

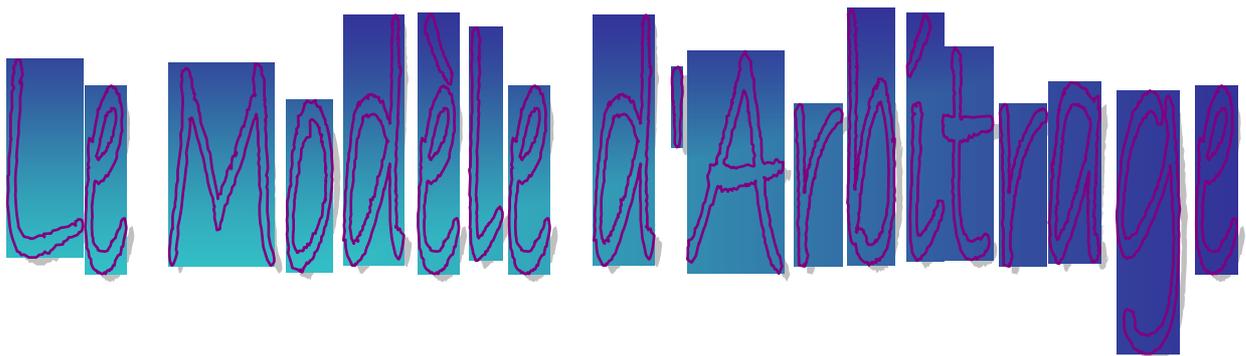
---

Université Mohamed V  
Faculté des Sciences Juridiques,  
Economiques et Sociales  
RABAT AGDAL

Master Sciences de Gestion  
Semestre 2

# Théorie de la Finance

---



---

**~~Préparé Par Mlle~~ ::**

BENMEKKI Mouna  
BOUJEMAA Hanane  
ELMAHMOUDI Zoubida  
OUZAOUIT Meriem  
SALMANI Wassima  
ZAKI Wiam

**~~Encadré Par Mr~~ ::**

AABOUCH Mohamed

## SOMMAIRE

Introduction.....	3
<b>II: Cadre théorique du modèle.....</b>	<b>5</b>
I- 1 : Du MEDAF à l'APT.....	5
I-2 : Notion d'arbitrage.....	6
<b>III: Présentation du modèle d'arbitrage.....</b>	<b>7</b>
II-1 : Version Initiale/ Version d'équilibre.....	8
1- La version initiale du modèle d'arbitrage.....	8
<b>AA Les hypothèses de base.....</b>	<b>8</b>
Exemple d'illustration.....	9
<b>BB La construction du modèle d'arbitrage.....</b>	<b>11</b>
2- Les versions d'équilibre du modèle d'arbitrage..	14
II-2 : APT et gestion du portefeuille.....	15
II-3 : Comparaisons, avantages et limites.....	17
1- Comparaisons avec les modèles récents.....	17
<b>AA Les modèles multifactoriels de risque et de rentabilité... </b>	<b>17</b>
<b>BB Régression et variables représentatives (Proxy models)...</b>	<b>18</b>
2- Une analyse comparative des modèles de rentabilité risque	20
<b>Exercice d'application.....</b>	<b>23</b>
<b>Exercice d'application.....</b>	<b>25</b>
Conclusion.....	27
Bibliographie.....	28

## Introduction

Nombreuses sont les recherches qui ont contribué à relâcher les hypothèses initiales du MEDAF (Modèle d'Evaluation Des Actifs Financiers), telles la négociabilité des actifs financiers. Nombreux sont aussi les gérants de portefeuille qui ont fait leur le concept de « coefficient bêta » et qui ont de ce fait modernisé leurs techniques d'allocation d'actifs.

L'APT (Arbitrage Pricing Theory) fut un pas marquant dans les modèles d'évaluation des actifs financiers, pour deux raisons:

Ses hypothèses étaient nettement moins contraignantes que celles du MEDAF, puisque sa condition de base est l'absence d'opportunité d'arbitrage. En d'autres termes, il devrait être impossible de réaliser des profits excessifs de manière régulière, compte tenu du risque d'un actif. Cette démarche est assez bien vérifiée sur les marchés financiers, puisque de nombreux professionnels scrutent en permanence les instruments d'investissement à la recherche de nouvelles opportunités. Si un actif offre un rendement supérieur à la moyenne des autres actifs de même risque, il y a fort à parier que les demandes d'achat seront vite suffisamment nombreuses pour faire monter le prix de cet actif, entraînant par conséquent une baisse de son rendement.

D'autre part, il a permis de décomposer le risque systématique d'un actif en différentes sources, permettant ainsi d'évaluer sa sensibilité à un certain nombre de facteurs.

L'idée de base de l'APT est qu'il existe un petit nombre de facteurs communs influençant le rendement de tous les titres. Intuitivement, un certain nombre d'éléments vient à l'esprit: les taux d'intérêt et d'inflation, la croissance de la production industrielle, les prix des matières premières etc. L'application de ce modèle pose un certain nombre de problèmes, notamment dans l'estimation des facteurs communs, mais il permet en revanche d'affiner la sélection de titres en fonction des sources de risque spécifiques auxquelles l'on est exposé.

Tout au long de ce travail, nous allons essayer, tout en restant exhaustives, de donner une présentation du modèle dit « APT », appelé encore **M**odèle d'**E**valuation par l'**A**rbitrage.

Le cheminement de notre plan est élaboré de manière à faire connaître l'origine et la notion d'arbitrage pour passer ensuite, dans une deuxième partie, à la présentation des deux versions du modèle d'arbitrage et enfin dissimuler certaines comparaisons avec des modèles de gestion de risque récents et en ressortir les limites.

## **II: Cadre théorique du modèle**

### **I-1 : Du MEDAF à l'APT**

Il est vrai que le MEDAF (CAPM), développé essentiellement par William F. Sharpe en 1964, est le premier véritable modèle d'équilibre permettant d'évaluer des actifs risqués. De ce point de vue, il constitue une référence historique. C'est un modèle qui explique les taux de rentabilité des différents actifs en fonction de leur risque. Grâce au MEDAF, les hypothèses sous lesquelles ce lien fonctionne ont été clarifiées.

Un marché est dit efficient au sens de E.F. Fama, si toute nouvelle information pertinente arrivant sur le marché est instantanément répercutée dans les cours des titres. Les tests d'efficience réalisés, semblent montrer que les marchés sont relativement efficients, d'où la validation du MEDAF, et de la mesure du risque proposée.

Cependant, si les tests de forme faible, sont concluants, les tests de forme semi forte<sup>1</sup> (impossibilité de prévoir les cours futurs à l'aide de toute l'information publique disponible aujourd'hui) laissent apparaître quelques traces d'inefficience. Celles-ci sont confirmées par les tests de forme forte effectués à l'aide d'informations privilégiées.

Dans l'avenir, il n'est donc pas possible qu'un autre modèle décrive encore mieux la réalité. Le modèle d'arbitrage constitue à cet égard une piste de recherche intéressante.

En fait, il a été reproché au MEDAF qu'il est impossible de représenter le vrai portefeuille de marché. Or, l'utilisation d'une approximation du portefeuille de marché empêche d'avoir un test valide du modèle et pose problème lorsqu'on essaye d'examiner s'il y a des actifs sur ou sous évalués. Ross a, en conséquence, tenté de mettre en place un modèle d'évaluation des actifs financiers dans lequel le portefeuille de marché n'intervient pas, et de façon plus générale, qui n'est pas basé sur l'équilibre des actifs financiers mais implique la réintroduction des paramètres de nature macroéconomiques.

---

<sup>1</sup> VIALA P., BRIYS E., « Eléments de théorie financière ». Édition : NATHAN, 1995

Alors que le MEDAF suppose une source commune de risque unique qui est le risque de marché, le Modèle d'Evaluation par Arbitrage (APT : Arbitrage Pricing Theory) est un modèle basé sur l'existence de plusieurs facteurs de risque communs. L'APT a pour objectif de relier le taux de rentabilité de chaque action à ces différentes sources communes de risque.

Le modèle d'évaluation par l'arbitrage a été conçu à l'origine par Ross en 1976 comme une alternative au modèle d'équilibre des actifs financiers. Si on synthétise à l'excès de l'approche par Markowitz, nous savons que le risque est mesuré relativement à un portefeuille de marché et qu'une seule ressource de risque existe, le risque de Marché. Le modèle indique aussi qu'un investisseur peut soit répartir sa richesse entre l'ensemble des actifs, soit la répartir entre deux actifs particuliers, l'actif sans risque et le portefeuille de marché. L'idée de base du modèle APT est qu'il est illusoire de vouloir réduire la covariabilité des titres au moyen d'un seul facteur qu'est le mouvement d'ensemble du marché ; il faut absolument recourir à une description multifactorielle intégrant la variabilité commune à tous les titres et ne laissant qu'un risque spécifique pour chaque titre pris individuellement.

## I-2 : Notion d'arbitrage

L'arbitrage est une combinaison de plusieurs opérations permettant de réaliser un bénéfice sans risque (en théorie au moins !) en tirant partie des seules imperfections susceptibles d'apparaître entre différents marchés. L'arbitrage permet d'assurer l'égalité des prix à un même moment. Il assure la fluidité entre les différents marchés et contribue à leur liquidité. C'est l'opération de base qui permet de garantir l'efficience des marchés.<sup>2</sup>

L'arbitrage est, au sens strict du terme, une opération financière apportant un gain certain sans risque. Il résulte des imperfections momentanées du marché.

Il se traduit essentiellement par :

Soit la vente d'un actif financier et l'achat d'un autre correspondant mieux, au prix actuel du marché et dans les circonstances actuelles, à ce que recherche l'investisseur en matière de perspectives de rendement et de risque acceptable ;

Soit la vente et l'achat du même actif financier, mais sur deux marchés différents, entre lesquels une différence de prix permettant un gain monétaire est constatée.

---

<sup>2</sup> « Finance d'entreprise », Vernimmen P., DALLOZ, pp 354 - 356

Les arbitragistes sont des professionnels incessamment à l'affût des opportunités que présentent ces différences de prix de marché. Ils ont un rôle important dans l'autorégulation des marchés financiers en effaçant les distorsions : quand un arbitrage est possible, ces opérateurs en profitent jusqu'à ce qu'il ne soit plus intéressant. Plus un marché est liquide et transparent, moins des arbitrages apparaissent et restent longtemps<sup>3</sup>.

## II : Présentation du modèle d'arbitrage

Les suppositions restrictives sur les coûts de transaction du MEDAF et la dépendance du modèle à l'égard de la notion de portefeuille ont été longtemps traitées avec prudence par les universitaires et les praticiens.

Si les investisseurs peuvent investir sans risque et gagner plus que le taux non risqué, ils ont trouvé une occasion d'arbitrage. Le point de départ de la MEA est que les investisseurs profitent de telle occasion d'arbitrage et, en cours de processus, les éliminent. Si deux portefeuilles ont le même risque mais offrent des rentabilités anticipées différentes, les investisseurs feront l'acquisition du portefeuille qui a la rentabilité espérée la plus élevée, ainsi vendront le portefeuille à rentabilité moindre et la différence sera un profit sans risque. Pour rendre impossible cet arbitrage, les deux portefeuilles doivent avoir la même rentabilité anticipée. Il existe deux types de modèles d'arbitrage ;

La version initiale du modèle d'arbitrage, celle proposée par ROSS;

La version dite d'équilibre ou exacte du modèle d'arbitrage.

---

<sup>3</sup> « Gestion de portefeuille - manuel et exercices corrigés », Viviani J.L, DUNOD, 2001

## II-1 : Version Initiale/ Version d'équilibre

### **1. La version initiale du modèle d'arbitrage**

Dans sa démarche la plus simple, le modèle d'arbitrage est développé en deux étapes :

Dans la première, il est supposé que les rentabilités des actifs financiers suivent un modèle générateur à K facteurs ;

Dans la deuxième, l'utilisation du principe d'arbitrage permet d'obtenir la relation fondamentale du modèle d'arbitrage.

#### **aa Les hypothèses de base**

Dans le modèle d'arbitrage, il est supposé que plusieurs facteurs économiques influencent les rentabilités des actifs financiers. Ces facteurs peuvent être classés en deux catégories :

Ceux qui affectent l'ensemble des actifs appelés facteurs communs (ou systématiques) qui peuvent être endogènes ou exogènes :

Facteurs communs endogènes : il faut procéder de la manière suivante : sélection d'un ensemble d'actifs, calcul des taux de rentabilité hebdomadaires, estimation de la matrice variance – covariance, utilisation de l'analyse factorielle.

Facteurs communs exogènes : À partir d'une théorie macro – économique on fait un choix a priori des facteurs susceptibles d'influencer les taux de rentabilités des titres financiers.

Ceux qui affectent seulement un ou plusieurs actifs (entreprise, secteur ou industrie), appelés facteurs spécifiques.

Selon le comportement de ces facteurs, la rentabilité réalisée des actifs est plus ou moins élevée. L'investisseur prévoit le comportement des facteurs d'une manière plus ou moins exacte et ce que l'investisseur a anticipé sur le comportement des facteurs est pris en compte dans le taux de la rentabilité anticipée de l'actif considéré. Par contre, les événements non anticipés affectent le comportement des facteurs et donc la rentabilité réalisée de l'actif considéré.

La rentabilité constatée d'un actif est égale à la rentabilité anticipée de l'actif plus la rentabilité non anticipée. Cette rentabilité non anticipée se décompose en deux parties :

Une partie due aux mouvements non prévus des facteurs communs ;

Une partie due aux mouvements non prévus des facteurs spécifiques.

Cette démarche constitue l'hypothèse de base du modèle d'évaluation par l'arbitrage. De façon plus formelle, cette hypothèse s'écrit en supposant qu'il y a K facteurs f influençant la rentabilité d'une action de la façon suivante.

$$R_{it} = E_i + \sum_{j=1}^k b_{ij} f_{jt} + \epsilon_{it}$$

Pour plus d'éclaircissement, l'équation peut être écrite ainsi :

$$R_{it} = E_i + b_{i1} f_{1t} + \dots + b_{ik} f_{kt} + \epsilon_{it}$$

$R_{it}$  = rentabilité aléatoire de l'actif i en t.

$E_i$  = rentabilité anticipée de l'actif i.

$b_{i1}$  = coefficient de sensibilité (ou saturation) de l'actif i au facteur 1.

$b_{ik}$  = coefficient de sensibilité (ou saturation) de l'actif i au facteur k.

$f_{1t}$  = la valeur prise par le facteur 1 en t.

$f_{kt}$  = la valeur prise par le facteur k en t.

$\epsilon_{it}$  = la rentabilité non anticipée due au facteur spécifique en t.

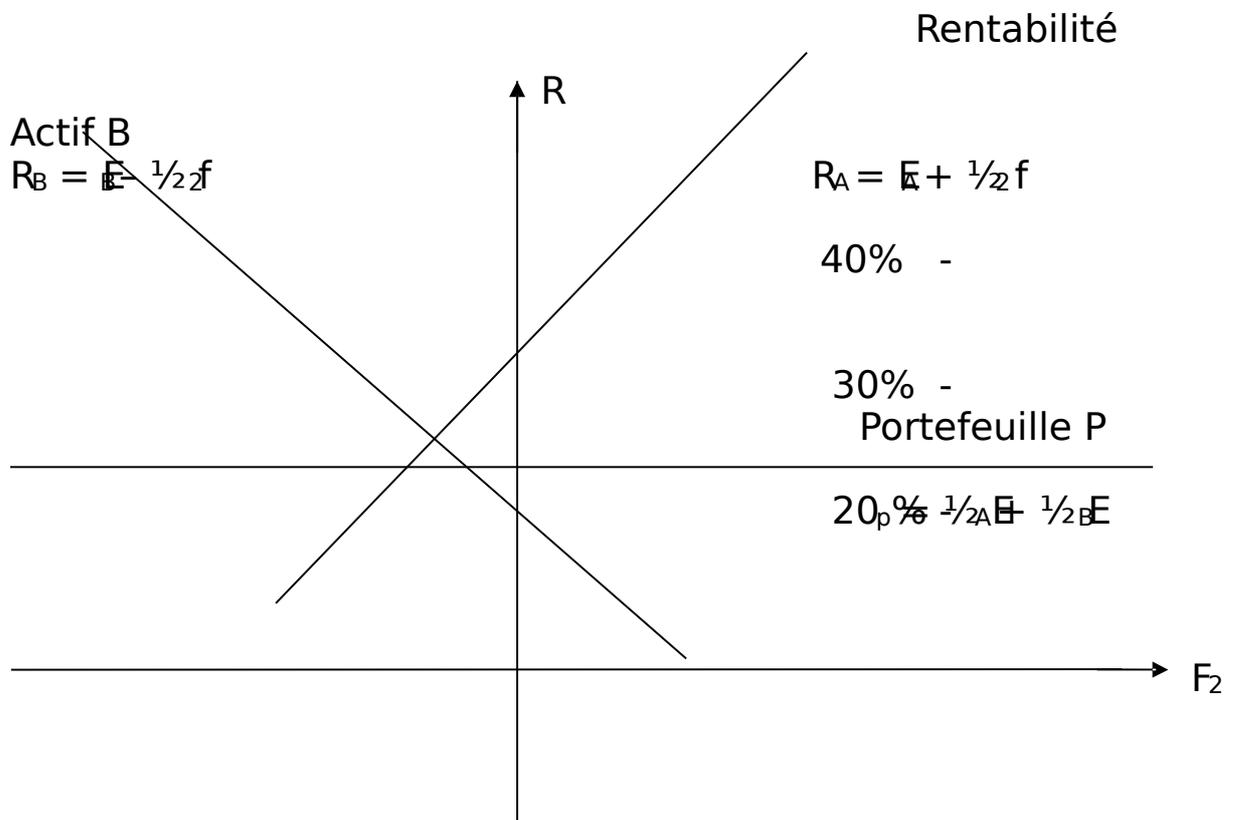
### Exemple d'illustration :

Donnons l'exemple graphique (Figure I-1) indiquant le lien entre la rentabilité d'un actif ou d'un portefeuille et les facteurs. Ici pour simplifier, nous allons considérer des actifs dont les coefficients de sensibilité sont nuls par rapport aux facteurs autres que le facteur 2.

L'actif A a une rentabilité anticipée de 30% et un coefficient de sensibilité au facteur 2 de 1/2 alors que l'actif B a une rentabilité anticipée de 15% et un coefficient de sensibilité au facteur 2 de - 1/2 . L'actif a donc une rentabilité réalisée supérieure à la rentabilité anticipée lorsque le facteur 2 prend une valeur supérieure à celle qui était prévue et inversement.

**Figure 1 :**

**Le lien entre la rentabilité d'un actif Et Le coefficient de risque à ce facteur**



Par contre, dans ce cas l'actif B a une rentabilité réalisée inférieure à la rentabilité anticipée et inversement. Aussi, si l'investisseur veut limiter le risque lié au fait qu'il ne peut pas prévoir exactement comment il va évaluer le facteur 2, il peut annuler ce risque en combinant l'actif A et l'actif B. pour ceci, il constitue le portefeuille P en investissant la même somme dans l'actif A que dans l'actif B.

La rentabilité du portefeuille P est, alors, égale à :

$$\frac{1}{2} R_A + \frac{1}{2} R_B = \frac{1}{2} (E_A + f_2) + \frac{1}{2} (E_B - f_2)$$

$$R_P = \frac{1}{2} (E_A + E_B)$$

$$R_P = \frac{1}{2} (30\% + 15\%) = 22,5\%.$$

L'investisseur a donc avec ce portefeuille P une rentabilité anticipée et certaine de 22,5%.

## La construction du modèle d'arbitrage

L'idée de base est de créer un portefeuille d'arbitrage  $\eta$  de tous les actifs.

$\eta$  est un vecteur ligne composé des montants des actifs détenus.

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_i, \dots, \eta_N)$$

La construction du portefeuille d'arbitrage, utilisant l'équation  $R_{it} = E_i + \sum_{j=1}^K b_{ij} f_{jt} + \epsilon_{it}$ ,

s'appuie sur le principe d'arbitrage selon lequel tout investissement crée est :

- sans risque et n'utilise pas de richesse  $\eta e = 0$  où  $e = (1, \dots, 1)$  (on parle ici de la richesse investie) ;
- que  $\eta_i$  (valeur détenue de l'actif  $i$ ) est de l'ordre de  $1/N$ .

Dans ce contexte, l'idée de base est de créer un portefeuille d'arbitrage composé de tous les actifs et nous admettons ici qu'il y a  $N$  actifs, soit autant que de facteurs.

Le portefeuille est donc diversifié et sa rentabilité est égale à :

$$(1-2) \eta R = \eta E + (\eta B) f + \eta \epsilon$$

Où

$R$  est le vecteur des rentabilités réalisées des  $N$  actifs de dimensions  $N \times 1$  ou de dimension  $(N \times T)$  s'il y a  $T$  période de temps.

$E$  est le vecteur des rentabilités anticipées des  $N$  actifs de dimension  $N \times 1$ .

$B$  est la matrice des saturations des  $N$  actifs aux  $K$  facteurs communs de dimension  $N \times K$ . il faut noter que les termes saturation, coefficient de risque, coefficient de sensibilité ont la même signification.

$f$  est la matrice des réalisations des  $K$  facteurs de dimension  $K \times 1$  ou de dimension  $K \times T$  s'il y a  $T$  périodes de temps.

$\epsilon$  est le vecteur des réalisations des  $N$  facteurs spécifiques de dimension  $N \times 1$  ou de dimension  $N \times T$  s'il y a  $T$  périodes de temps.

Ce portefeuille est un portefeuille d'arbitrage, il est donc construit de telle manière :

Qu'il soit autofinçant ; ce qui signifie que les modifications de portefeuille ne peuvent s'opérer sans apport de fonds extérieur à ce portefeuille  $\eta_i = 0$  ;

Que  $\eta_i$  soit de l'ordre de  $1/N$  ;

Qu'il soit sans risque ce qui signifie que les coefficients de sensibilité du portefeuille aux différents facteurs communs doivent être nuls, soit  $\eta \underline{B} = 0$  et que le risque spécifique du portefeuille doit être nul,  $\eta \underline{\epsilon} = 0$ , résultat obtenu par diversification.

En simplifiant, on obtient :  $\eta \underline{R} = \eta \underline{E}$

$\eta$  étant un portefeuille d'arbitrage, la richesse investie est nulle et comme il n'y a plus de risque, sa rentabilité anticipée  $\eta \underline{E}$  doit être nulle, et en conséquence  $\eta \underline{R} = \eta \underline{E} = 0$ .

Ainsi, pour  $\eta$  tel que  $\eta \underline{B} = 0$  et  $\eta \underline{\epsilon} = 0$ , on a nécessairement  $\eta \underline{E} = 0$ . Ceci implique que  $\underline{E}$  est une combinaison linéaire de  $\underline{B}$  et  $\underline{e}$ .

$$\underline{E} = \underline{e} \lambda_0 + \underline{B} \lambda$$

Avec,  $\underline{e} = (1, \dots, 1)$  un vecteur ;

$\lambda_0 =$  est la rentabilité de l'actif sans risque s'il existe, de dimension  $1 \times 1$  ;

$\lambda =$  est la matrice des primes de risque sur les facteurs communs, de dimension  $K \times 1$  ;

$$E_i = \lambda_0 + \sum_{j=1}^k \lambda_j b_{ik}$$

En remplaçant  $\lambda$  dans l'équation par «  $\underline{r}_F$  » et  $\lambda$  par  $(\underline{E} \underline{R}_m - \underline{r}_F)$  qui est le prix de risque et que  $e=1$ , on obtient l'équation d'équilibre du modèle d'évaluation par arbitrage :

$$\underline{E} (r_i) = \underline{r}_F + \sum_{j=1}^k b_{ik} (\underline{E} \underline{R}_m - \underline{r}_F)$$

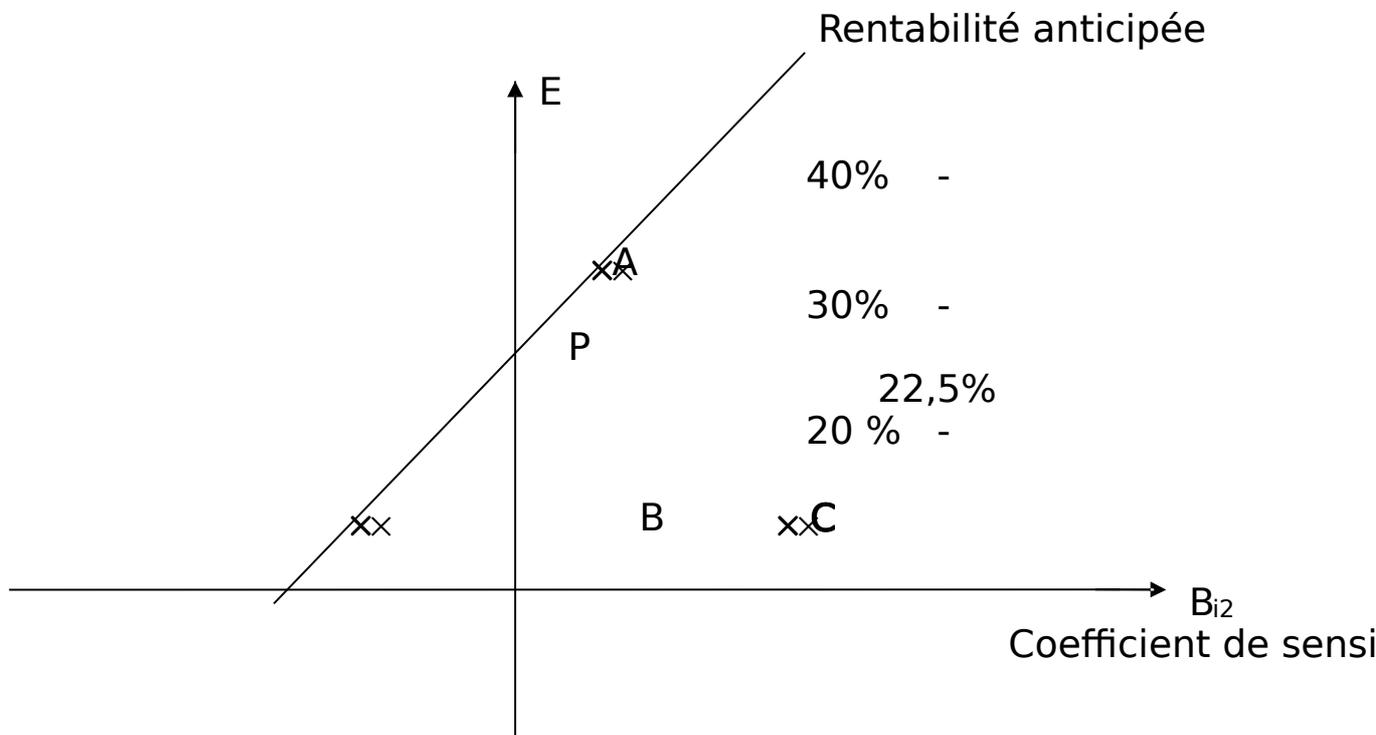
La rentabilité anticipée de l'actif  $i$  est égale à la rentabilité de l'actif sans risque plus une prime de risque en fonction des coefficients de sensibilité de l'actif  $i$  aux facteurs communs.

Cependant, cette relation n'est pas exactement vérifiée dans le cas général, elle l'est uniquement lorsqu'il y a de risque spécifique.

Dans le cas général, la relation s'écrit alors :

$$E \cong \underline{e} \lambda_0 + \underline{B} \lambda$$

Si on reprend le même exemple que celui de la figure (I-1), nous mettons en évidence avec le graphique (figure I2) la relation entre les rentabilités anticipées des actifs et les coefficients de sensibilité des actifs aux facteurs communs.



Si A est un actif de rentabilité anticipée de 30%, avec un coefficient de sensibilité au facteur 2 de 0,5, B un actif de rentabilité anticipée de 15% avec un coefficient de sensibilité au facteur 2 de -0,5% et C un actif de rentabilité anticipée de 15% avec un coefficient de sensibilité au facteur 2 de 1, nous nous apercevons que les trois actifs ne sont pas sur la même droite. Il n'y a pas de relation linéaire entre les trois actifs.

Il y a donc une opportunité d'arbitrage. Les investisseurs essayeront de vendre leur actif C pour détenir des actifs A.

En conséquence, lorsqu'il n'y a plus d'opportunité d'arbitrage, la rentabilité anticipée d'un actif est une fonction linéaire des coefficients de sensibilité de l'actif aux différents facteurs économiques. Les liens entre la rentabilité anticipée et les coefficients de sensibilité sont des constantes appelées primes de risque.

En résumé, dans le MEA, le risque de marché est mesuré par rapport à de multiples variables macroéconomiques non spécifiées, avec la sensibilité de l'investissement relative à chaque facteur mesuré par un bêta. Le nombre de facteurs, les facteurs bêta et les facteurs des primes de risque peuvent être estimés en utilisant l'analyse factorielle.

## 2. Les versions d'équilibre du modèle d'arbitrage

Dans ce contexte, deux types d'approches empiriques ont été adoptés :

- une évaluation de l'approximation faite sur le modèle de la version initiale du modèle ;
- le développement des modèles d'arbitrage avec des relations d'évaluation exactes.

Concernant la première catégorie, on citera Huberman 1982 qui a démontré, adoptant la même démarche que celle qui justifie la diversification d'un portefeuille afin de minimiser le risque global, que la moyenne des carrés des erreurs d'évaluation tend vers zéro à mesure que le nombre d'actifs s'accroît. La limite de cette démarche est que l'erreur d'évaluation peut être importante pour certains actifs, amenant à rejeter le test.

Concernant la deuxième démarche, il s'agit de cerner à quelles conditions précises la relation  $R_{it} = E_i + \sum_{j=1}^k b_{ij} f_{jt} + \varepsilon_{it}$  est vérifiée

La réintroduction des hypothèses traditionnelles du MEDAF paraît alors indispensable : marché efficient, fonction d'utilité ayant les « bonnes propriétés ».

Les avantages relatifs du modèle d'arbitrage par rapport au MEDAF s'estompent.

La conclusion commune aux auteurs comme Connor, Huberman, Dybvig, Grinblatt et Titman est que la constitution d'un portefeuille à variance minimale dépend des hypothèses faites sur les possibilités d'élimination des diverses sources de risque- facteur commun et facteur spécifiques.

Trois cas peuvent être envisagés :

**Cas 1 :** il est possible de constituer un portefeuille à partir des K actifs risqués dont le risque total est nul, ce qui signifie qu'il est possible de constituer un portefeuille dont les coefficients de sensibilité aux différents facteurs communs sont nuls et dont le risque spécifique est nul.

**Cas 2 :** il est possible de constituer un portefeuille à variance minimale sans risque spécifique mais il n'est pas possible d'éliminer en totalité l'impact des différentes sources de risque systématique.

Le portefeuille constitué est un portefeuille à variance minimale dont l'exposition au risque spécifique est nul, et dont un des coefficient de sensibilité aux facteurs communs est différent de zéro. Ceci serait dû au fait qu'il y a un facteur économique qui influence tous les actifs de la même manière et dans le même sens.

Dans ce cas, les coefficients de sensibilité des actifs à ce facteur commun sont tous proches de un. Il est pratiquement alors impossible de construire un portefeuille sans risque. On obtient un portefeuille dit à variance minimale qui n'a pas de risque spécifique et qui a un degré d'exposition à un des facteurs communs différent de zéro.

**Cas 3 :** il n'est pas possible de constituer un portefeuille à variance minimale sans risque spécifique et sans risque systématique. Le portefeuille avec la variance la plus faible conserve toujours une exposition différente de zéro à au moins l'un des facteurs communs et son risque spécifique est différent de zéro.

Ainsi, tout test du modèle d'arbitrage consiste en un test d'une des trois relations exactes du modèle supra, ce qui revient à dire qu'un test du modèle d'arbitrage est un test de la version initiale de Ross et des hypothèses supplémentaires faites pour obtenir une relation exacte, dépendant de la nature et des effets de l'information requise pour constituer le portefeuille de variance minimale.

## II-2 : APT et gestion du portefeuille

### **Dans le modèle d'arbitrage, gérer un portefeuille consiste en quoi ?**

Il consiste à fixer les valeurs des coefficients de sensibilité aux différents facteurs communs du portefeuille que l'on désire construire, à estimer la rentabilité anticipée du portefeuille et éventuellement à examiner si la rentabilité ex-post peut être différente de la rentabilité anticipée.

On perçoit ici trois types de stratégies :

La première qui est la plus simple, c'est une stratégie qualifiée de passive, elle consiste à reproduire les facteurs communs qui peuvent être endogènes ou exogènes, en constituant des portefeuilles de base avec les coefficients de sensibilité aux facteurs communs autres que le facteur considéré nul. Le coefficient de sensibilité au facteur considéré est pris égal à un.

La richesse est alors répartie entre ces différents portefeuilles de base. Cette répartition est fonction de la rentabilité anticipée désirée. Les poids des différents portefeuilles de base sont égaux aux coefficients de sensibilité.

La deuxième stratégie est qualifiée d'active elle consiste, après avoir construit les portefeuilles de base et identifié les facteurs économiques, à se positionner sur les facteurs économiques dont les primes de risque sont fortes ou susceptibles de croître si leur impact est positif sur la rentabilité.

Par exemple, si on réfère à l'analyse de CHEN, ROLL et ROSS (1986), le facteur économique le plus important est la production industrielle. Elle correspond au premier facteur commun représenté par un des portefeuilles de base. Anticipant une hausse plus forte de la production industrielle que celle anticipée par le marché, le gérant peut investir dans le portefeuille de base reproduisant le comportement de la production industrielle.

La troisième des stratégies de type indiciel se développe sur la base de cette approche. Une, amène à construire un portefeuille reproduisant le marché, ce qui revient à se conformer au MEDAF. Mais le pari est de battre le marché en ayant le même risque relatif mesuré par le B pris égal à 1.

Il s'agit de construire plusieurs portefeuilles de B égal à 1 mais de sensibilité différente pour les différents facteurs. On retient le portefeuille qui devrait offrir la meilleure performance compte tenu des prévisions faites sur ces facteurs.

Et l'autre, plus conforme à la pure logique de l'APT, consiste à estimer des coefficients de sensibilité de l'indice de référence et des différents actifs aux facteurs communs du modèle d'arbitrage et les primes de risque associées aux facteurs économiques ; l'objectif est de construire un portefeuille de rentabilité plus élevée que le portefeuille de marché mais présentant les mêmes coefficients de sensibilité.

Par exemple, ROLL et ROSS, avec certaines hypothèses faites sur le comportement des facteurs, maximisent la probabilité que le portefeuille construit batte l'indice d'un certain montant fixé a priori.

Et ce type d'approche inspire les sociétés de gestion de portefeuille observant les méthodes dites indicielles.

## II-3 : Comparaisons, avantages et limites

### 1. Comparaisons avec les modèles récents

#### a) Les modèles multifactoriels de rentabilité

L'échec du modèle MEA pour identifier spécifiquement les facteurs peut être une force statistique, mais c'est une faiblesse intuitive. La solution paraît simple : remplaçons les facteurs statistiques non identifiés par les facteurs économiques spécifiques, et le modèle résultant devrait avoir une base économique conservant beaucoup de la puissance du MEA. C'est précisément ce que les modèles multifactoriels essaient de faire.

En général, les modèles multifactoriels sont déterminés par les données fondamentales plutôt que la modélisation économique. Une fois que le nombre de facteurs identifiés dans le MEA, leur comportement dans le temps peut être tiré des données. Le comportement des facteurs anonymes sur une période donnée peut être comparé au comportement des variables macroéconomiques sur cette même période pour voir si chacune des variables est corrélée, dans le temps, aux facteurs identifiés.

Par exemple, Chen Roll et Ross (1986) suggèrent que les variables macroéconomiques suivantes sont très corrélées aux facteurs qui émergent de l'analyse factorielle : la production industrielle, les modifications des primes sur les obligations, les changements dans la structure à terme, l'inflation inattendue et les changements dans le taux d'intérêt réel. Ces variables peuvent être alors corrélées aux revenus pour aboutir à un modèle de revenus anticipés, avec les bêtas spécifiques des entreprises calculés relativement à chaque variable.

$$E(R) = R_F + \beta_{GNP}(E(R_{GNP}) - R_F) + \beta_{\pi}(E(R_{\pi}) - R_F) + \dots + \beta_{\sigma_b}(E(R_{\sigma_b}) - R_F)$$

Où

$\beta_{GNP}$  = bêta relatif aux changements dans la production industrielle ;

$E(R_{GNP})$  = rentabilité anticipée sur un portefeuille avec un bêta égal à 1 sur le facteur « production industrielle » et égal à 0 sur tous les autres facteurs ;

$\beta_{\pi}$  = bêta relatif aux variations du taux d'inflation ;

$E(R_{\pi})$  = rentabilité anticipée sur un portefeuille avec un bêta égal à 1 sur le taux d'inflation et égal à 0 sur tous les autres facteurs ;

Les coûts de passage du MEA à un modèle macroéconomique multifactoriel peuvent être liés directement aux erreurs qui peuvent être faites dans l'identification de ces facteurs. Les facteurs économiques du modèle peuvent changer avec le temps, comme c'est le cas des primes de risque associées à chacun. Par exemple, les variations des prix du pétrole étaient un facteur économique considérable qui dictait le montant des revenus anticipés des années 1970, mais elles ne sont plus aussi importantes à d'autres périodes. Si nous utilisons un facteur erroné ou si nous oublions un facteur important dans un modèle multifactoriel, ceci peut conduire à des évaluations inférieures de la rentabilité espérée.

En résumé, le modèle multifactoriel, comme le MEA, suppose que le risque du marché peut être mieux calculé en utilisant des facteurs macroéconomiques multiples et les bêtas relatifs à chacun. Contrairement au MEA, les modèles multifactoriels essaient d'identifier les facteurs macroéconomiques qui gouvernent le risque de marché.

## **b) Régression et variables représentatives (Proxy models)**

Tous les modèles que nous avons explorés jusqu'ici commencent par définir le risque de marché dans des termes généraux et ensuite ils développent des structures qui sont censées mesurer au mieux ce risque de marché. Cependant, tous ces modèles effectuent leurs mesures de risque de marché (bêtas) en se référant aux données historiques.

Il y a une autre classe de modèles de rentabilité- risque qui commencent par étudier les rentabilités historiques des actions et essaient d'expliquer les différences de revenus sur la longue période, en utilisant des caractéristiques telles que la valeur de marché d'une entreprise ou les coefficients en cours<sup>4</sup>. Les partisans de ces modèles indiquent que si certains investissements ont une rentabilité beaucoup plus élevée que d'autres, ils doivent être plus risqués. Par conséquent, nous pourrions étudier les caractéristiques que ces investissements très rentables ont en commun et considérer ces caractéristiques comme des mesures indirectes ou des variables représentatives des risques du marché.

---

<sup>4</sup> Un coefficient de cours (par exemple le PER) est obtenu en divisant le prix du marché d'une action par son bénéfice ou sa valeur comptable. Les études indiquent que les actions qui ont des coefficients de cours à faible profit ou à faible valeur comptable ont une rentabilité plus forte que les autres actions.

Au début des années 1990, Fama et French (1992), dans une étude très pertinente du MEDAF, ont noté que les revenus réels entre 1963 et 1990 ont été très corrélés avec le *book of price ratio* (Valeur comptable/Valeur de marché des capitaux propres) et la taille des entreprises. Cette période des investissements très rentables réalisés dans des entreprises à forte capitalisation boursière et à valeur comptable élevée. Fama et French suggèrent qu'elles soient utilisées comme modèles de représentation du risque et rappellent l'équation de régression suivante pour la rentabilité mensuelle des actions à la Bourse de New York.

$$R_T = 1,77\% - 0,11 \ln(MV) + 0,35 \ln(BV/MV)$$

Où

**MV** = valeur de marché des capitaux propres ;

**BV/MV** = valeur comptable / valeur de marché des capitaux propres.

Quand on les intègre dans cette régression, la valeur comptable et la capitalisation boursière peuvent décrire les revenus mensuels anticipés.

## 2. Une analyse comparative des modèles de rentabilité risque

**Figure: Les modèles de rentabilité en finance - Mesurer le risque de marché**

Le MEDAF	Le MEA	Modèle multifactoriel	Modèle à variables représentatives
<p>S'il n'y a :</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. aucune information privée ;</li> <li>2. aucun coût de transaction, le portefeuille diversifié optimal inclut chaque actif disponible dans le monde possédant un portefeuille de marché.</li> </ol> <p><b>Risque de marché = risque ajouté par tout investissement au portefeuille au marché.</b></p> <p>Bêta d'actif relatif au portefeuille de marché (venant de calcul d'une régression).</p>	<p>S'il n'y a pas d'occasions d'arbitrage, le risque de marché doit être calculé par les bêtas relatifs aux facteurs qui affectent tous les investissements.</p> <p><b>Risque de marché = risque d'exposition à des facteurs généraux au marché.</b></p> <p>Bêtas d'actifs relatifs au marché non spécifiés (venant d'une analyse factorielle)</p>	<p>Puisque le risque de marché affecte la plupart ou tous les investissements, il doit venir de facteurs macroéconomiques.</p> <p><b>Risque de marché = exposition de tout actif aux facteurs macroéconomiques</b></p>	<p>Dans un marché efficient, les différences de rentabilité sur de longues périodes doivent être dues aux différences de risque de marché. Chercher des variables corrélées avec les revenus devrait alors donner des représentations correctes de ce risque.</p> <p><b>Risque de marché = risque calculé par les variables représentatives.</b></p> <p>Equation reliant les revenus aux variables représentatives (venant du calcul d'une régression).</p>

Comme il est indiqué à cette figure, tous les modèles de risque et de revenu développés ont des hypothèses communes. Ils supposent tous que seul le risque de marché est rémunéré et ils déduisent la rentabilité anticipée comme une fonction de la mesure de ce risque. Le MEDAF fait les suppositions les plus restrictives au sujet du mode de fonctionnement des marchés mais il aboutit au modèle le plus simple, avec un seul facteur de risque à estimer. Le MEA fait moins de suppositions mais débouche sur un modèle plus compliqué, au moins quant aux paramètres à estimer.

Le MEDAF peut être considéré comme un cas particulier du MEA où il y a un seul facteur sous-jacent et il est complètement intégré dans l'indice boursier. En général, le MEDAF a l'avantage d'être un modèle plus simple pour l'estimation et l'utilisation, mais il est moins précis que le MEA, plus précis quand un investisseur est sensible aux facteurs économiques mal représentés dans l'indice boursier. Par exemple, les actions des compagnies pétrolières subissent un risque à cause des mouvements des prix de pétrole. Elles ont tendance à avoir des bêtas MEDAF faibles et des rentabilités anticipées faibles aussi. En utilisant le modèle MEA où un des facteurs peut mesurer les mouvements des prix du pétrole ainsi que d'autres matières premières, on aura une meilleure évaluation du risque et une rentabilité plus élevée pour ce type d'entreprise<sup>5</sup>.

Lequel de ces modèles est-il meilleur ? Le bêta est-il une bonne approximation du risque et est-ce qu'il est corrélé à la rentabilité espérée ? Les réponses à ces questions ont été largement discutées durant les deux dernières décennies. Les premiers tests du MEDAF ont suggéré que les bêtas et les rentabilités sont liés positivement, pourtant d'autres mesures du risque (telle que la variance) continuent à expliquer des différences par rapport aux rentabilités réelles. Cette contradiction a été attribuée aux limitations de la technique de test.

Fama et French (1992) ont examiné le rapport entre les bêtas et les rentabilités entre 1963 et 1990 et ont conclu qu'il n'y a aucun rapport. Ces résultats ont été contestés à trois niveaux. Premièrement, Amihud, Christensen et Mendelson (1992) ont utilisé les mêmes données, ils ont fait des études statistiques différentes et ont montré que les différences des bêtas ont, en fait, expliqué les différences des rentabilités durant cette période du temps.

---

<sup>5</sup> Weston et Copeland (1992) ont utilisé les deux approches pour estimer le coût des capitaux propres pour les compagnies pétrolières en 1989 et ils ont montré que 14, 4% utilisaient le MEDAF et que 19, 1% utilisaient le MEA.

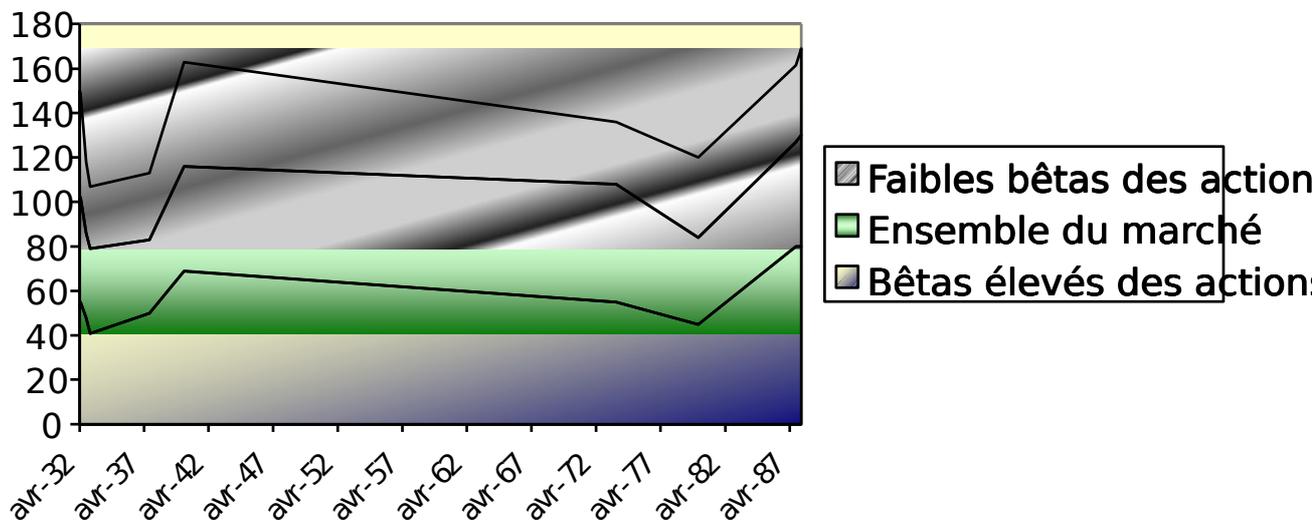
Deuxièmement, Kothari et Shanken (1995) ont évalué les bêtas en utilisant les données annuelles au lieu des intervalles plus courts utilisés dans beaucoup de tests, et ils ont conclu que les bêtas expliquent bien une portion importante des différences de rentabilités des investissements.

Troisièmement, Chan et Lakonishok (1993) ont étudié une longue série chronologique de rentabilités de 1926 à 1991 et ont trouvé que le rapport positif entre bêtas et rentabilité s'est interrompu seulement après 1982.

Ils ont aussi remarqué que les bêtas sont un guide utile pour étudier le risque dans les conditions extrêmes du marché, avec les entreprises les plus risquées (les 10% des bêtas les plus élevés) qui ont des résultats bien plus mauvais que le marché dans son ensemble, dans les mois les plus décevants du marché entre 1926 et 1991 (figure 2.).

**Figure 2 Rentabilité et bêtas dix plus mauvais mois entre 1926 et 1991**

Source Chan et Lakonishok



Bien que les tests initiaux du MEA aient montré plus de possibilité d'explication des différences de rentabilité, il faut distinguer l'utilisation des modèles pour expliquer les écarts de rentabilités passées et pour prévoir les rentabilités futures. Les concurrents du MEDAF sont plus pertinents dans l'explication des rentabilités passées car ils ne se limitent pas à un seul facteur, comme le fait le modèle d'équilibre des actifs financiers.

Cette extension à de multiples facteurs devient un problème supplémentaire lorsqu'on essaye de prévoir les rentabilités anticipées futures, puisqu'il faut alors paramétrer les bêtas et les primes de chacun des facteurs. Comme les primes des facteurs et les bêtas sont eux-mêmes volatils, l'erreur d'estimation peut annuler les avantages tirés du passage du MEDAF aux modèles plus complexes. Les modèles de régression qui ont été présentés comme solution alternative posent aussi un problème d'estimation, puisque les variables qui sont les plus représentatives pour apprécier le risque de marché au cours d'une période donnée (telle que la capitalisation boursière) ne sont pas forcément celles qui le seront à la prochaine période.

Finalement, la permanence du MEDAF comme modèle par défaut pour l'étude du risque dans les situations du monde réel met en échec ses références intuitives et l'utilisation de modèles plus complexes susceptibles d'améliorer considérablement la prévision des rentabilités futures. Nous pouvons affirmer qu'un usage judicieux du MEDAF, sans trop tenir compte des données historiques, est encore la façon la plus efficace de traiter le risque financier d'une entreprise moderne.

*Exercice d'application 1:*

Vous utilisez le MEA pour estimer la rentabilité de la société Bethlehem S fait les évaluations suivantes pour les facteurs bêtas et les primes de risque.

Facteur	Bêta	Prime de ris
1	1,2	2,5%
2	0,6	1,5
3	1,5	1,0
4	2,2	0,8
5	0,5	1,2

## Questions

- A. Si le taux sans risque est de 5%, estimer la rentabilité anticipé de Bethlehem Steel.
- B. Maintenant supposons que le bêta du MEDAF pour Bethlehem Steel soit de 1,1 et que la prime du risque pour le portefeuille de marché soit de 5. Estimez la rentabilité anticipée, en utilisant le modèle MEDAF.
- C. Pourquoi les rentabilités anticipées sont-elles différentes pour les deux modèles ?

## Réponses

- A. On sait que l'équation d'équilibre du modèle d'évaluation par arbitrage :

$$E(r_i) = r_F + \sum_{j=1}^k b_{ik} (R_m - r_F)$$

Donc la rentabilité anticipée de Bethlehem Steel est égale à :

$$\begin{aligned} E(r_i) &= 0,05 + [(1,2 \times 2,5) + (0,6 \times 1,5) + (1,5 \times 1) + (2,2 \times 0,8) + (0,5 \times 1,2)] \\ &= 0,05 + 0,03 + 0,009 + 0,015 + 0,017 + 0,006 \\ &= 0,1276 = 12,76\% \end{aligned}$$

- B. On utilisant l'équation du MEDAF on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} E(r_i) &= r_F + b_i (R_m - r_F) \\ &= 0,05 + (1,1 \times 0,05) = 10,5\% \end{aligned}$$

- C. On remarque que la rentabilité du MEA est plus élevée que celle du MEDAF. Car le MEA est un modèle basé sur l'existence de plusieurs facteurs de risque qui nous permettra une meilleure évaluation du risque et une rentabilité plus élevée.

*Exercice d'application 2:*

Les portefeuilles A, B, C de la société AMINOS sont très largement diversifiés, on peut donc considérer que les résidus sont nuls. Ils ont les caractéristiques suivantes :

Titres	Espérance	Bêta 1	Bêta 2
AA	11,25	1	0,5
BB	10,5	0,5	1
CC	8	0,3	0,6

**Questions :**

- Calculer la rentabilité anticipée de la société AMINOS.
- Supposons qu'un actif D détient les caractéristiques suivantes :  $E(r_i) = 12\%$ ,  $\beta_{1i} = 0,7$ ,  $\beta_{2i} = 0,65$ . si un la société achète 100000 dirhams de titres D et vend à découvert son portefeuille est ce qu'elle va réaliser a la fin un gain ou une perte?

**Réponses :**

- Afin de trouver l'équation, il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} 11,25 = E_i + f_1 + 0,5f_2. \\ 10,5 = E_i + 0,5f_1 + f_2. \\ 8 = E_i + 0,3f_1 + 0,6f_2. \end{cases}$$

D'où l'équation :  $E(r_i) = 4,25 + 5\beta_{1i} + 3,75\beta_{2i}$ .

- Pour déterminer le gain ou la perte de la société on doit construire un portefeuille de même risque à partir des actifs A, B, C, pour cela il faut résoudre :

$$\begin{cases} X_A + X_B + X_C = 1 \\ X_A + 0,5X_B + 0,3X_C = 0,7 \\ 0,5X_A + X_B + 0,6X_C = 0,65 \end{cases}$$

On trouve la relation suivante :  $0,5X_A + 0,25X_B + 0,25X_C = 0,101875$

Selon le principe de l'arbitrage deux portefeuilles de risque identique ne peuvent pas avoir des espérances de rendements différentes.

Si la société achète pour 100 000 dhs de titres D en vendant à découvert le portefeuille d'arbitrage, à la fin de la période il obtient **un gain** de  $120\,000 - 101\,875 = \mathbf{18\,125}$  sans investir ni prendre de risque !

## Conclusion

L'APT, étant un modèle multifactoriel basé sur l'absence d'opportunité d'arbitrage, reconnaissant que le risque est un phénomène multidimensionnel qui s'exprime par plusieurs facteurs. Après la remise en cause de la fiabilité du MEDAF quant la construction d'un portefeuille de marché efficient, le Modèle d'Evaluation par l'Arbitrage a présenté des hypothèses moins contraignantes que celles du CAPM puisque sa condition de base étant l'absence de toute opportunité d'arbitrage.

Toutefois, l'une des faiblesses du MEA est qu'il reste muet quant à l'identité des facteurs qui déterminent les rendements des titres.

Au début des années 90, une nouvelle mesure du risque a pris place : la VaR<sup>6</sup> (Value at Risk), une perte maximale qu'un gestionnaire de portefeuille peut subir durant une certaine période. Cette nouvelle formule a servi dans l'évaluation des risques de type asymétrique, associé aux options, l'écart-type ou encore le bêta, ne permettant pas de prendre en compte ce risque de façon satisfaisante.

---

<sup>6</sup> <http://www.esg.uqam.ca/recherche/document/2006/04-06.pdf>

## Bibliographie

### **Ouvrages**

BELLALAH M. « Options, contrats à terme et gestion des risques : Analyse, évaluation, stratégies. ECONOMICA 2003

FONTAINE P. « Arbitrage et évaluation internationale des actifs financiers ». ECONOMICA 1988.

GILLET R., Reinbourg P., Navatte P., « Finance d'entreprise, Finance de marché, Diagnostic financier ». DALLOZ, 2003.

HIRIGOYEN G. « Finance d'entreprise : Théorie et pratique », 2<sup>ème</sup> édition.

RACICOT F-E., THEORET R., CALMES Ch., et SALAZAR J. « Finance computationnelle et gestion des risques : Ingénierie financière avec applications Excel (Visual Basic) et Matlab ». Presses de l'Université du Québec, 2006.

RACICOT F-E., THEORET R., « Traité d'économétrie financière : Modélisation financière ». Presses de l'Université du Québec

ROURE F., « Les mécanismes du MATIF ». Les éditions d'organisations, 1988

SPIESER Ph., « Information économiques et marchés financiers », ECONOMICA, Mai 2000. Collection gestion

VIALA P., BRIYS E., « Eléments de théorie financière". Édition : NATHAN, 1995

Vivani, J.L. « Gestion de portefeuille ». Dunod 1997.

## **Thèses**

AMBLER S., « le modèle d'évaluation par l'arbitrage (MEA) ». Département des sciences économiques. Ecole des sciences de la gestion. Université du Québec à Montréal : automne 2004

BISIÈRE C., « THÉORIE DE LA STRUCTURE PAR TERME DES TAUX D'INTERET ». Thèse de Doctorat ès Sciences Économiques, 1994. UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE II FACULTÉ DES SCIENCES ÉCONOMIQUES, Centre d'Économie et de Finances Internationales.

## **Webographie**

<http://www.esg.uqam.ca/recherche/document/2006/04-06.pdf>