Plan :

Chapitre 2 : Choix des investissements en avenir incertain :

1) **Espérance mathématique.**
2) **La variance et l'écart type de la V.A.N.**
3) **Le cœfficient de la variance de la V.A.N et sa signification.**
4) **Les arbres de décisions.**
5) **Le M.E.D.A.F. (modèle d'équilibre des actifs financiers) et le choix des investissements.**

Exercices :

1)- L'ésperance mathématique:

Une **variable aléatoire** est une fonction définie sur l'ensemble des éventualités, c'est-à-dire l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Espérance de la variable X : $\mathbf{E(X) = \Sigma\, x_i\, p_i}$

Exemple 1 :

Selon la réaction de la demande à son produit, l'entreprise E peut obtenir un bénéfice de :

- 220 si la demande est forte, probabilité de 10%.
- 90 si la demande est moyenne, probabilité de 90%.

- 100 si la demande est faible, probabilité de 20%.

X	P(X)	X P(X)
220	0,1	22
90	0,9	81
100	0,2	20
		E(X) = 123

Conclusion : Le gain total espéré pour cette variable aléatoire est de 123. L'entreprise peut espérer un bénéfice moyen de 123.

La fiabilité du résultat tient à la justesse des probabilités d'apparition des trois états de la demande.

Par ailleurs, pour un même projet d'investissement, les CAF d'exploitation peut être estimée selon plusieurs hypothèse : pessimiste, la plus probable, optimiste. On affecte une probabilité à chaque hypothèse. Il est alors possible de calculer l'espérance mathématique de la VAN compte tenu de la distribution de probabilités des trois hypothèses.

Exemple 2 :

Un investissement d'un montant de 25 millions de Dhs est supposé procurer les CAF suivantes affectées de leurs probabilités :

	Hypothèse pessimiste	**Hypothèse la plus probable**	**Hypothèse optimiste**
Année 1 Année 2 Année 3	25 35 40	32 40 45	50 55 65
Probabilités	0.5	0.4	0.3

Le taux d'actualisation retenu par cette firme est de 12 %

On sait que **:** $\mathbf{E(X) = \Sigma\, x_i\, p_i}$

L'espérance mathématique de la VAN :

$$\mathbf{E\,(VAN_{10\%}) =- C + E\,(R1)\,(1+t) + E\,(R2)\,(1+t) + E\,(R3)\,(1+t)}$$

D'ou les tableaux suivants :

R_{1i}	Pi	Pi R_{1i}
25 32 50	0,5 0,4 0,3	12,5 12,8 15
		40,3

R_{2i}	Pi	Pi R_{2i}
35 40 55	0,5 0,4 0,3	17,5 16 16,5
		50

R_{3i}	Pi	Pi R_{3i}
40 45 65	0,5 0,4 0,3	20 18 19,5
		57,5

On obtient: E (R1) = 40,3.
E (R2) = 50.
E (R3) = 57,5.

E (VAN10%) = - 25 + 40,3 (1,12) + 50 (1,12) + 57,5 (1,12)
E (VAN10%) = 116,77

2) – La variance et l’écart type de la V.A.N. :

L’écart type de la VAN permet de cerner le risque : il indique la marge de variation des valeurs de la VAN autour de l’espérance mathématique.

Selon les choix stratégiques de ses dirigeants, l’entreprise peut ensuite privilégier la rentabilité en acceptant le risque, ou préférer la sécurité, avec une rentabilité moindre.

Nous allons comparer deux décisions avec leur espérance et leur variance et en reprenant l’exemple 1.

x	P(x)	x P(x)	x ²	x² P(x)
200 150 100	0.2 0.7 0.1	40 105 10	40000 22500 10000	8000 15750 1000
		E(x)=155		24750

$V(x)= 24750-(155)^2 = 725$

La variance est de 725 et l’écart type : racine carrée de la variance = $\sqrt{725}$ = 27
Donc la variable x, compte tenu de ses résultats possibles et de leurs probabilités d’apparition, a une espérance de résultat de 155 avec un risque d’oscillation par rapport à cette moyenne de 27.

Cas 2 de l’exemple 1

y	P(y)	x P(y)	y ²	y² P(y)
400	0.05	20	160000	8000

200 100	0.40 0.55	80 55	40000 10000	16000 5500
		E(x)=155		29500

$V(y) = 29500-(155)^2 = 5475.$

La variance est de 5475 et l'écart type = $\sqrt{5475} = 74$.

Conclusion

La variable y, compte tenu de ses résultats possibles et de leurs probabilités d'apparition, a une espérance de résultat de 155 comme x, mais un risque de dispersion beaucoup plus fort puisqu'il est de 74 en plus ou en moins par rapport à la moyenne. Les deux décisions ont la même espérance mathématique mais la dispersion de y est plus grande, donc c'est une décision plus risquée

Exemple 2

Reprenons le même exemple2 de I

La variance d'une variable aléatoire X est donnée par

$$V(X) = \Sigma P_iX_i^2 - E(X)^2$$

$V(R1) = \Sigma P_iR_{1i}^2 - E[(R_1)]^2$

On a $V(VAN_{10\%}) = V(R1)(1+t)^{-1} + V(R2)(1+t)^{-2} + V(R3)(1+t)^{-3}$

$E(VAN_{10\%}) = V(R1)(1,10)^{-1} + V(R2)(1,10)^{-2} + V(R3)(1,10)^{-3}$

A partir de cette formule, On calcule dans les taux ci-dessous $\Sigma P_iX_i^2$ pour chacune des trois années et selon chaque hypothèse :

R_1i	Pi	PiR_1i	PiR_1i^2
20 30 40	0.5 0.3 0.2	10 9 8	200 270 320
		27	790

R_2i	Pi	PiR_2i	PiR_2i^2
25	0.5	12.5	200
40	0.3	12	270
50	0.2	10	320
		34.5	1292.5

R_3i	Pi	PiR_3i	PiR_3i^2
30	0.5	15	450
50	0.3	15	750
60	0.2	12	720
		42	1920

On obtient $V(R1) = 790 - 27^2 = 61$;

$V(R2) = 1292.5 - 34.5^2 = 102,25$

$V(R3) = 1920 - 42^2 = 156.$

$V(VAN_{10\%}) = 61(1.10)^{-1} + 102,25(1,10)^{-2} + 156(1.10)^{-3}$

$V(VAN_{10\%}) = 257$ et $\boldsymbol{\sigma}(VAN_{10\%}) = 16$

3) – Le cœfficient de la variance de la V.A.N et sa signification.

Le coefficient de variation de la VAN mesure la dispersion de la distribution de probabilités des profits attendus du projet, Il s'exprime ainsi :

$$CV = \frac{\sigma(VAN)}{E(VAN)}$$

Un projet est d'autant plus risqué que la distribution de probabilité des profits est dispersée. Le coefficient est donc une mesure du risque.

$\sigma(VAN)$ 16

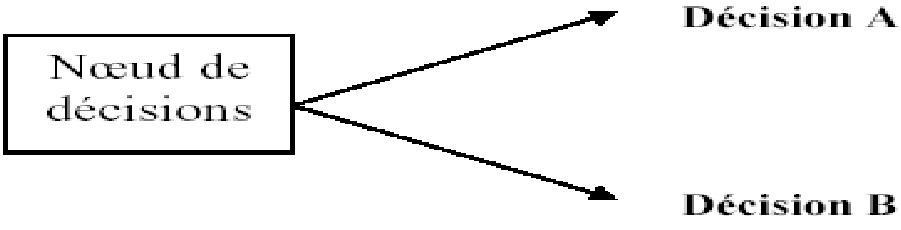
$$CV = \frac{\qquad}{E\ (VAN)} = \frac{\qquad}{4{,}6}$$

4) – Les arbres de décisions :

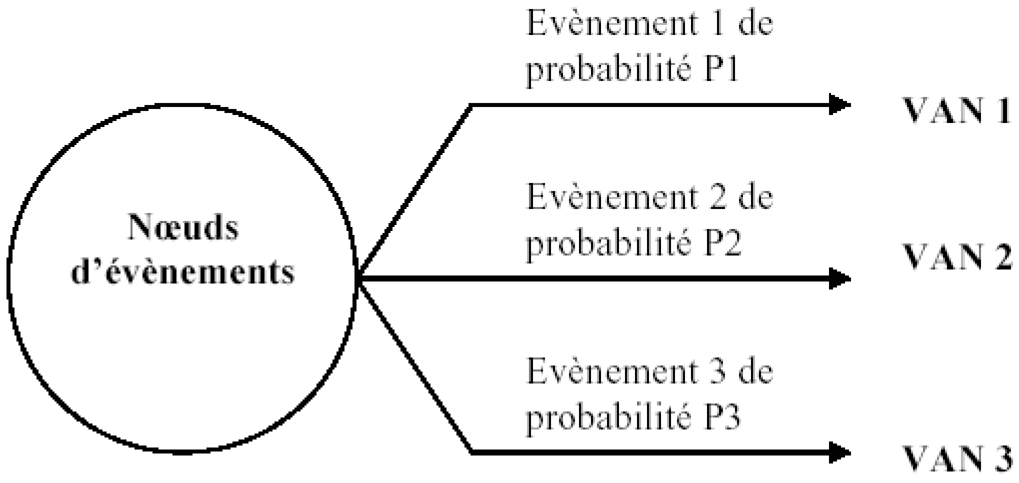
Un arbre de décision est un outil d'aide à la décision et à l'exploration de données. Il permet de modéliser simplement, graphiquement et rapidement un phénomène mesuré plus ou moins complexe. Sa lisibilité, sa rapidité d'exécution et le peu d'hypothèses nécessaires a priori expliquent sa popularité actuelle.

Cet arbre se décompose en :

- Nœuds de décisions (carrés)

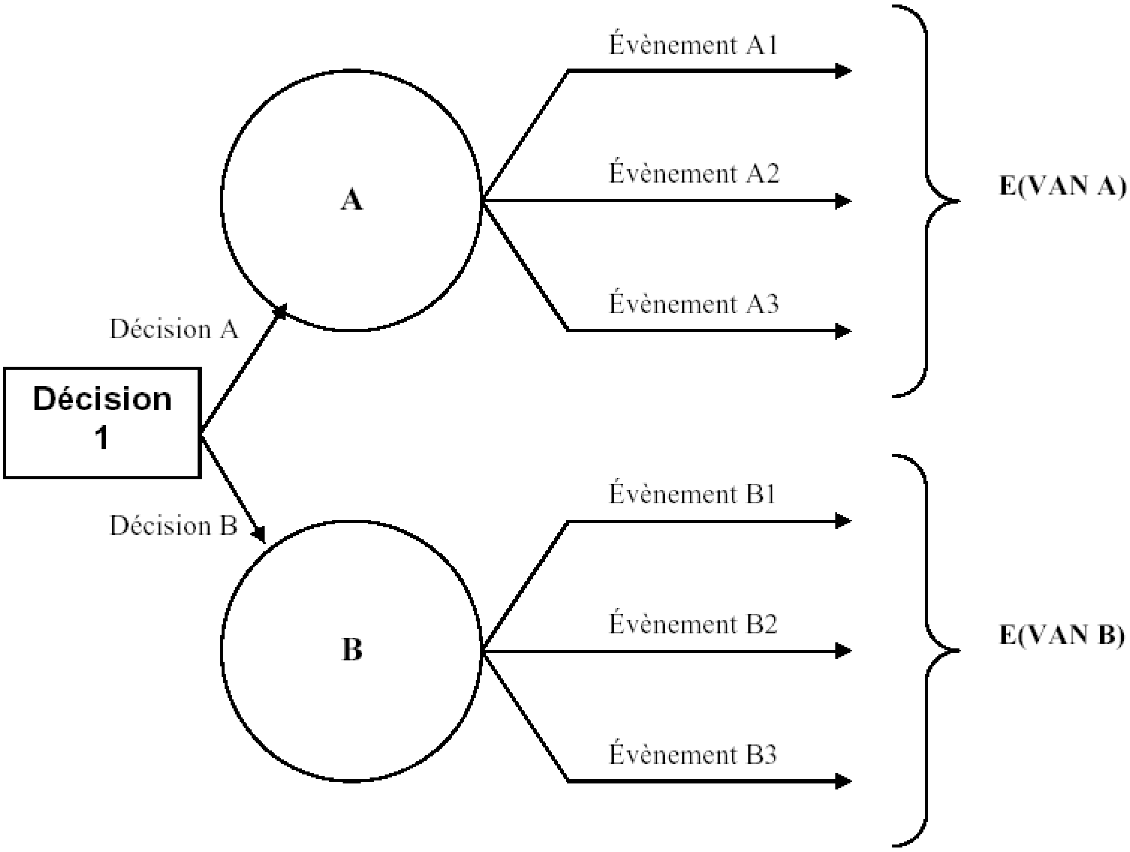


- Nœuds d’évènements (ronds)



-Décision : elle est prise par le décideur ;
-Evénement : il est indépendant du décideur, il se réalise ou non et dans ce contexte, l'avenir n'est plus connu, l'entreprise est capable d'envisager l'ensemble des résultats possibles en fonction des états qu'elle peut appréhender et d'affecter à chacun de ces résultats une probabilité d'apparition.

<u>Règle de décision</u>



5) – Le M.E.D.A.F. (modèle d'équilibre des actifs financiers) et le choix des investissements.

Le modèle d'Evaluation des actifs Financiers (MEDAF, en anglais Capital Asset Pricing Model, CAPM) est comme son nom l'indique, un modèle permettant de valoriser les actifs financiers, notamment les actions. Il s'inscrit dans le cadre général des marchés à l'équilibre

Le MEDAF est utilisé pour calculer le taux de rentabilité exigé sur un actif compte tenu de son risque.

Le MEDAF vise à évaluer la rentabilité effectivement réalisée par un fonds donné sur une période donnée. En somme, le MEDAF permet d'évaluer le prix du risque pour les investissements c'est-à-dire l'espérance de rentabilité d'un actif risqué. Le modèle se fonde sur l'hypothèse de base que les investisseurs cherchent à maximiser la rentabilité de leur investissement en minimisant leur risque.

Le modèle s'inscrit dans le cadre général des marchés à l'équilibre.
Le MEDAF, permet du moins sur le plan théorique, de fournir aux actionnaires le taux rémunération qu'ils sont en droit d'exiger étant donné le risque qu'ils acceptent.
C'est le taux qui doit servir de taux d'actualisation des dividendes futurs quand il s'agira d'estimer la valeur d'une action.

Pour comprendre cette relation, il y a lieu, comme on l'a vu, de partir de la notion du facteur risque.
Et pour cause, tous les projets qui sont entrepris dans le cadre d'une entreprise ne sont pas liés au même facteur d'incertitude, au même risque. Par exemple, il est beaucoup moins risqué d'investir en obligations garanties par l'Etat que de faire l'acquisition de titres d'une entreprise liée aux technologies nouvelles. Nous avons donc notre présence des actifs que l'on peut considérer comme sans risque et d'autres à risques.

Le M.E.D.A.F. Est un modèle qui permet d'ajuster objectivement le critère de la VAN au risque économique dans les choix d'investissement parce qu'il est fondé sur l'observation des marchés financiers.

Analyse du risque

L'évolution des 30 dernières années, en finance, repose sur la prise en compte du risque dans les décisions de gestion financière

Les modèles qui vont d »coulent de cette évolution s’appuient sur le fait que la rémunération des fonds investis dans une entreprise doit intégrer une prime de risque.

Tout le problème étant de savoir comment évaluer la prime de risque que demande tout investisseur.

Dans les économies développées où existent un marché financier qui joue un rôle d’allocations de ressources de l’économie, un certain nombre de modèle permettant de résoudre le problème de l’évaluation de la prime de risque ont été mis au point.

L’ensemble de ces modèles s’appuie sur l’hypothèse selon laquelle tout investisseur recherche la maximisation de la valeur de son patrimoine compte tenu du risque encouru.
Ces modèles s’appuient sur le fait que plus un actif n’est risqué, plus sa rentabilité n’est importante c’est-à-dire que la rentabilité et le risque sont deux variables qui évoluent dans le même sens.
Ces modèles se sont appuyés sur un certain nombre de techniques simples visant à mesurer le risque et notamment le risque des titres cotés sur le marché financier.
La technique était celle de la variance du taux de rentabilité ou du taux de résultat de l’actif.

Exercice 1 :

L’entreprise <Ilysé> envisage la réalisation d’un projet d’investissement nécessitant un capital de 1000 Dhs et dont la durée serait de 3 ans. Deux hypothèses sont retenues
-H1 : hypothèse optimiste ; probabilité : 0.6 ;
-H2 : hypothèse pessimiste ; probabilité : 0.4.

Les prévisions relatives aux cash-flows sont données ci-dessous :

	1	2	3
cash-flows H1	500	700	400
cash-flows H2	400	500	300

Coût du capital : 10 %

Travail à faire :

Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de la VAN.

Corrigé de l'exercice 1

a) Espérance mathématique de la VAN :

E (VAN) = E (C1) * $(1,1)^{-1}$ – 1 + E (C1)* $(1,1)^{-2}$ + E (C1) * $(1,1)^{-3}$ – 1000
E (VAN) = (500 * 0.6 + 400 * 0.4) * (1,1) + (700* 0.6 +500*0.4) *(1,1) + (400*0.6 + 300 *0.4) * (1.1) – 1000
E (VAN) = 201,05.

b) l'écart type de la VAN :

Variance:

V (VAN) = V (C1) * $(1,1)^{-2}$+ V(C2)* $(1,1)^{-4}$+V(C3) * $(1,1)^{-6}$
V (C1) = 500^2 * 0,6 + 400^2 * 0.4 –$(460)^2$ = 2400
V (C2) = 700 * 0,6 +500^2 * 0.4 –$(620)^2$ = 9600 .
V (C3) = 400^2 * 0,6 +300^2 *0.4 –$(360)^2$ = 2400 .
V (VAN) = 2400* $(1,1)^{-2}$ – 2 +9600 * $(1,1)^{-4}$+ 2400 * $(1,1)^{-6}$ = 9895,14
V (VAN) = 9895,14.

L'écart type :

σ(VAN) = √9895,14 = 99.47

Exercice 2 :

L'entreprise DECISE envisage de réaliser un investissement de 10000 DH d'une durée de vie de 3 ans. Le coût du capital est de 10 % les estimations des CAF d'exploitation issues de ce projet sont données en annexe.

TAV :

1)- Déterminer l'espérance mathématique et l'écart type de la distribution des CAF d'exploitation pour chacune des années.

2)- Déterminer l'espérance mathématique et l'écart type de la VAN sur la durée de vie du projet.

3)- Exprimer le risque du projet à l'aide du coefficient de variation de la VAN. Quelle est sa signification.

Annexe – Distribution de la probabilité des CAF d'exploitation :

Année 1 Probabilité	Année 1 CAF d'exploitation
0,3	4000
0,4	5000
0,3	6000

Année 2 Probabilité	Année 2 CAF d'exploitation
0,25	4000
0,5	6000
0,25	7000

Année 3 Probabilité	Année 3 CAF d'exploitation
0,2	2000
0,5	4000
0,3	8000

On fera l'hypothèse que les CAF d'exploitation d'une année sont indépendantes de celles des années précédentes.

Corrigé de l'exercice 2 :

1)- L'espérance mathématique de La VAN et l'écart type des CAF d'exploitation :

Année 1				
CAF d'exploitation	Probabilités	Pbté * CAF	(CAF) ²	(CAF) ²* Pbté
4000 5000 6000	0,30 0,40 0,30	1200 2000 1800	16000000 25000000 36000000	4800000 10000000 10800000
Total	1	E(Année1)=5000		25600000

V (CAF Année 1) = 25600000 – (5000)²

V (CAF Année 1) = 600000

Ecart type = 774.59

Année 2				
CAF d'exploitation	Probabilités	Pbté * CAF	(CAF) ²	(CAF) ²* Pbté
4000 6000	0,25 0,50	1000 3000	16000000 36000000	4000000 18000000

7000	0,25	1750	49000000	12250000
Total	1	E(Année2)=5750		34250000

V (CAF Année 2) = 34250000- (5750)²
V (CAF Année 2) = 1187500
Ecart type = 1089,72

Année 3				
CAF d'exploitation	Probabilités	Pbté * CAF	(CAF) ²	(CAF) ²* Pbté
2000 4000 8000	0,20 0,50 0,30	400 2000 2400	4000000 16000000 64000000	800000 8000000 19200000
Total	1	E(Année3)=4800		28000000

V (CAF Année 3)= 28000000-(4800)²
V (CAF Année 3)= 4960000
Ecart type = 2227,10.

2<u>)- l'espérance mathématique et l'écart type de la VAN sur la durée de vie du projet :</u>

<u>Espérance mathématique de la VAN :</u>

E (VAN) = -10000 + 5000 (1.10) – 1 + 5750 (1.10) – 2 + 4800 (1,10) – 3 = 2903,83.

E (VAN) = 2903,83

<u>Ecart type de la VAN:</u>

<u>**Variance:**</u>
V (VAN) = 600000 (1.1) – 2+ 1187500(1,1) – 4+4960000(1.1) – 6

V (VAN) = 4106736,94.

Ecart type :

σ(VAN) = √4106736,94 = 2026,51

Coefficient de variation de la VAN et sa signification :

CV (VAN) = σ(VAN) / E (VAN)
CV (VAN) = 2026,51 / 2903,83
CV (VAN) = 0,698.

Un projet est d'autant plus risqué que la distribution de la probabilité des profits est dispersée. Le coefficient de variation est donc une mesure du risque.

Exercice 3 :

Soit un projet dont les flux nets de trésorerie annuelle possible estimés comme suite : (chiffres en milliers de DHS)

- Année 1 = 20, 40, 60,80.
- Année 2 = 40, 60, 70,90.
- Année 3 = 30, 40, 60,80.

Avec des probabilités respectives de P1 = 20% ; P2 = 30% ; P3 = 30% ; P4 = 20%

Sachant que le montant de l'investissement et que le coût de capital est de 12 %

TAF :

1)- Déterminer l'espérance mathématique.

2)- Calculer la variance de la VAN.

Corrigé 3 :

1)- L'espérance mathématique :

Tableau 1 : Espérance mathématique pour l'année 1 :

Année 1		
Ri (en milliers de Dhs)	Pi	Pi Ri
20 40 60 80	0,20 0,30 0,30 0,20	4 12 18 16
		E (R_1) = 50

Tableau 2 : Espérance mathématique pour l'année 2 :

Année 2		
Ri (en milliers de Dhs)	Pi	Pi Ri
40	0,20	8

60 70 90	0,30 0,30 0,20	18 21 18
		E (R_2) = 65

Tableau 3 : Espérance mathématique pour l'année 3 :

Année 3		
Ri (en milliers de Dhs)	Pi	Pi Ri
30 40 60 80	0,20 0,30 0,30 0,20	6 12 18 16
		E (R_3) = 52

On obtient E (R1) = 50; E (R2) = 65; E (R3) = 52

On calcul l'espérance mathématique de la VAN:

E (VAN12 %) = - 100000 + 50 (1,12) – 1 + 65 (1,12) – 2 + 52 (1,12) – 3
E (VAN12 %) = -100000 + 44,65 + 51,805 + 37,024
E (VAN12 %) = + 33479

2)- Calcul de la variance et l'écart type de la VAN :

Soit V (R1) ; V (R2) ; V (R3).
Sachant que V (R)= Σ PiRi² - [E(R)] ²

Tableau 1 – pour l'année 1

Année 1		
Ri (en milliers de Dhs)	Pi	Pi Ri²
20 40 60 80	0,20 0,30 0,30 0,20	80 480 1080 1280
		V (R_1) = 2920

Tableau 2 – pour l’année 2

Année 2		
Ri (en milliers de Dhs)	Pi	Pi Ri²
40 60 70 90	0,20 0,30 0,30 0,20	320 1080 1470 1620
		V (R_2) = 4490

Tableau 3 – pour l’année 3

Année 3		
Ri (en milliers de Dhs)	Pi	Pi Ri²
30 40 60 80	0,20 0,30 0,30 0,20	180 480 1080 1280
		V (R_3) = 3020

On obtient V (R1) = 2920 – $(50)^2$= 480
V (R2) = 4490 – $(65)^2$= 265
V (R3) = 3020 – $(52)^2$= 316

V (VAN12%) = 480 (1,12) – 1 + 265 (1,12) – 2 + 316 (1,12) – 3
V (VAN12%) = 428.64 + 211,205 + 224,992
V (VAN12%) = 864,837

σ(VAN) = √VAN = √864,837 = 29,40
Entre deux ou plusieurs projets concurrents, on retient celui dont l’espérance mathématique de la VAN est la plus élevée et l’écart type de la VAN le plus faible.

Exercice 4 :

Votre entreprise compte lancer un nouveau produit. Compte tenu des études réalisées, deux marchés distincts A et B sont envisageables. Mais vous ne pouvez les occuper simultanément. L’estimation des bénéfices probables sur ces deux marchés est la suivante :

Marché A :

Bénéfice en milliers de Dhs Ri	Probabilités Pi
1	0,10
2	0,22
3	0,20
4	0,28
5	0,20

Marché B :

Bénéfice en milliers de Dhs Ri	Probabilités Pi
1	0,08
2	0,19
3	0,51
4	0,16
5	0,06

TAF :

Choisissez le marché le plus intéressant compte tenu de l’espérance mathématique, de la variance et de l’écart type.

Corrigé de l’exercice 4 :

Détermination l’espérance mathématique, de la variance et de l’écart type du marché A :

Ri (en milliers de Dhs)	Pi	Pi Ri	$PiRi^2$
1	0,10	0.10	0.10
2	0,22	0,44	0.88
3	0,20	0,60	1,8
4	0,28	1,12	4,84
5	0,20	1	5
		$E(R_1) = 3,26$	12,62

On obtient E (R1) = 3,26
V (R1) = 12.62 – $(3,26)^2$
V (R1) = 1,9924
σ(R1) = √ V (R1) = √1,9924 = 1,41

Détermination l'espérance mathématique, de la variance et de l'écart type du marché B :

Ri (en milliers de Dhs)	Pi	Pi Ri	$PiRi^2$
1	0,04	0,04	0,04
2	0,18	0,36	0,72
3	0,50	1,5	4,5
4	0,23	0,92	3,68
5	0,05	0,25	1,25
		E (R_2) = 3,07	10,19

On obtient E (R2) = 3,07
V (R2) = 10,19 – $(3,07)^2$
V (R2) = 0,7651
σ(R2) = √ V (R2) = √0,7651 = 0,87

Conclusion :

Le marché A a une espérance de bénéfice plus forte car son espérance mathématique est supérieur à celle du marché B,
E (R1) > E (R2), cependant ce marché (marché A) est le plus risqué car son écart type est supérieur au celui du marché B, σ(R1) > σ(R2).

Bibliographie :

Livres :

- « Gestion financière approfondie » Dr. Houria ZAAM.
- « gestion financière » P. VIZZAVONA, édition Foucher, Paris 1996.

- « le diagnostic financier » Laurent BATSCH, édition economica, paris 2000.

Sites :

- www.eco-gest.fr
- http://fr.wikipedia.org/wiki/VAN
- www.oboulo.com/choix-investissements.fr