

L'ATTRIBUTION DE PERFORMANCE EN GESTION DE PORTEFEUILLE : PROBLEMATIQUE, LIMITE ET EXTENSION

P. BERTRAND ¹ et P. ROUSSEAU ²

Version préliminaire, ne pas diffuser
Septembre 2001

Classification JEL : G11, G12.

Résumé :

Le marché français de la gestion d'actifs financiers pour compte de tiers figure parmi les leaders mondiaux. Il représente aujourd'hui près de 1 400 milliards d'Euros d'actifs. L'essor qu'a connu ce métier au cours des dernières années s'accompagne d'une demande accrue d'information de la part de la clientèle, notamment en matière de mesure de performance et, depuis peu, d'attribution de performance.

Un client peut légitimement se questionner sur les faits générateurs de la sur-performance du fonds dans lequel il est investi. Dès lors, il s'agit d'être capable, pour répondre à cette attente, de décomposer la sur-performance en ses principaux éléments constitutifs : c'est le rôle de ce qu'il est convenu d'appeler l'attribution de performance. Elle consiste en l'identification et en la quantification des différentes sources de la sur-performance obtenue.

L'objet de cet article est de reprendre la méthodologie de calcul de l'attribution de performance et de mettre l'accent sur certaines de ses limites. Nous proposons alors une extension originale de la méthode d'attribution de performance que nous avons nommée « l'écart de contribution au risque ». Elle vise à réintégrer dans le calcul de la sur-performance d'un fonds la dimension du risque.

¹ GREQAM et Faculté de Gestion, Université Montpellier 1. e-mail : bertrand@ehess.cnrs-mrs.fr.

² Directeur IAE Aix-en-Provence. e-mail : rousseau@univ-aix.fr

1. Introduction

Le marché français de la gestion d'actifs financiers pour compte de tiers figure parmi les leaders mondiaux. Il représente aujourd'hui près de 1 400 milliards d'Euros d'actifs dont 880 milliards d'Euros sous forme de gestion collective avec un total de plus de 10 000 OPCVM (SICAV et FCP). La différence est gérée sous forme de mandat et concerne la plupart du temps des clients institutionnels (compagnie d'assurance, caisse de retraite, ...). L'essor qu'a connu ce métier au cours des dernières années s'accompagne d'une demande accrue d'information de la part de la clientèle, notamment en matière de mesure de performance et, depuis peu, d'attribution de performance.

La performance globale d'un portefeuille est traditionnellement mesurée par rapport à un indice de marché de référence ³ qu'il soit pur ou composite ⁴. Il existe différentes mesures de performance ajustée du risque. Elles trouvent leur origine dans les deux modèles de référence de la théorie financière : le MEDAF (Modèle d'Equilibre des Actifs Financiers) et le MEA (Modèle d'Evaluation par Arbitrage).

La demande croissante d'information émanant de la clientèle, surtout institutionnelle, a rendu nécessaire de dépasser ces mesures globales de la performance. Un client peut légitimement se questionner sur les faits générateurs de la sur-performance⁵ du fonds dans lequel il est investi. Dès lors, il s'agit d'être capable, pour répondre à cette attente, de décomposer la surperformance en ses principaux éléments constitutifs : c'est le rôle de ce qu'il est convenu d'appeler l'attribution de performance. Elle consiste en l'identification et en la quantification des différentes sources de la sur-performance obtenue.

Remarquons que l'information délivrée par cette analyse est également riche d'enseignement pour le gérant de portefeuille ainsi que pour les différents intervenants du processus de gestion.

L'intérêt croissant que suscite l'attribution de performance dans le monde de la gestion financière a conduit les principaux acteurs de la place de Paris à créer un « Groupe de Recherche sur l'Attribution de Performance » dont les travaux préliminaires ont été consignés dans un rapport daté de mars 1997.

L'objet de cet article est de reprendre la méthodologie de calcul de l'attribution de performance, aujourd'hui largement utilisée par les institutions financières et les gestionnaires, et de mettre l'accent sur certaines de ses limites. Au moyen d'un exemple simple, nous montrerons comment cette méthode peut pénaliser certains choix rationnels effectués par un gérant. Afin de remédier à ce paradoxe apparent, nous proposons une extension originale de la méthode d'attribution de performance que nous avons nommée « l'écart de contribution au risque ».

³ Le terme anglo-saxon correspondant est « benchmark » et nous l'emploierons souvent par la suite.

⁴ Par exemple, un indice pur pourrait être le CAC 40 et un indice composite : 50 % CAC 40 + 50 % CNO.

⁵ Nous emploierons désormais le terme de sur-performance, mais lui permettons de prendre des valeurs inférieures ou égales à zéro (cas d'une sous performance).

Dans une première partie, nous présenterons la méthodologie d'attribution de performance en la positionnant par rapport à la mesure de performance. Dans une seconde et dernière partie, qui contient la contribution originale de notre travail, nous montrerons comment l'attribution de performance peut conduire à pénaliser certains choix rationnels et proposerons une mesure complémentaire qui permet de rendre justice aux choix effectués par le gérant.

2. L'attribution de performance

L'attribution de performance doit être clairement distinguée de la mesure de performance des fonds. La seconde démarche est très largement utilisée dans la littérature financière qu'elle soit à vocation pratique ou théorique. Elle vise à tenter d'identifier les gérants de fonds les plus performants par la simple lecture d'un classement. Ces classements sont réalisés sur la base de critères de performances plus ou moins sophistiqués notamment quant à la prise en considération du risque que le gérant fait supporter à son client pour atteindre un niveau de rentabilité. L'attribution de performance est véritablement un outil de gestion pour le gérant et (ou) son client qui souhaite identifier et expliquer les causes de la sur (sous)-performance obtenue par rapport à un portefeuille de référence.

Dans cette section nous proposons tout d'abord de distinguer très précisément la mesure et l'attribution de performance. Ensuite nous discuterons la méthodologie généralement mise en place, issue des travaux du « GRAP » en constatant que cette méthodologie s'inspire très étroitement des méthodes d'analyse d'écarts du contrôle de gestion.

2.1. *Mesure et attribution de performance*

La mesure de performance a pour objectif de classer les fonds. Elle doit être capable d'apprécier la capacité des gérants à ajouter de la valeur aux portefeuilles gérés. En effet, il existe toujours une alternative à un investissement dans un fonds géré de façon active : il suffit d'investir dans un fonds passif qui vise juste à répliquer le comportement en termes de rentabilité et de risque d'un indice de référence. L'incitation à investir dans un fonds actif trouve sa source dans l'espoir d'obtenir une rentabilité ajustée du risque supérieure à celle d'un fonds passif encore appelé fonds indiciel.

Le processus de mesure de performance ne nécessite pas de connaissance de l'évolution de la composition du fonds analysé. Il requiert simplement de disposer des séries chronologiques des valeurs liquidatives du fonds et de l'indice de référence auquel le fonds est comparé.

Trois mesures traditionnelles de performance⁶ ont été développées à la fin des années soixante. Il s'agit du ratio de Sharpe (1966) (le ratio d'information pouvant être vu comme une

⁶ Pour une présentation synthétique des mesures de performance, le lecteur intéressé pourra se reporter aux articles de Aftalion et Poncet (1991) et Gallais-Hamono et Grandin (1999).

extension de ce dernier⁷), du ratio de Treynor (1965) et de l'alpha de Jensen (1968). Ces mesures de performances sont toutes ajustées du risque, que ce soit le risque total ou le risque systématique.

Ces mesures de performance constituent une première étape primordiale dans l'évaluation de la qualité d'une gestion d'actifs financiers. Néanmoins, elles ne permettent pas d'identifier les sources de sur-performance d'un fonds. Cette information ne peut qu'être délivrée par un processus d'attribution de performance que nous traitons dans la partie suivante.

L'attribution de performance a pour but d'expliquer *a posteriori* la sur-performance d'un fonds d'actifs financiers par rapport à un objectif de gestion (i.e. un benchmark) défini *a priori* entre le client et le gestionnaire.

Une fois le portefeuille de référence (le benchmark) choisi, le processus de gestion peut être schématiquement décomposé en deux parties :

- **P'allocation d'actifs** : elle consiste à décider de la sur ou sous pondération des grandes classes d'actifs par rapport à leur poids dans le benchmark. Par exemple, si l'on considère un benchmark composite contenant 50 % de CNO et 50 % de SBF 120, la décision d'allocation d'actif consiste à se démarquer de cette pondération et à choisir par exemple 60 % de CNO et 40 % de SBF 120.
- **la sélection de titres** : le gérant sélectionne les titres de la classe d'actifs qui lui permettront de « battre » l'indice associé à cette classe. L'ensemble des titres susceptibles d'être choisis pour une classe est défini à l'avance. La solution la plus simple et la plus cohérente consiste à considérer les titres de l'indice, par exemple les actions retenues dans le calcul de l'indice SBF 120.

L'attribution de performance s'applique en principe à tout type de fonds : actions, actions et obligations, diversifiés (actions, obligations et monétaires), que ces actifs soient nationaux ou internationaux. Néanmoins, des difficultés pratiques peuvent survenir en ce qui concerne les obligations pour lesquelles la gestion s'effectue principalement en sensibilité ou en durée⁸

Notons également que nous ne pouvons pas tenir compte, du moins dans une première approche, des actifs dérivés en raison de l'asymétrie qu'ils introduisent dans les distributions des rentabilités des portefeuilles.

Nous allons présenter maintenant une méthode de calcul de la sur-performance telle qu'elle a pu être établie notamment par le GRAP, Groupe de Recherche sur l'Attribution de Performance, (1997).

Nous considérerons un portefeuille, noté p , et un benchmark, noté b , composés de n classes d'actifs indexées par $i=1, \dots, n$.

Nous adopterons les notations suivantes :

⁷ Le lecteur intéressé par le ratio d'information et par l'optimisation de portefeuille sous contrainte de « tracking-error » pourra se reporter à Bertrand, Prigent et Sobotka (2001).

⁸ Rappelons que la durée et la sensibilité sont des mesures de risque qui s'appliquent aux titres financiers à taux d'intérêt fixes et qui sont d'un usage courant dans la gestion obligataire.

w_{p_i} : le poids de la classe i dans le portefeuille,
 w_{b_i} : le poids de la classe i dans le benchmark,
 R_{p_i} : la rentabilité sur la période étudiée de la classe d'actifs i du portefeuille,
 R_{b_i} : la rentabilité sur la période étudiée de la classe d'actifs i du benchmark,
 R_b : la rentabilité moyenne du benchmark sur la période étudiée.

Avec ces notations, la sur-performance globale du portefeuille par rapport au benchmark s'écrit simplement :

$$S = R_p - R_b = \sum_{i=1}^n (w_{p_i} R_{p_i} - w_{b_i} R_{b_i}) \quad (7)$$

Il s'agit dès lors de la décomposer en ses principales sources correspondant au processus de gestion, à savoir : l'allocation d'actifs et la sélection de titres. Nous verrons qu'il sera nécessaire de rajouter un terme d'interaction pour assurer l'égalité avec la formule ci-dessus.

2.2. Calcul de l'effet d'allocation

Lorsque l'on cherche à expliquer l'origine de la sur-performance, un problème se pose pour l'étude de l'effet d'allocation au niveau d'une classe particulière. En effet, la surpondération (respectivement la souspondération) d'une classe du portefeuille conduit mécaniquement à la souspondération (respectivement la surpondération) d'au moins une autre classe.

En première approche, on pourrait penser calculer la sur-performance de la classe i par :

$$(w_{p_i} - w_{b_i}) R_{b_i} \quad (8)$$

L'exemple présenté dans le tableau 1 permet de comprendre que cette mesure ne répond pas à l'objectif recherché.

Tableau 1 : Exemple d'attribution de performance sur un portefeuille composé de 3 classes.

Classe	w_{p_i}	w_{b_i}	R_{b_i}	$(w_{p_i} - w_{b_i}) R_{b_i}$
1	25%	15%	8%	0.8%
2	40%	45%	10%	-0.5%
3	35%	40%	12%	-0.6%
Total	100%	100%	$R_b = 10,50\%$	-0.3%

La lecture de la dernière colonne du tableau 1 nous conduit à penser que la décision de surpondérer la classe d'actifs 1 a été judicieuse et que l'origine de la sous performance globale du portefeuille se trouve dans la décision de sous-pondérer les classes d'actifs 2 et 3. Néanmoins, en y regardant de plus près, on constate que le gérant a sur-pondéré une classe dont la rentabilité est inférieure à la rentabilité moyenne du benchmark (8 % contre 10,5 %). Ce choix ne peut pas être récompensé. Cette approche n'est donc pas pertinente.

Lorsque l'on s'intéresse à la contribution de l'allocation à la sur-performance, il faudra donc tenir compte de l'écart de rentabilité de la classe par rapport à la rentabilité moyenne du benchmark. La contribution de l'allocation de la classe i à la sur-performance s'écrit alors :

$$A_i = (wp_i - wb_i)(Rb_i - Rb) \quad (9)$$

Les différentes situations possibles sont illustrées dans le tableau 2.

Tableau 2 : Critères de décision d'allocation

	Sur-performance de la classe i : $(Rb_i - Rb) > 0$	Sous-performance de la classe i : $(Rb_i - Rb) < 0$
Sur-pondération de la classe i : $(wp_i - wb_i) > 0$	Bonne décision $(wp_i - wb_i)(Rb_i - Rb) > 0$	Mauvaise décision $(wp_i - wb_i)(Rb_i - Rb) < 0$
Sous-pondération de la classe i : $(wp_i - wb_i) < 0$	Mauvaise décision $(wp_i - wb_i)(Rb_i - Rb) < 0$	Bonne décision $(wp_i - wb_i)(Rb_i - Rb) > 0$

En appliquant cette méthode à l'exemple précédent, on obtient le tableau 3.

Tableau 3 : Exemple d'attribution de performances sur la base d'un critère pertinent d'allocation.

Classe	wp_i	wb_i	Rb_i	$(wp_i - wb_i)(Rb_i - Rb)$
1	25%	15%	8%	-0.25%
2	40%	45%	10%	0.03%
3	35%	40%	12%	-0.08%
Total	100%	100%	$Rb=10,50\%$	-0.30%

Nous remarquons alors que la sous-performance du portefeuille par rapport au benchmark est principalement due au choix de surpondérer la classe 1, ce qui nous a paru de bon sens dès la lecture du premier tableau. Par ailleurs, la sous-performance globale est la même que précédemment (-0,3 %). Ceci provient de ce que $\sum_{i=1}^n (wp_i - wb_i)Rb = 0$ (puisque $\sum_{i=1}^n wp_i = \sum_{i=1}^n wb_i = 1$).

2.3. Calcul de l'effet de sélection de titres

Le calcul de cet effet pose moins de problème que le précédent. La contribution à la sur-performance globale du choix de titres à l'intérieur de chaque classe nous est donnée par :

$$C_i = wb_i(Rp_i - Rb_i) \quad (10)$$

Il correspond au produit du poids de la classe i du benchmark et de la différence entre la rentabilité de la classe i du portefeuille et celle de la classe i du benchmark. Le choix du poids de la classe i du benchmark s'impose si l'on ne veut pas interférer avec le calcul de l'effet d'allocation.

La différence $(Rp_i - Rb_i)$ est non nulle dès lors que la pondération (effectuée par le gérant) des titres composant la classe d'actifs i diffère de celle du benchmark⁹. Elle permet donc bien de mesurer l'effet de sélection de titres.

2.4. Le terme d'interaction

Il est aisé de vérifier que la somme des deux effets précédents ne permet pas de retrouver la sur-performance totale de la classe i , S . Pour assurer l'égalité, il est nécessaire de rajouter un terme dit d'interaction qui a pour expression :

$$I_i = (wp_i - wb_i)(Rp_i - Rb_i) \quad (11)$$

Il peut s'interpréter comme la part d'excès de rentabilité expliquée par le croisement des deux effets précédents. On peut, aussi le définir comme un prolongement de l'effet de sélection de titres : ce serait la sélection de titres sur la partie sur ou sous-pondérée de la classe i .

Ce terme ne doit cependant pas être simplement assimilé à un résidu puisqu'il permet de vérifier la cohérence des décisions prises par le gérant notamment au regard du signe. On constate en effet que le signe de ce terme d'interaction sera positif si l'on a décidé de sur(sous)-pondérer une classe d'actif qui sur(sous)-performe le benchmark.

D'un point de vue global, on peut aisément vérifier que l'on obtient bien :

$$S = \sum_{i=1}^n (wp_i Rp_i - wb_i Rb_i) = \sum_{i=1}^n A_i + C_i + I_i \quad (12)$$

Ce résultat est tout à fait traditionnel dans les méthodes d'analyse d'écart.

2.5. Un exemple

Nous allons illustrer la démarche d'attribution de performance au moyen d'un exemple. Considérons un fonds dont l'indice composite de référence est : 35 % Actions France ; 50 % Obligations France ; 15 % Actions Europe¹⁰. Nous allons supposer que la gestion est évaluée sur une année et que les poids des classes d'actifs dans le portefeuille géré résultent d'une décision stratégique qui n'a pas été modifiée au cours de l'année. Si ce n'était pas le cas, il faudrait calculer un poids moyen sur l'année par classe d'actifs ou effectuer l'analyse sur une sous-période durant laquelle les poids n'ont pas été modifiés.

Les rentabilités obtenues pour chacune des trois classes dans le portefeuille géré permettront de mesurer l'effet sélection de titres.

Les résultats apparaissent dans les tableaux 4 et 5.

⁹ Il peut se produire que cette différence soit nulle alors que le gérant n'a pas répliqué la composition de la classe d'actifs i . Dans ce cas, ses choix de sélection de titres n'ont pas contribué à la sur-performance de son portefeuille et l'on retrouve bien que le terme de sélection de titres est nul.

¹⁰ La France a été exclue de l'indice Actions Europe.

Tableau 4 : Présentation des données de l'exemple.

	Poids dans le portefeuille	Poids dans le benchmark	Rentabilité de La classe i dans le portefeuille	Rentabilité de la classe i dans le benchmark
Classe	w_{pi}	w_{bi}	R_{pi}	R_{bi}
Actions France	40%	35%	13.0%	12.0%
Obligations France	40%	50%	6.75%	7.0%
Actions Europe	20%	15%	11.0%	11.0%
Total	100%	100%	R _b = 9,35%	

Tableau 5 : Application de la méthodologie d'attribution de performance.

	Mesure de l'effet Allocation	Mesure de l'effet de sélection de titres	Mesure de l'effet d'interaction
Classe	(w_{pi}-w_{bi})(R_{bi}-R_b)	w_{bi}(R_{pi}-R_{bi})	(w_{pi}-w_{bi})(R_{pi}-R_{bi})
Actions France	0.13%	0.35%	0.05%
Obligations France	0.24%	-0.13%	0.03%
Actions Europe	0.08%	0.00%	0.00%
Total	0.45%	0.23%	0.075%

Le benchmark et le portefeuille exhibent respectivement sur l'année une rentabilité de 9,35 % et 10,10 %.

Cette sur-performance se décompose en 0,45 % d'effet allocation, 0,23 % d'effet sélection de titres et 0,075 % dû à l'interaction des deux effets précédents.

2.6. Conclusion

Nous venons de présenter la méthode traditionnelle d'attribution de performance telle que la préconise notamment le GRAP. Dans la partie suivante, nous proposons une vision critique de cette démarche et mettons l'accent sur certaines insuffisances : l'absence de prise en compte du risque.

3. Limites de l'attribution de performance et mesure de l'écart de la contribution au risque

A notre connaissance, les travaux portant sur l'attribution de performance, et notamment ceux du GRAP, n'intègrent pas la dimension risquée des placements financiers. Or, les enseignements de la théorie financière ont permis d'explicitier la liaison théorique qui existe entre espérance de rentabilité et risque des actifs financiers. De plus, la pratique actuelle de la gestion de portefeuille démontre que ces enseignements ont été assimilés par les professionnels.

Dans cette partie, nous montrons que la non prise en compte du risque biaise l'interprétation des résultats de l'attribution de performance et nous proposons une mesure complémentaire simple qui permet d'étendre l'analyse à l'attribution de risque.

3.1. Limites de l'attribution de performance

La méthode d'attribution de performance telle que nous l'avons présentée dans le paragraphe précédent possède une faiblesse intrinsèque. En effet, elle ne tient pas compte du risque des placements financiers. Nous avons vu que les mesures de performance sont toujours corrigées du risque du portefeuille ou du risque relatif du portefeuille par rapport au benchmark.

Afin de mettre en évidence le biais que peut entraîner l'absence de prise en compte du risque, nous allons considérer un exemple simple qui se place dans un cas idéal afin de montrer qu'une décision prise de manière optimale dans un univers rentabilité-risque peut aboutir à une attribution de performance négative selon la méthode traditionnelle présentée précédemment.

Plaçons-nous du point de vue d'un gérant qui construit son portefeuille en utilisant les résultats de la théorie des choix de portefeuille de Markowitz (1952). Son processus de décision intègre donc non seulement les rentabilités anticipées mais également la structure de risque et de corrélation des composantes de son portefeuille.

Considérons un benchmark actions monde ¹¹ et intéressons-nous uniquement à l'effet d'allocation (i.e. pour toute classe i , $Rp_i = Rb_i$). Nous supposons que ce benchmark n'est pas moyenne-variance efficace, ce qui correspond au cas général comme l'a montré Grinold (1992), puisque le système de pondération qui sous-tend leur construction ne résulte pas d'un processus d'optimisation et que leur capacité à rendre compte du portefeuille de marché n'est pas pertinente.

Nous ferons l'hypothèse que les prévisions du gérant sur la distribution de probabilité des rentabilités des différentes classes d'actifs sont parfaites. Remarquons que l'on ne suppose pas que le gérant est capable de prévoir les rentabilités des titres financiers mais simplement les deux premiers moments de leur distribution.

Rappelons que dans notre contexte, en l'absence d'actif sans risque, la frontière efficace des portefeuilles est une branche d'hyperbole. Le gérant doit sélectionner un portefeuille efficace sur cette dernière en fonction de son aversion au risque (ou de celle de son client) qui est réduite dans ce contexte à une « aversion à la variance ». Cette situation est représentée sur le graphique 1 sur lequel on a porté en abscisse l'écart type de la rentabilité (i.e. le risque) et en ordonnée la rentabilité anticipée.

Nous retiendrons alors comme portefeuille optimal ¹² de la frontière efficace choisi par le gérant celui de même risque que le benchmark mais qui maximise l'espérance de rendement ¹³ (i.e. le portefeuille 1 d'espérance de rentabilité égale à 8,49 % et de volatilité égale à 15,57 %). On considère donc la situation dans laquelle le gérant cherche à sur-performer son benchmark tout en maîtrisant son risque.

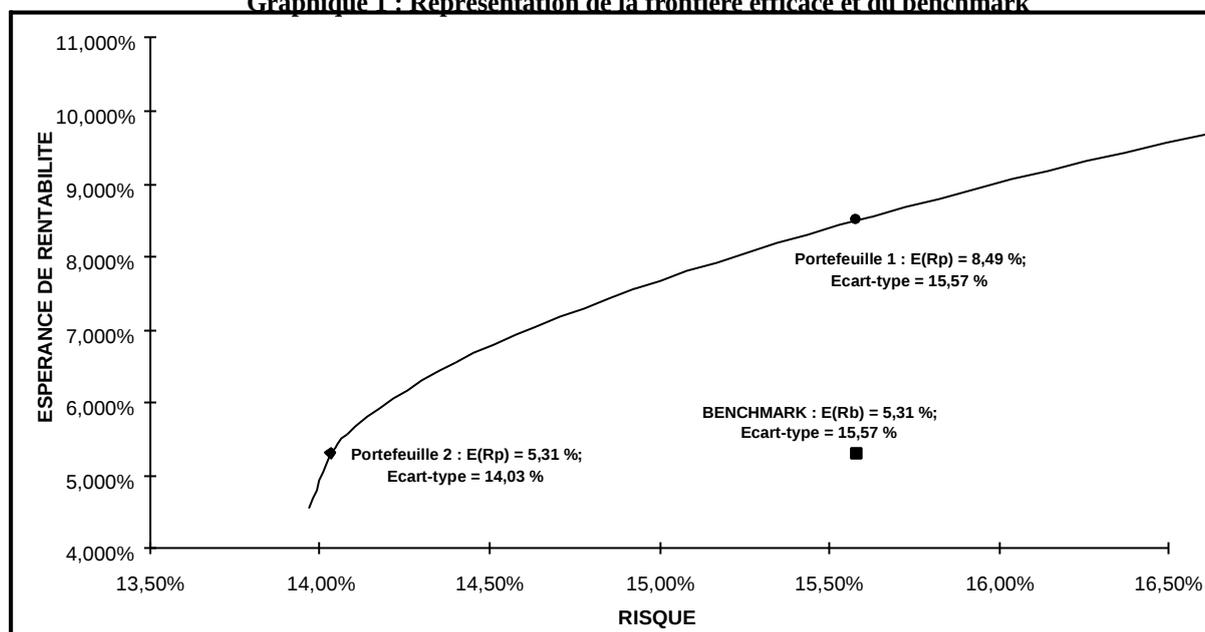
¹¹ Nous avons utilisé des historiques de données MSCI (Morgan Stanley).

¹² Par souci de simplicité, nous avons effectué une optimisation libre qui laisse la possibilité de poids négatifs. Cela ne modifie en rien les conclusions obtenues.

¹³ Nous rappelons en annexe la forme et la solution du programme d'optimisation quadratique résolu par H. Markowitz.

Nous présentons, en annexe, l'attribution de performance et de risque pour le portefeuille 2 de même rentabilité espérée que le benchmark mais qui minimise le risque. Un gérant pourrait être amené à effectuer un tel choix lorsque lui-même ou son client éprouve des craintes sur l'avenir.

Graphique 1 : Représentation de la frontière efficace et du benchmark



Nous allons maintenant montrer que même dans ce cas idéal dans lequel le gérant choisi son portefeuille de manière optimale compte tenu de l'information dont il dispose, les résultats délivrés par l'attribution de performance ne seraient pas parfaits.

Le tableau 6 détaille le processus d'attribution de performance¹⁴ en ce qui concerne l'effet d'allocation qui est étudié ici.

Tableau 6 : Attribution de performance du portefeuille 1

	Rentabilités anticipées	ponds du portefeuille : wpi	ponds du benchmark : wbi	écart de poids : wpi-wbi	écart de rentabilité : Rbi-Rb	Sur performance : (wpi-wbi)(Rbi-Rb)
Euro Land	4.89%	11.60%	15.58%	-3.97%	-0.43%	0.017%
Australie	4.06%	-1.78%	1.29%	-3.07%	-1.25%	0.038%
Canada	6.47%	7.02%	2.56%	4.46%	1.16%	0.052%
France	4.60%	-8.13%	4.51%	-12.63%	-0.72%	0.090%
HongKong	4.06%	-11.99%	1.09%	-13.09%	-1.25%	0.164%
Japon	-2.34%	-0.56%	11.22%	-11.78%	-7.65%	0.901%
Royaume Uni	8.46%	84.38%	11.05%	73.33%	3.14%	2.304%
Etats Unis	6.47%	19.45%	52.70%	-33.26%	1.16%	-0.385%
		100.00%	100.00%	0.00%	Rb=5.31%	3.182%

Les poids des huit classes dans le benchmark sont ceux calculés par MSCI. Ils sont proportionnels à la capitalisation de chacun des marchés dans l'indice MSCI monde.

¹⁴ La France a été exclue de l'indice Euro Land pour éviter toute redondance.

Nous avons simplement utilisé des estimations¹⁵ naïves sur données historiques pour les anticipations sur les rentabilités des indices des différents pays ainsi que sur la matrice des variances-covariances de ces mêmes rentabilités. La nature des conclusions obtenues plus loin ne dépend en aucune façon de ces anticipations.

Le portefeuille optimal a été obtenu comme indiqué précédemment. Remarquons que le Royaume-Uni est très fortement sur-pondéré dans le portefeuille. Ceci provient de ce que cette classe bénéficie de l'anticipation de rentabilités la plus élevée et du risque le plus faible. A l'opposé, les Etats-Unis sont très fortement sous-pondérés dans le portefeuille. Cette caractéristique est principalement due à l'écart d'anticipation de rentabilité et de risque¹⁶ entre les Etats-Unis et le Royaume-Uni.

L'effet d'allocation qui se lit sur la dernière colonne du tableau 6, pénalise le choix de sous-pondérer les Etats-Unis. Remarquons d'ailleurs que c'est la seule décision du gérant qui est critiquée par la méthode d'attribution de performance.

Etant donné que le gérant formule des anticipations parfaites sur les deux premiers moments de la distribution des rentabilités et qu'il a eu recours à une optimisation quadratique de type Markowitz, on peut s'étonner des résultats délivrés par l'attribution de performance qui expriment le fait que les Etats-Unis ont été sous-pondérés par rapport au benchmark alors que cette classe d'actif permet d'engendrer une rentabilité supérieure à la moyenne.

En fait, ces résultats ne sont paradoxaux qu'en apparence et ne contredisent pas l'optimalité des décisions du gérant. En effet, l'attribution de performance n'est que partielle puisqu'elle ne prend pas en compte le risque du portefeuille géré par rapport à celui du benchmark. Par conséquent, elle ne remet pas en cause la stratégie d'allocation du gérant ou si l'on veut considérer qu'elle la remet en cause, ce n'est que sur la base des performances.

En effet, la classe Royaume-Uni offre un excès de rentabilité important par rapport à la rentabilité espérée du benchmark et l'attribution de performance valorise fortement la décision de sur-pondérer cette classe. Peut-on mettre en cause la décision du gérant de sous-pondérer les Etats-Unis qui offre également un excès de rentabilité, certes plus faible, mais positif. Certainement non car sa décision est optimale par construction. Dès lors la justification de cette décision réside dans le processus d'optimisation et notamment dans la prise en considération du risque des différentes classes d'actifs ou plus exactement de la contribution au risque des portefeuilles constitués de chaque classe.

Nous pouvons donner de manière intuitive un bref aperçu du processus d'optimisation. Tout d'abord, l'actif dominant est la classe Royaume-Uni avec une rentabilité espérée de 8,41% et un

¹⁵ Dans la réalité, il est fort peu vraisemblable que des estimations historiques soient utilisées pour formuler des anticipations de rentabilités. Ces estimations constituent néanmoins souvent un point de départ utile. En revanche, le recours à des estimations est beaucoup plus courant en ce qui concerne la matrice des variances-covariances.

¹⁶ Pour les données concernant le risque, le lecteur trouvera plus loin dans le texte la matrice des écart-types et des corrélations et, en annexe, la matrice des variances-covariances.

risque mesuré par l'écart type égal à 16,14%. Une stratégie naïve consisterait donc à placer 100% du portefeuille dans cet actif. Toutefois cette allocation n'est pas optimale puisque la solution retenue dans le portefeuille 1 permet d'atteindre une rentabilité espérée de 8,49% avec un risque de 15,57% donc une rentabilité espérée supérieure pour un risque plus faible traduisant bien le caractère efficace du portefeuille retenu. Pour atteindre ce résultat, le processus d'optimisation a consisté à identifier les autres classes d'actifs les plus performantes en termes de rentabilité espérée (Canada et Etats-Unis notamment) et à les introduire dans le portefeuille efficace en choisissant ceux qui auront une contribution la plus faible possible au risque du portefeuille ainsi construit. Ces classes seront celles qui sont les moins fortement corrélées avec les autres classes déjà introduites dans le portefeuille ou dont le risque est faible. Ceci explique le poids positif accordé à la classe Euroland dans le portefeuille 1 dont l'écart type est le plus faible après la classe Royaume-Uni.

3.2. L'écart de contribution au risque

Pour être capable d'évaluer exhaustivement la stratégie du gérant dans notre contexte, il semble nécessaire d'adjoindre à l'analyse de la contribution de chaque classe d'actifs à la sur-performance globale du portefeuille une analyse équivalente en terme de risque.

Le tableau 7 représente la matrice des écart-types corrélations qui contient sur la diagonale les volatilités, les autres éléments représentant les corrélations :

Tableau 7 : Matrice et écart types et coefficients de corrélation des classes d'actifs

MATRICE DES ECARTS TYPES CORRELATIONS								
	Euro Land	Australie	Canada	France	Hong Kong	Japon	Royaume-Uni	Etats-Unis
Euro Land	16,60%							
Australie	0,59	17,84%						
Canada	0,72	0,66	18,54%					
France	0,90	0,51	0,65	19,04%				
Hong Kong	0,56	0,58	0,52	0,49	32,49%			
Japon	0,38	0,34	0,29	0,34	0,38	23,06%		
Royaume-Uni	0,75	0,72	0,69	0,66	0,53	0,35	16,14%	
Etats-Unis	0,75	0,63	0,86	0,68	0,50	0,33	0,68	18,13%

Nous proposons de mesurer l'écart entre la contribution de la poche i au risque du portefeuille et la contribution de la poche i au risque du benchmark.

Dans ce but, nous introduisons les nouvelles notations suivantes :

σ_i : la volatilité de la rentabilité de la classe d'actifs i .

σ_{ij} : la covariance des rentabilités des classes d'actifs i et j .

σ_b : la volatilité de la rentabilité du benchmark.

σ_p : la volatilité de la rentabilité du portefeuille.

Rappelons que les expressions pour le risque total du portefeuille et du benchmark sont données par :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_p w_p \cdot \sigma_{ij} \quad \text{et} \quad \sigma_b^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_b w_b \cdot \sigma_{ij} \quad (13)$$

Chaque classe d'actifs à l'intérieur du portefeuille ou du benchmark contribue au risque total à hauteur de sa variance, $\sigma_i^2 = \sigma_{ii}$, et de ses termes de covariances avec toutes les autres classes d'actifs, σ_{ij} pour tout $i \neq j$. Ces termes sont évidemment pondérés par les poids respectifs de chacune des classes d'actifs à l'intérieur du portefeuille ou du benchmark.

Dès lors, on peut appréhender la contribution de chaque classe d'actifs au risque total du portefeuille ou du benchmark de deux façons différentes : soit en terme absolu, soit en terme marginal.

La contribution absolue peut être définie comme la part de la variance totale du portefeuille ou du benchmark due à la classe i . Le problème est que les termes de covariance prennent en compte simultanément la part du risque total due aux deux classes d'actifs correspondantes. On décide donc d'affecter pour moitié le terme de covariance aux classes d'actifs i et j . On obtient donc, à partir de (13), que la contribution de la classe i au risque total du portefeuille est :

$$wp_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{j \neq i} wp_i wp_j \cdot \sigma_{ij} \quad (14)$$

L'expression pour la contribution de la classe i au risque total du benchmark est analogue : $wb_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{j \neq i} wb_i wb_j \cdot \sigma_{ij}$.

On peut alors définir pour chaque classe i , l'écart de la contribution absolue au risque (ECAR) par :

$$ECAR_i = \frac{\left(wp_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{j \neq i} wp_i \cdot wp_j \cdot \sigma_{ij} \right) - \left(wb_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{j \neq i} wb_i \cdot wb_j \cdot \sigma_{ij} \right)}{\sigma_b^2} \quad (15)$$

Nous avons décidé de normaliser le numérateur de (15) par la variance de la rentabilité du benchmark.

Alternativement, la contribution marginale de la classe d'actifs i au risque total du portefeuille ou du benchmark se définit par :

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial wp_i} = 2\sigma_{ip} \quad (16)$$

On retrouve un résultat classique de la théorie du choix de portefeuille dont la preuve est rappelée en annexe.

L'interprétation est différente de la précédente, (16) est une mesure de la variation de la variance de la rentabilité du portefeuille engendrée par une variation infinitésimale du poids de la classe i dans le portefeuille. Cette mesure dépend du point, wp en lequel elle est évaluée.

On peut également définir pour chaque classe i , l'écart de la contribution marginale au risque total (ECMR) par :

$$ECMR = 2(\sigma_{ip} - \sigma_{ib}) \quad (17)$$

Si l'on reprend l'exemple précédent et que l'on applique ces deux nouvelles mesures, on obtient¹⁷ le tableau 8.

Tableau 8 : Ecart de contribution au risque.

	ECAR	ECMR
Euro Land	-4.92%	-0.52%
Australie	-2.42%	-0.12%
Canada	3.69%	-0.61%
France	-10.90%	-0.78%
HongKong	-10.71%	-2.29%
Janon	-8.81%	-1.46%
Royaume-Uni	75.14%	0.86%
Etats-Unis	-41.06%	-1.03%
Somme	0.00%	

Si l'on se réfère à l'ECAR, on constate que les Etats-Unis contribuent négativement, et avec la plus grande ampleur, à l'écart de risque par rapport au benchmark.

A l'opposé, le Royaume-Uni, qui contribuait le plus à la sur-performance, exhibe également la plus forte contribution au risque.

Il résulte des observations précédentes que le choix de sous-pondérer les Etats-Unis retrouve sa totale légitimité. La prise en compte de l'écart de contribution absolue au risque permet de comprendre et justifier un choix qui, sur la seule base de l'attribution de sur-performance, se trouvait pénalisé.

Les résultats délivrés par l'écart de la contribution marginale au risque total diffèrent quelque peu des précédents. Les Etats-Unis contribuent négativement à l'ECMR et le Royaume-Uni est la seule classe à contribuer positivement à l'ECMR. Néanmoins, Hongkong contribue plus fortement, en valeur absolue, que les Etats-Unis. Ceci est dû à la combinaison de deux éléments : le raisonnement s'effectue à la marge et Hongkong, la classe d'actifs la plus risquée, est largement sous-pondérée.

Il nous semble que l'ECAR procure une meilleure mesure du différentiel de contribution au risque entre un portefeuille et un benchmark. En effet, il tient compte de l'écart de contribution au risque d'une classe d'actifs à l'ensemble du portefeuille et du benchmark. C'est bien l'information que nous recherchons. Partant des poids du portefeuille et du benchmark, l'ECMR analyse l'effet d'une modification marginale du poids d'une classe sur l'écart de risque.

¹⁷ Le fait que la somme des ECAR soit égale à 0 provient de ce que la volatilité du portefeuille est égale à celle du benchmark.

On constate finalement que l'ECAR est une mesure parfaitement corrélée à l'écart de poids indiqué dans le tableau 6. Ceci confirme bien l'importance de la contribution au risque dans la construction des portefeuilles optimaux et donc la nécessité de prendre en considération un tel critère pour tenter d'apprécier la performance des gérants dans leur décision d'allocation

4. Conclusion

Le métier de la gestion d'actifs pour compte de tiers connaît en France depuis une dizaine d'années des mutations profondes. La demande croissante d'information de la part de la clientèle a entraîné le développement de l'analyse de la performance des fonds gérés. Les sociétés de gestion d'actifs ainsi que les sociétés spécialisées dans la mesure de performance¹⁸ ont tout d'abord proposé des mesures globales de performance.

Depuis quelques années, la réflexion s'est orientée vers des méthodes capables de disséquer l'origine de la sur-performance d'un fonds. La place de Paris a créé un groupe de travail sur le sujet, le GRAP. Ces travaux ont débouché sur ce qu'il convient d'appeler une méthode d'attribution de performance.

Néanmoins, la méthodologie d'attribution de performance néglige le risque des placements financiers. Nous avons pu montrer que cette caractéristique peut entraîner des conclusions erronées.

Nous avons donc proposé deux mesures complémentaires qui permettent d'évaluer l'écart de contribution absolu ou marginal entre le risque du portefeuille et celui du benchmark. Nous avons également montré que l'écart de contribution absolu, que nous avons appelé ECAR, répond plus précisément au problème posé. Il permet de dépasser le paradoxe apparent qui naîtrait d'une seule attribution de performance. L'utilisation de cette mesure permet une compréhension beaucoup plus fine des décisions d'un gérant de portefeuille.

Pour conclure, remarquons que la mise en place opérationnelle d'un calcul de l'ECAR n'est pas très coûteuse.

¹⁸ Citons, par exemple, MICROPAL et Standards and Poor's

BIBLIOGRAPHIE

- (1) Aftalion, F. et Poncet, P., « Les mesures de performances des OPCVM », *La Revue Banque*, n°517, juin 1991.
- (2) Bertrand, P, Prigent, J.L. et Sobotka, R, « Optimisation de portefeuille sous contrainte de variance de la tracking-error », *Banque & Marchés*, septembre-octobre 2001.
- (3) Gallais-Hamono, G. et Grandin, P., « Les mesures de performances », *Banque & Marchés*, n° 42, sept-oct 1999.
- (4) Groupe de Recherche sur l'Attribution de Performance, « Premier document de synthèse », Paris, mars 1997.
- (5) Grinold, RC, « Are Benchmark Portfolios Efficient ? », *Journal of Portfolio Management*, Vol. 19, p 34-40, 1992.
- (6) Jensen, M., « The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-64», *Journal of Finance*, Vol. 23, 1968.
- (7) Markowitz, H.M., « Portfolio Selection », *Journal of Finance*, vol. 7, 1952.
- (8) Markowitz, H.M., « Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investment », New York : John Wiley & Sons, 1959.
- (9) Roll, R., « A Mean/Variance Analysis of Tracking Error », *The Journal of Portfolio Management*, Summer 1992.
- (10) Sharpe, W., « The Sharpe Ratio », *The Journal of Portfolio Management*, 1994.
- (11) Sharpe, W., « Mutual Fund Performance », *Journal of Business*, vol. 39, 1966.
- (12) Treynor, J., « How to Rate Management of Invested Funds », *Harvard Business Review*, vol. 44, 1965.

ANNEXE

1. Contribution marginale de la classe i au risque total du portefeuille.

A partir de l'expression de la variance du portefeuille donnée par (13), la dérivée partielle de cette variance par rapport au poids de la classe i s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial w p_i} = 2 \sum_{j=1}^n w p_j \sigma_{ij}$$

Or d'après une propriété de la covariance, on a :

$$\sum_{j=1}^n w p_j \sigma_{ij} = \sum_{j=1}^n w p_j \text{Cov}(R_i, R_j) = \text{Cov}(R_i, \sum_{j=1}^n w p_j \cdot R_j) = \text{Cov}(R_i, R_p) = \sigma_{ip}$$

Ce qui prouve le résultat recherché.

2. Compléments à l'exemple

Nous appliquons l'attribution de performance et de risque au portefeuille 2 de la frontière efficace en reprenant dans le tableau A-1 la matrice de variances-covariances.

Tableau A-1 : Matrice de variances-covariances.

MATRICE DE VARIANCES-COVARIANCES								
	Euro Land	Australie	Canada	France	Hong Kong	Japon	Royaume-Uni	Etats-Unis
Euro Land	2,76%	1,76%	2,23%	2,85%	3,01%	1,47%	2,02%	2,26%
Australie	1,76%	3,18%	2,18%	1,73%	3,37%	1,41%	2,07%	2,05%
Canada	2,23%	2,18%	3,44%	2,29%	3,15%	1,25%	2,05%	2,89%
France	2,85%	1,73%	2,29%	3,63%	3,03%	1,50%	2,02%	2,33%
Hong Kong	3,01%	3,37%	3,15%	3,03%	10,56%	2,87%	2,76%	2,96%
Japon	1,47%	1,41%	1,25%	1,50%	2,87%	5,32%	1,32%	1,38%
Royaume-Uni	2,02%	2,07%	2,05%	2,02%	2,76%	1,32%	2,61%	1,98%
Etats-Unis	2,26%	2,05%	2,89%	2,33%	2,96%	1,38%	1,98%	3,29%

Tableau A-2 : Résultats de l'analyse de l'attribution de performance pour le portefeuille 2

	Rentabilités anticipées	poids du portefeuille : wpi	poids du benchmark : wbi	écart de poids wpi-wbi	écart de rentabilité Rpi-Rb	Sur performance : (wpi-wbi)(Rpi-Rb)
Euro Land	4.89%	30.37%	15.58%	14.79%	-0.43%	-0.063%
Australie	4.06%	20.08%	1.29%	18.79%	-1.25%	-0.235%
Canada	6.47%	6.02%	2.56%	3.46%	1.16%	0.040%
France	4.60%	-5.33%	4.51%	-9.83%	-0.72%	0.070%
Hong Kong	4.06%	-13.67%	1.09%	-14.77%	-1.25%	0.185%
Japon	-2.34%	15.70%	11.22%	4.48%	-7.65%	-0.343%
Royaume Uni	8.46%	38.34%	11.05%	27.29%	3.14%	0.858%
Etats Unis	6.47%	8.49%	52.70%	-44.21%	1.16%	-0.512%
		100.00%	100.00%	0.00%	15.58%	0.000%

A la lecture de la dernière colonne du tableau A-2, nous constatons que le Royaume-Uni contribue toujours le plus fortement à la sur-performance et que les Etats-Unis contribuent le plus fortement à la sous-performance. Le total est nul puisque le portefeuille 2 a la même espérance de rentabilité que le benchmark.

Tableau A-3 : Ecart de contribution au risque.

	ECAR	ECMR
Euro Land	10.07%	-0.58%
Australie	15.01%	-0.02%
Canada	2.33%	-0.98%
France	-8.63%	-0.78%
Hong Kong	-12.29%	-2.19%
Japon	3.03%	-0.12%
Royaume Uni	23.18%	0.10%
Etats Unis	-51.57%	-1.40%
	-18.88%	

Dans le tableau A-3, nous retrouvons le même type de résultats concernant l'ECAR et l'ECMR du Royaume-Uni et des Etats-Unis qu'avec le portefeuille 1.