterminer la répartition de ces contraintes ainsi que des déplacements et déformations dans chaque cas de sollicitation simple. Dans le cas de chargement complexe il conviendra d'appliquer le principe de superposition.

Les différentes sollicitations simples sont présentées dans le tableau III-1.1 ci-dessous :

Tableau III-1.1 : sollicitations simples

N	\vec{T}	M_x	\vec{M}	Dénomination	Contraintes
$\neq 0$	0	0	0	Traction ou compression simple	$\sigma_{xx} \neq 0$ et $\vec{\tau} = 0$
0	$\neq 0$	0	0	Cisaillement pur	$\sigma_{xx} = 0$ et $\vec{\tau} \neq 0$
0	0	$\neq 0$	0	Torsion pure	$\sigma_{xx} = 0$ et $\vec{\tau} \neq 0$
0	0	0	$\theta_1 \neq 0$	Flexion pure	$\sigma_{xx} \neq 0$ et $\vec{\tau} = 0$
$\neq 0$	0	0	$\neq 0$	Flexion composée	$\sigma_{xx} \neq 0$ et $\vec{\tau} = 0$
0	$\neq 0$	0	$\theta_1 \neq 0$	Flexion simple	$\sigma_{xx} \neq 0$ et $\vec{\tau} \neq 0$

Ou désigne $\vec{T} = (T_y, T_z)$ $\vec{M} = (M_y, M_z)$ et $\vec{\tau} = (\sigma_{xy}, \sigma_{xz}) = (\tau_y, \tau_z)$

1.4. DEMARCHE GENERALE DE RESOLUTION D'UN PROBLEME DE POUTRE

Il conviendra de suivre **systematiquement** la démarche suivante pour résoudre un problème de résistance des matériaux en poutre :

- identifier les efforts extérieurs ainsi que les conditions aux appuis et faire une schématisation du problème physique,
- déterminer les réactions aux appuis en exprimant les relations d'équilibre en statique
 - nombre **d'inconnues** i
 - nombre **d'équations** n

Si $i > n$ le système est **hyperstatique** et il faudra des équations complémentaires pour résoudre le système. Une méthode pour trouver des équations supplémentaires sera exposée dans le chapitre 3 consacré aux théorèmes de l'énergie (théorème de Ménabréa).

- tracer des diagrammes des efforts intérieurs,
- détermination des contraintes, déformations et déplacements par les formules exposées dans le chapitre 2.

Chapitre 2 : ETUDE DES SOLLICITATIONS ELEMENTAIRES

2.1. TRACTION ET COMPRESSION SIMPLE

2.1.1. Définition

Seul **N** est différent de zéro. Si $N > 0$ traction, si $N < 0$ compression.

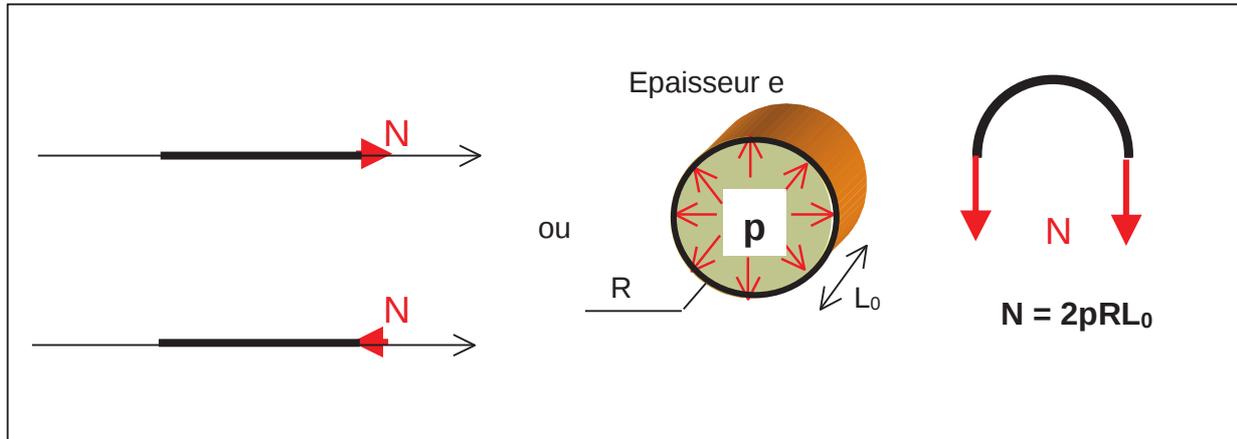


Figure III -2 -1 : traction et compression simple

2.1.2. Contrainte

La contrainte est uniforme dans la section droite et vaut

$$\sigma_x = \frac{N}{S} \quad S : \text{aire de la section}$$

2.1.3. Déformation

A partir de la loi de Hooke :

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{E \cdot S}$$

2.1.4. Déplacement

Par définition $\epsilon_x = \frac{dU}{dx}$ donc

$$U(x) = \int_0^x \epsilon_x dx$$

2.1.5. Energie de déformation élastique par unité de longueur

L'énergie de déformation élastique totale de la poutre vaut :

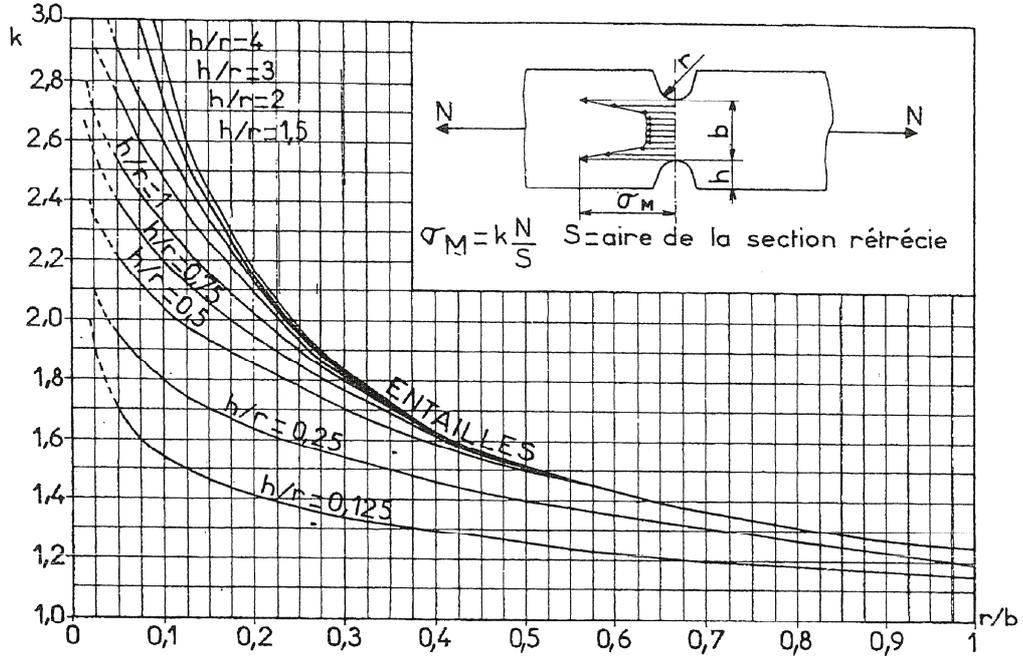
$$W_{el} = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon dv \quad \text{soit comme } dv = dx dy dz$$

L'énergie de déformation élastique par unité de longueur est :

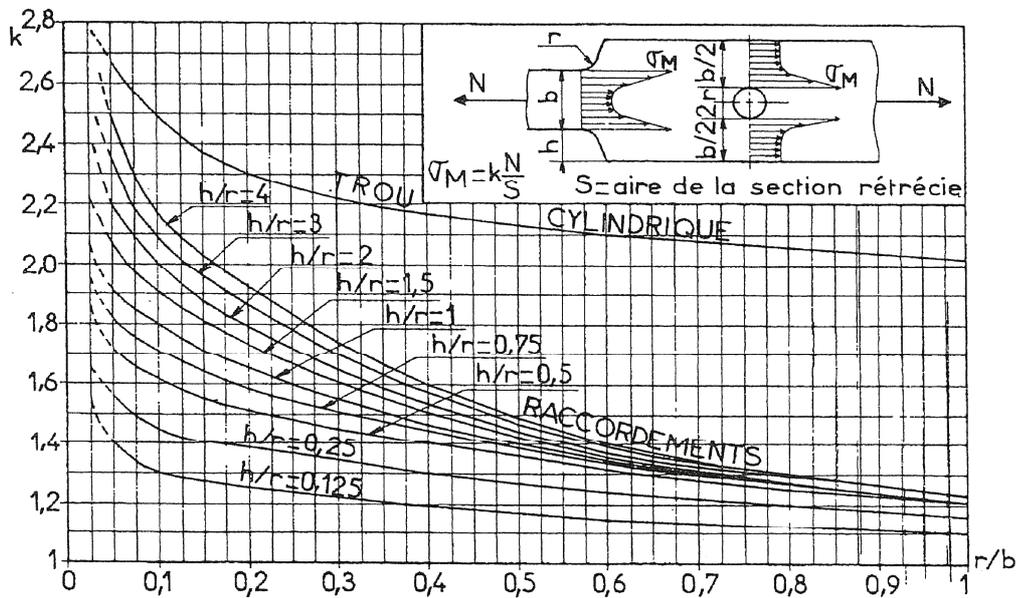
$$\frac{dW_{el}}{dx} = \frac{N^2}{2ES} \quad (\text{éq. III-2.1})$$

2.1.6 Poutre à section variable d'après [1]

Dans ce cas les contraintes ne sont plus uniformes dans la section, et il apparaît des concentrations de contraintes.



a. Valeurs de k pour des poutres entaillées.

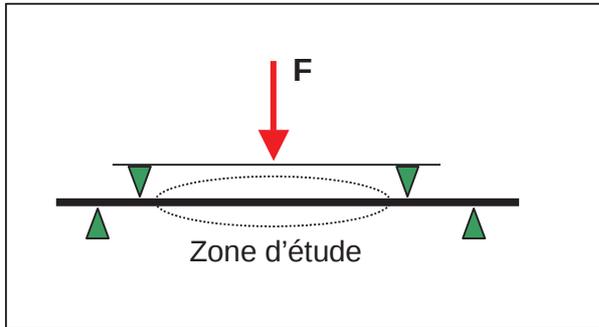


b. Valeurs de k pour trous et raccords

CONCENTRATIONS DE CONTRAINTES
EN TRACTION (sections rectangulaires ou circulaires).

2.2. FLEXION PURE

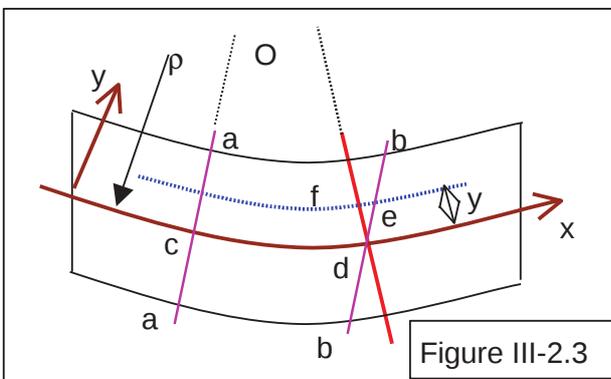
2.2.1. Définition



Seul M_z est différent de zéro.

Figure III-2.2 : définition de la flexion pure

2.2.2. Déformation



Considérons deux sections adjacentes aa et bb (Figure III-2.3) parallèles entre elles avant charge. Après charge, elles sont encore planes, mais ont tourné l'une par rapport à l'autre autour de O avec un rayon de courbure ρ .

Si cd leur intersection avec la fibre neutre. La fibre à une distance y s'est rétrécie de ef, sa déformation est donc :

$$\epsilon_x = -\frac{fe}{cd} = -\frac{df}{dO} = -\frac{y}{\rho} = -y \frac{d\theta_z}{dx}$$

Les déformations longitudinales sont donc proportionnelles à leur distance y de l'axe neutre.

2.2.3. Contrainte

En appliquant la loi de Hooke :

$$\sigma_x = E\epsilon_x = -\frac{Ey}{\rho} = -Ey \frac{d\theta_z}{dx}$$

Or d'après III-1.8, $M_z = -\int_S y \cdot \sigma_x dS = \frac{E}{\rho} \int_S y^2 dS = \frac{E}{\rho} I_z$ avec I_z moment quadratique de la section droite par rapport à z

(rappel : section circulaire $I_z = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$, section rectangulaire hauteur h, largeur b : $I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$)

Donc
$$\sigma_x = -\frac{M_z \cdot y}{I_z} \quad (\text{éq III-2.2})$$

La contrainte est donc maximale sur la face supérieure et inférieure de la poutre en $y = \pm h/2$ (figure III-2.4).

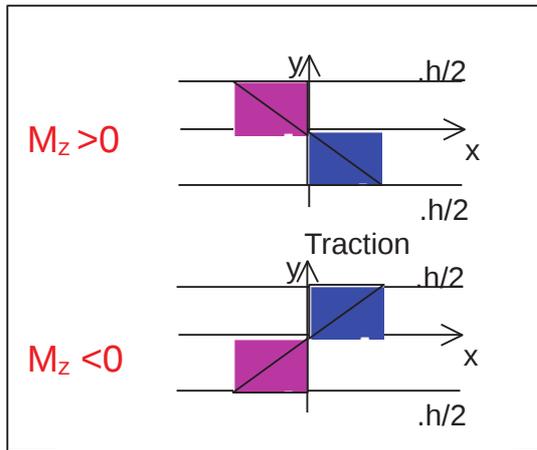


Figure III-2-4 : répartition des contraintes sur la hauteur de la poutre

Si $M_z > 0$ traction sur la partie inférieure
 Si $M_z < 0$ traction sur la partie supérieure

La quantité $\frac{I_z}{h/2}$ est appelé le module de flexion
 (c'est une grandeur caractéristique d'une section droite)

La déformation s'exprime donc également simplement par la quantité $1/(E \cdot I_z)$ est appelée flexibilité de la poutre.

$$\epsilon_x = -\frac{M_z}{E \cdot I_z} \cdot y$$

et la

2.2.4. Déflexion de la poutre

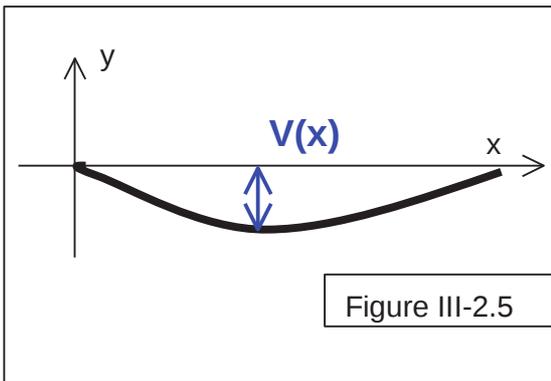


Figure III-2.5

La déflexion de la poutre correspond au déplacement de la ligne neutre dans le sens des y (figure III-2.4), c'est à dire normalement à la direction de la ligne neutre. Ce déplacement dépend de x et nous supposons qu'il est le même pour chaque fibre de la section droite.

Par définition la courbure s'exprime en fonction de V(x)

s'exprime par $\frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$

or comme $\frac{\partial V}{\partial x} \ll 1$ Donc $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E I_z}$, et donc $E \cdot I_z \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = M_z$ (éq III-2.3)

Cette équation s'appelle équation différentielle de la ligne élastique d'une poutre. L'intégration de cette équation différentielle en tenant compte des conditions aux appuis est une des méthodes pour déterminer la déflexion de la poutre le long de x.

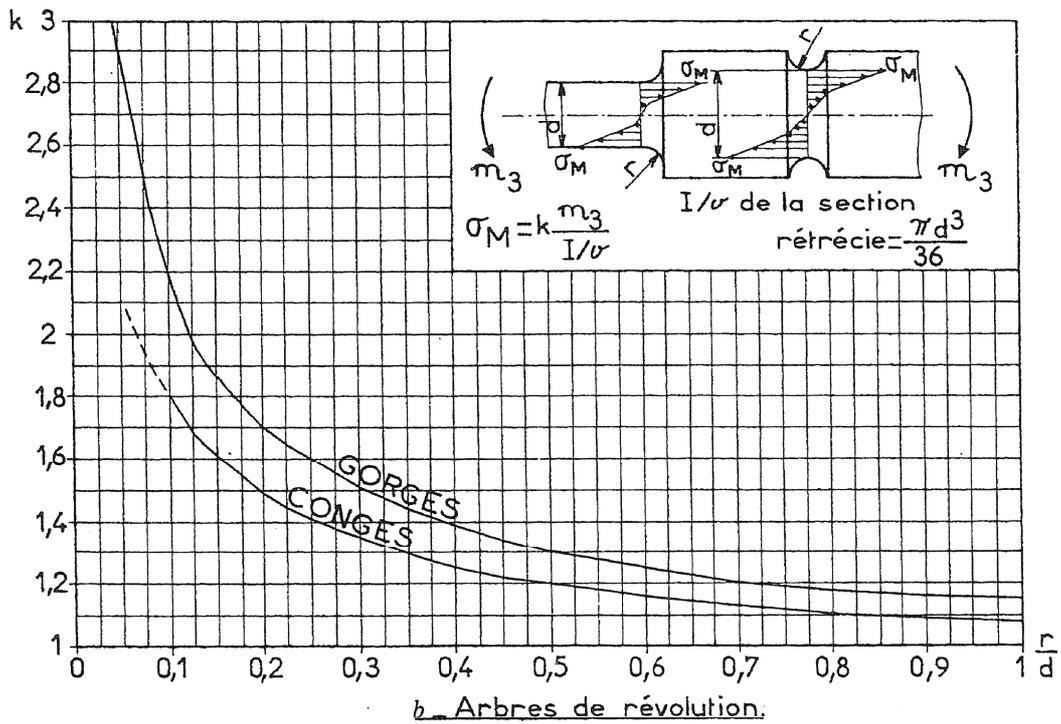
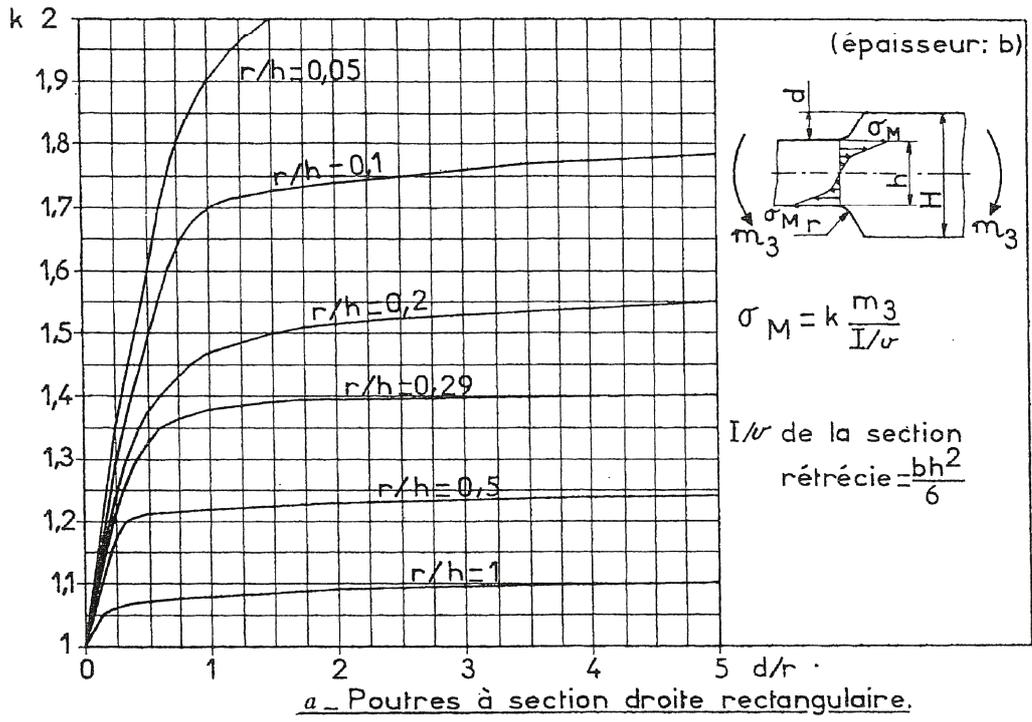
Dans le cas particulier de la flexion pure cette déflexion est un arc de cercle.

2.2.5. Energie de déformation élastique

L'énergie de déformation par unité de longueur dx de la poutre en flexion pure vaut :

$$\frac{dW_{el}}{dx} = \frac{M_z^2}{2 \cdot E I_z} \quad (\text{éq. III-2.4})$$

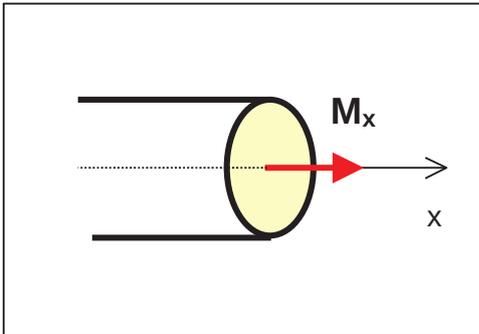
2.2.6 Arbre à géométrie variable d'après [1]



EXEMPLES DE CONCENTRATIONS DE CONTRAINTES EN FLEXION.

2.3 TORSION PURE DES POUTRES CYLINDRIQUES DE REVOLUTION

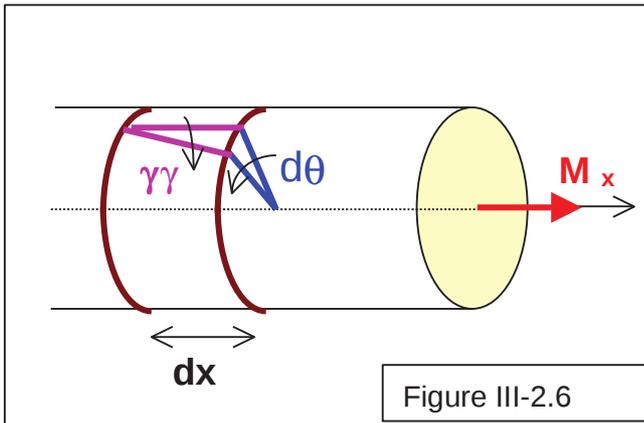
2.3.1 Définition



Seul M_x est différent de zéro (figure III-2.5).

Figure III-2.5 : torsion pure

2.3.2 Déformation



Considérons deux sections proches l'une de l'autre et écrivons la relation entre le déplacement angulaire de torsion θ et la déformation de glissement générée par la torsion. Nous avons (figure III-2.6) :

$$\gamma = r \frac{d\theta}{dx} \quad (\text{éq. III-2.5})$$

avec r la distance du point considéré par rapport à la fibre neutre.

Figure III-2.6

2.3.3 Contrainte

La torsion génère des contraintes de cisaillement, qui s'obtiennent par la loi de l'élasticité :

$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot r \frac{d\theta}{dx}$ puis en utilisant l'équation III-1.8, $M_x = \sum_S \tau \cdot dS$ la contrainte en un

point M s'exprime par :

$$\tau = \frac{M_x \cdot r}{I_0} \quad (\text{éq. III-2.6})$$

où I_0 est le moment quadratique polaire de la section S par rapport à l'axe x, $I_0 = \sum_S r^2 dS$

(rappel : section circulaire pleine de diamètre d $I_0 = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$,

et section tubulaire diamètre extérieur D et intérieur d $I_0 = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32}$)

2.3.4 Déplacement angulaire le long de la poutre

D'après les relations précédentes nous pouvons écrire : $\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_x}{G \cdot I_0}$

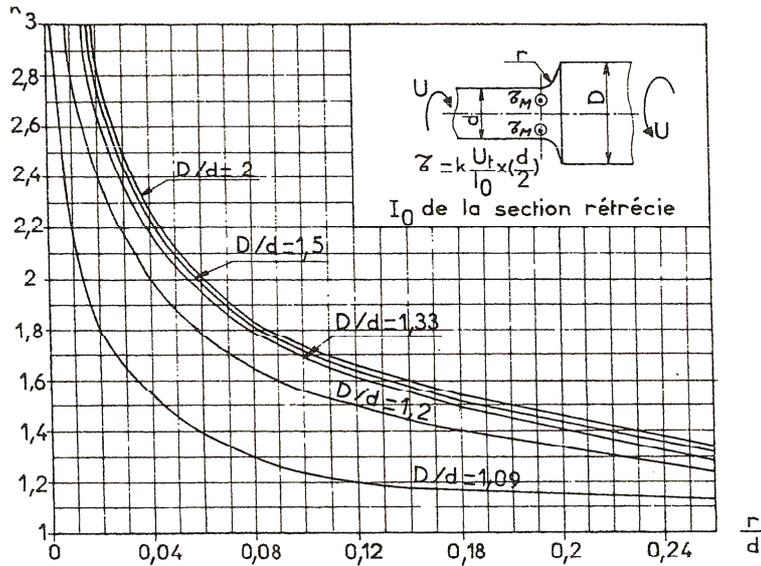
D'où le déplacement angulaire à une distance l devient : $\theta(l) = \int_0^l \frac{M_x}{G \cdot I_0} dx$

2.3.5 Energie de déformation élastique

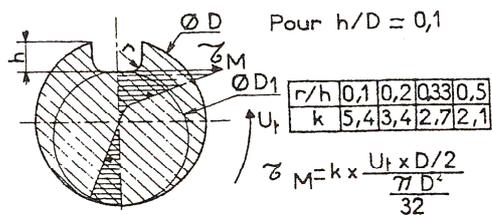
L'énergie de déformation par unité de longueur dx de la poutre en torsion vaut :

$$\frac{dW_{el}}{dx} = \frac{M_x^2}{2 \cdot G \cdot I_0} \quad (\text{éq. III-2.7})$$

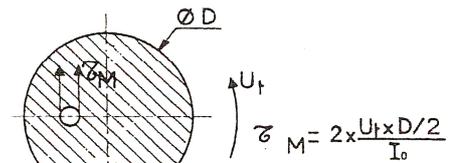
2.3.6 Arbre à section variable d'après [1]



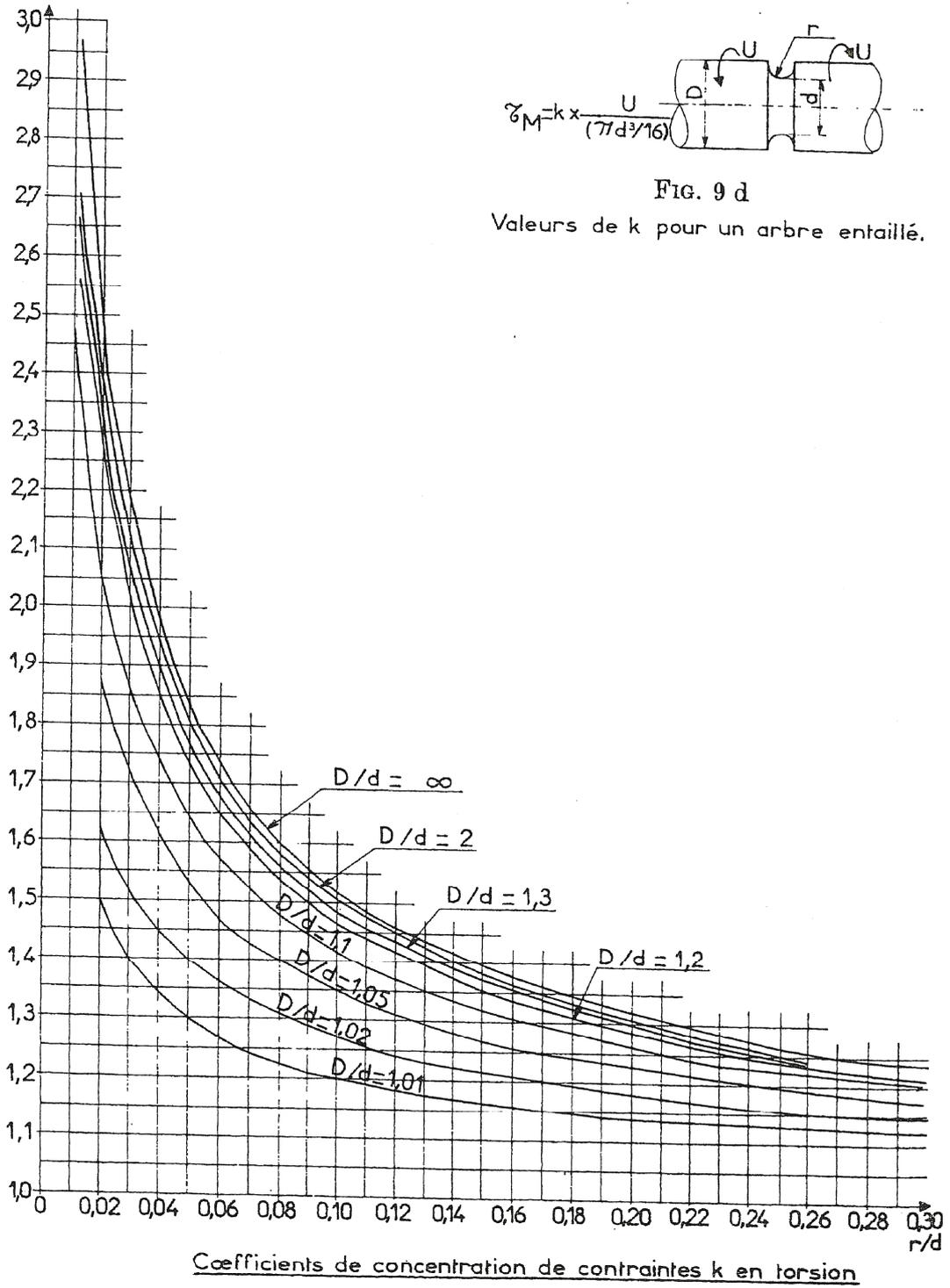
a. Valeurs de k pour un arbre épaulé.



b. Valeurs de k pour arbre rainuré.



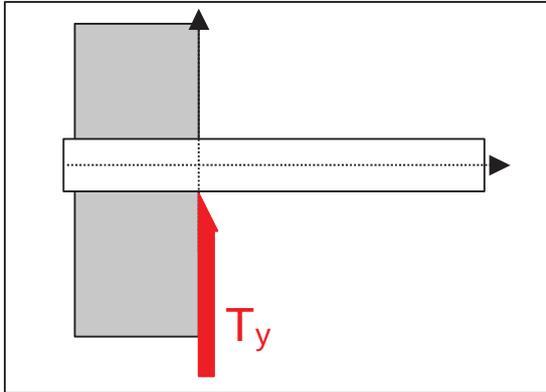
c. Trou longitudinal.



2.4 CISAILLEMENT PUR

2.4.1 Définition

Les résultats présentés dans ce paragraphe seront tous relatifs à l'effort tranchant T_y . (Les résultats seront identiques pour l'effort tranchant T_z).



Seul T_y est différent de zéro.

Exemple : cisaillement d'une clavette

Figure III-2.7 : cisaillement pur

2.4.2 Contrainte

Les contraintes de cisaillement sont uniformes dans la section droite S , et

$$\tau_y = \frac{T_y}{S} \quad (\text{éq III-2.8})$$

2.4.3 Déformation de cisaillement et déplacement de cisaillement

La déformée de cisaillement s'écrit : $\gamma = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G} = \frac{\tau_y}{G}$ avec $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

En première approximation $\frac{dU}{dy} = 0$ (un point dans le plan reste dans le plan)

donc $2\varepsilon_{xy} = \frac{dV}{dx}$ soit $V(x) = \frac{T_y}{SG} x$

2.4.4 Energie de déformation élastique

L'énergie de déformation par unité de longueur dx de la poutre soumise à un effort tranchant vaut :

$$\frac{dW_{el}}{dx} = \frac{1}{2} \int_S \tau_y^2 dydz = \frac{1}{2} \frac{T_y^2}{G \cdot S} \int_S dydz \quad (\text{éq. III-2.10})$$

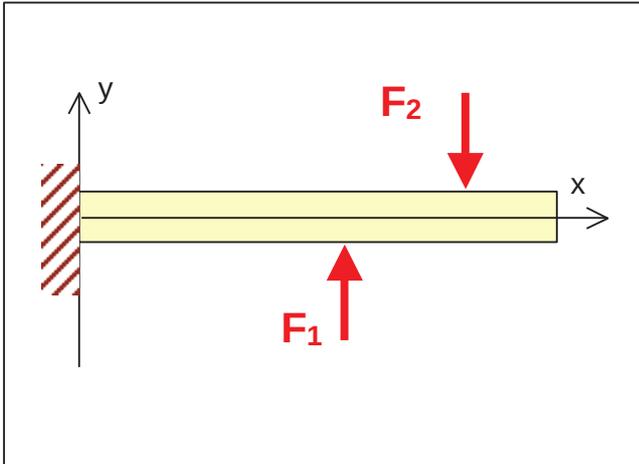
S_r s'appelle la section réduite et est défini par :

$$\int_S \tau_y^2 dydz = \frac{T_y^2}{S_r} = \alpha \frac{T_y^2}{S} \quad \text{et } \alpha \text{ le coefficient de section réduite } S = \alpha S_r$$

(Nota : section circulaire $\alpha = \frac{10}{9}$ section rectangulaire $\alpha = \frac{6}{5}$)

2.5 FLEXION SIMPLE

2.5.1 : Définition



En flexion simple seuls M_z et T_y sont différentes de zéro. (Les forces sont supposées agir perpendiculairement à l'axe longitudinal, le plan contenant ces forces est le plan de symétrie de la poutre).

Les forces et couples agissant sur la poutre créent :

- des déflexions perpendiculaires à l'axe longitudinal de la poutre,
- des contraintes normales et de cisaillement dans toute section droite de la poutre

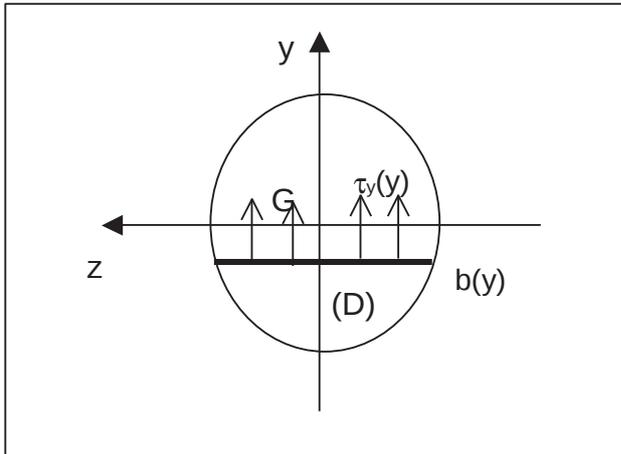
Figure III-2.8 : flexion simple

2.5.2 : Contraintes normales

Elles sont identiques à celle de la flexion pure (cf § 2.2) :

$$\sigma_x = - \frac{M_z \cdot y}{I_z} \quad (\text{éq. III-2.2})$$

2.5.3 : Contraintes de cisaillement



Nous supposons que

$$\tau_y = \tau_y(y)$$

c'est à dire que, les contraintes tangentielles sont uniformes le long d'une ligne // à Gz (figure III-2.9).

Dans ce cas on démontre que :

$$t_y(y) = - \frac{T_y}{b(y)} \times m \quad (\text{éq III-2.9})$$

Figure III-2.9 : cisaillement en flexion simple

où I_z moment d'inertie par rapport à Gz, et m moment statique de la surface hachurée (D) par rapport à Gz. : $m = \int_D y \, ds$

Dans le cas de sections circulaires et rectangulaires, le profil de contrainte est parabolique (tableau III-2.2 et figure III-2.10). Les contraintes sont nulles sur les bords supérieurs et inférieurs et maximales sur l'axe neutre.

Valeurs et profils du cisaillement			
	$\tau_y(y)$	$\tau_{y_{max}}$	Profil
Section circulaire de rayon r	$\frac{4 T_y}{3 S} \left(1 - \frac{y_0^2}{r^2} \right)$	$\frac{4 T_y}{3 S}$	parabolique
Section rectangulaire hauteur h largeur b	$\frac{T_y}{2 \cdot I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y_0^2 \right)$	$\frac{3 T_y}{2 S}$	parabolique

Tableau III-2.2 : valeur du cisaillement pou les sections circulaires et rectangulaires

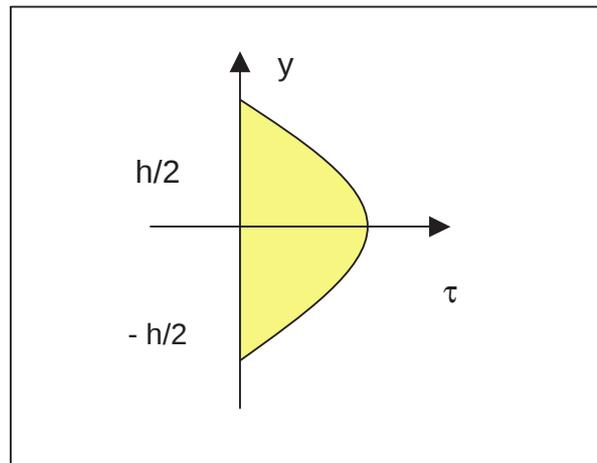


Figure III-2.10 : profil de cisaillement

2.5.4 : Déflexion en flexion simple

La déformée d'une poutre droite en flexion simple est caractérisée essentiellement par la déformée de la ligne moyenne de la poutre. Cette déflexion est due à l'influence simultanée du moment fléchissant et de l'effort tranchant. La plupart du temps l'influence de T est négligeable et nous ferons cette hypothèse dans le cas des sollicitations en flexion simple. Donc de manière similaire au cas de flexion pure :

$$E \cdot I_z \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = M_z \quad (\text{éq. III-2.3})$$

2.5.5 : Energie de déformation élastique

L'enerdie de déformation élastique par unité de longueur de la poutre, est la somme des énergies de déformations élastiques dues à la flexion pure (§ 2.2.5) et à l'effort tranchant (§ 2.4.4), soit :

$$\frac{dW_{el}}{dx} = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{E \cdot I_z} + \frac{T^2}{G \cdot S} \quad (\text{éq. III-2.10})$$

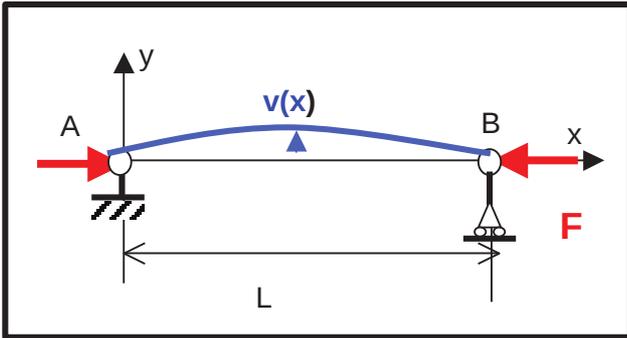
2.6 FLAMBEMENT D'UNE POUTRE

2.6.1. Définition

Lorsqu'une poutre est soumise à une sollicitation de compression suffisamment grande et parallèle à son axe, elle s'incurve et peut prendre une flèche dangereuse: c'est le **phénomène de flambement**.

Si la poutre présente une rectitude presque parfaite, ce phénomène est brutal (la flèche s'accroît de manière rapide) et peut conduire conduisant à la ruine de la structure .

2.6.2. Théorie d'Euler



Hypothèses : la poutre est parfaitement rectiligne avant déformation, elle est rotulée aux deux extrémités et la charge est appliquées dans son axe.

L'équation différentielle de la déformée s'exprime par (cf éq III-2.3)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{M_z}{E \cdot I_z} = -\frac{F \cdot V(x)}{E \cdot I_z}$$

avec comme conditions aux limites $V(0) = V(L) = 0$

La solution générale d'une équation de ce type est :

$$V(x) = \alpha \sin(\omega x) + \beta \cos(\omega x) \text{ où } \omega = \sqrt{\frac{F_c}{E \cdot I_z}}$$

avec en utilisant les conditions aux limites $F_c = n^2 \frac{\pi^2 E \cdot I_z}{L^2}$ charge critique de flambage.

Les différents mode de flambage seront obtenus en faisant varier n.

n=1	1er mode	$F_{c1} = \frac{\pi^2 E \cdot I_z}{L^2}$	
n=2	2ème mode	$F_{c2} = 4 \frac{\pi^2 E \cdot I_z}{L^2}$	
n=3	3ème mode	$F_{c3} = 9 \frac{\pi^2 E \cdot I_z}{L^2}$	

2.6.2 Autres cas

En fonction des conditions aux limites de la poutre la valeur de la charge limite varie

- a) une extrémité encastree, l'autre extrémité libre



$$F_c = \frac{\pi^2 E \cdot I_z}{4L^2}$$

- b) une extrémité encastree, l'autre rotulée



$$F_c = 20.187 \frac{E \cdot I_z}{L^2}$$

- c) deux extrémités encastrees



$$F_c = 4 \frac{\pi^2 E \cdot I_z}{L^2}$$

Chapitre 3 : THEOREMES DE L'ENERGIE

3.1 : ENERGIE DE DEFORMATION

3.1.1 : Généralités

La notion d'énergie, et en particulier d'énergie de déformation conduit à des solutions élégantes et rapides en résistance des matériaux :

- soit pour déterminer des déplacements des points de la poutre,
- soit pour donner des relations complémentaires dans le cas d'un système hyperstatique.

Quelques théorèmes principaux sont cités dans ce chapitre.

3.1.2 : Energie de déformation élastique d'une poutre

Dans la partie II du cours il a été démontré que le travail des forces extérieures W_e était égal à l'énergie de déformation élastique. En vertu du théorème de Clapeyron, le travail des forces extérieures ne dépend que de l'intensité finales des forces et non de leur ordre d'application ou de leur loi de croissance, c'est à dire qu'il s'exprime sous la forme :

$$W_{eF} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta_i + \sum_{i=1}^m M_i \cdot \omega_i \quad (\text{éq III-3.1})$$

où δ_i correspond au déplacement de la force F_i et ω_i correspond à la rotation du moment M_i

L'énergie de déformation par unité de longueur d'une poutre est égale à la somme des énergies de déformations produites par les différentes sollicitations élémentaires (N_{Gx} , T_{Gy} , T_{Gz} , M_{Gx} , M_{Gy} , M_{Gz}), soit en reprenant les résultats du chapitre 2 sur les sollicitations élémentaires :

$$\frac{dW_{el}}{ds} = \frac{1}{2} \frac{N_{Gx}^2}{ES} + \frac{T_{Gy}^2}{GS_{ry}} + \frac{T_{Gz}^2}{GS_{rz}} + \frac{M_{Gx}^2}{GI_0} + \frac{M_{Gy}^2}{EI_y} + \frac{M_{Gz}^2}{EI_z} \quad (\text{éq III-3.2})$$

avec $W_{el} = \int_{poutre} \frac{\partial W_{el}}{\partial s} ds$ ds abscisse curviligne le long de la ligne neutre de la poutre

3.2 : THEOREME DE CASTIGLIANO

Le théorème de Castigliano dit que : la dérivée partielle de l'énergie potentielle de déformation par rapport à une force (respectivement à un moment) est égale au déplacement du point d'application de cette force dans sa direction (respectivement est égale à la rotation du point d'application de ce moment projeté sur l'axe du moment).

$$\delta_i = \frac{\partial W_{el}}{\partial F_i} \quad \text{et} \quad \omega_i = \frac{\partial W_{el}}{\partial M_i} \quad (\text{éq III-3.3})$$

Application du théorème de Castigliano :

a) Dans le cas où un effort est appliquée au point considéré, alors :

$$\delta_i = \frac{\partial W_{el}}{\partial F_i} = \int_{\text{poutre}} \frac{\partial}{\partial F_i} \left(\frac{dW_{el}}{ds} \right) ds = \int_{\text{poutre}} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial W_{el}}{\partial F_i} \right) ds \quad (\text{éq III-3.4})$$

Cette équation permet de calculer simplement les déplacements sans devoir calculer explicitement l'énergie de déformation élastique.

b) Dans le cas où aucun effort n'est appliqué au point où l'on cherche à calculer le déplacement :
La méthode consiste alors :

- à appliquer une force virtuelle (fictive) orientée dans le sens dans le lequel on cherche à déterminer le déplacement
- puis à exprimer l'énergie de déformation incluant cette force,
- enfin à appliquer le théorème de Castigliano pour déterminer le déplacement du point et à annuler les composantes de la force en ce point.

3.3 : THEOREME DE MENABREA

Ce théorème permet d'obtenir des relations complémentaires dans le cas de résolutions de systèmes hyperstatiques, c'est une application du théorème de Castigliano.

Soit un système hyperstatique de degré j tel que R_1, R_2, \dots, R_j soient les réactions statiquement indéterminées. Les équations de la statique permettent d'exprimer les autres réactions d'appui en fonction de R_1, R_2, \dots, R_j et des forces extérieures appliquées au système. Pour des appuis fixes dont le déplacement est nul ($\delta_i = 0$), le théorème de Castigliano donne :

$$\frac{\partial W_{el}}{\partial R_1} = 0; \quad \frac{\partial W_{el}}{\partial R_2} = 0; \quad \dots \quad \frac{\partial W_{el}}{\partial R_j} = 0 \quad (\text{éq III-3.5})$$

De cette manière, on obtient autant d'équations complémentaires que d'inconnues hyperstatiques. Ces conditions (éq III-3.5) expriment le fait que pour les grandeurs des réactions hyperstatiques, la fonction W prend une valeur extrême (dérivée nulle). Si l'équilibre est stable on peut démontrer qu'il s'agit d'un minimum. Donc pour une système hyperstatique, les inconnues hyperstatiques minimisent l'énergie de déformation élastique du système : c'est **le théorème de Ménabréa** (ou principe du travail minimum).

REFERENCES :

- [1] M. Kerguignas, C. Caignaert : « Résistance des Matériaux », Editions Dunod
- [2] R. Boudet, P. Stephan, « Vous avez dit : résistance des Matériaux », Editions Cépaduès
- [3] S. Timoshenko, « Résistance des matériaux »
- [4] A. Giet, L.Geminard, « Résistance des matériaux », édition Dunod
- [5] A. Giet, « Problèmes de résistance des matériaux », éditions Dunod
- [6] R.G. Budynas : Advanced strength and Applied Stress Analysis, McGraw-Hill International editions 1999

