

Méthodes Numériques Appliquées
**(Résolution numérique des équations
différentielles de l'ingénieur)**

Vincent Guinot, Bernard Cappelaere

Polytech'Montpellier STE 2

2005/2006

Table

Pourquoi les méthodes numériques ?.....	1
Structure du cours.....	1
Notation.....	3
Chapitre 1. Classification des équations différentielles.....	4
Objectifs.....	4
1.1 Équations Différentielles Ordinaires (EDOs).....	4
1.1.1 Définitions.....	4
1.1.2 Exemples d'EDOs.....	6
1.2 Équations aux Dérivées Partielles (EDPs).....	9
1.2.1 Définitions.....	9
1.2.2 Classification des EDPs du second ordre.....	10
1.2.3 Besoins en termes de conditions initiales et aux limites.....	14
1.2.4 Exemples d'EDPs hyperboliques.....	15
1.2.5 Exemples d'EDPs paraboliques.....	16
1.2.6 Exemples d'EDPs elliptiques.....	17
1.2.7 Équations 'mixtes'.....	18
Chapitre 2. Différences finies pour les Equations Différentielles Ordinaires (EDOs)....	19
Objectifs.....	19
2.1 Principe général: discrétisation de l'espace ou du temps.....	19
2.2 Méthodes de type Euler.....	21
2.2.1 Méthode d'Euler explicite.....	22
2.2.2 Méthode d'Euler implicite.....	23
2.2.3 Méthode d'Euler semi-implicite.....	24
2.3 Méthodes de type Runge-Kutta.....	25
2.3.1 La méthode RK2.....	25
2.3.2 La méthode RK4.....	26
2.4 Consistance, stabilité, convergence.....	28
2.4.1 Introduction.....	28
2.4.2 Consistance.....	30
2.4.3 Stabilité.....	31
2.4.4 Convergence.....	32
2.5 Discrétisation d'EDOs d'ordre 2 et plus.....	33
Chapitre 3. Différences finies pour les Équations aux Dérivées Partielles (EDPs).....	34
Objectifs.....	34

3.1	Principe.....	34
3.1.1	Discrétisation impliquant une seule dimension d'espace.....	35
3.1.2	Problèmes multidimensionnels.....	35
3.2	Méthodes pour les EDPs hyperboliques.....	37
3.2.1	Schémas décentrés amont.....	37
3.2.2	La méthode des caractéristiques.....	41
3.2.3	Le schéma de Preissmann.....	42
3.2.4	Le schéma de Crank-Nicholson.....	44
3.2.5	Stabilité des schémas.....	45
3.3	Méthodes pour les EDPs paraboliques.....	45
3.4	Méthodes pour les EDPs elliptiques.....	48
3.5	Problèmes multidimensionnels.....	49
3.5.1	Les directions alternées.....	49
3.5.2	Méthodes multidimensionnelles.....	52
3.6	Traitement des termes non-linéaires dans les schémas implicites.....	53
3.7	Consistance des schémas numériques pour EDPs – diffusion et dispersion numériques.....	54
3.7.1	Analyse de consistance des schémas pour les EDPs.....	54
3.7.2	Diffusion numérique.....	55
3.7.3	Dispersion numérique.....	55
Chapitre 4. Méthodes aux éléments finis et aux volumes finis.....		57
4.1	Eléments finis.....	57
4.2	Volumes finis.....	60
4.2.1	EDPs conservatives.....	61
4.2.2	Principe des volumes finis en une dimension d'espace.....	62
4.2.3	Application: l'équation de convection conservative.....	64
Chapitre 5. Conseils pratiques.....		65
5.1	Prise en main d'un logiciel de simulation.....	65
5.2	En cas de problème.....	65
Annexe A.....		67
Annexe B.....		70

Introduction

Pourquoi les méthodes numériques ?

Le métier d'ingénieur hydraulicien ne se conçoit guère sans l'utilisation de logiciels de modélisation de l'hydraulique (souterraine, à surface libre, en charge) et du transport (de contaminant, de sédiments, *etc.*) Ces logiciels résolvent des équations telles que l'équation de continuité, de conservation de la quantité de mouvement, de conservation de l'énergie ou de conservation de la masse.

Du fait de la complexité de la géométrie, ainsi que de la variation dans le temps ou dans l'espace des conditions aux limites, ces équations différentielles ne peuvent en général pas être résolues de façon exacte. Elles sont résolues de façon *approchée*, à l'aide des méthodes numériques.

Les méthodes numériques *ne donnent pas la solution véritable* du problème que l'on cherche à résoudre. Des méthodes numériques mal employées peuvent conduire à des résultats totalement faux, allant à l'encontre de la réalité physique (exemples typiques: concentrations négatives, création ou disparition artificielle de la masse d'eau ou de soluté dans un modèle).

Il est indispensable pour un ingénieur de posséder des notions de base sur les méthodes numériques, afin de pouvoir éviter les pièges et remédier aux problèmes les plus courants qui se posent lors de l'utilisation de modèles standards dans le cadre d'études et/ou de projets.

La matière "Méthodes Numériques Appliquées" a pour but de vous donner les connaissances de base nécessaires à la compréhension des algorithmes les plus couramment utilisés dans les logiciels de modélisation hydraulique.

Structure du cours

La matière "Méthodes Numériques Appliquées" (MNA) comprend 18 heures de cours et 18 heures de Travaux Dirigés. Les sessions s'articulent comme indiqué dans le tableau ci-dessous (les numéros indiquent les numéros de séances [1 séance = 1 h 30]) ? sous réserve de modification de l'emploi du temps. Les Travaux Dirigés impliquent l'utilisation d'Excel.

Cours TD	
1	Classification des équations différentielles
2-3	Différences finies pour les EDOs
	1-2 Application des méthodes d'Euler explicite et implicite à des EDOs du 1er ordre (réservoir linéaire, non linéaire)
4-5	Consistance, stabilité, convergence
3-4	Applications: Modèles pour la simulation de dynamique de population : méthodes RK2 et RK4.
6-7	Différences finies pour les EDPs (1): EDPs hyperboliques
	5-6 Application: convection de contaminant en rivière
8	Différences finies pour les EDPs (2): EDPs paraboliques
	7-8 Application: diffusion de contaminant en rivière (développement du modèle précédent)
9	Différences finies pour les EDPs (3): EDPs elliptiques
10	Méthodes multidimensionnelles
11-12	Volumes finis, éléments finis
	9-12 Méthode des caractéristiques pour les écoulements à surface libre

Notation

La notation suivante est employée dans ce polycopié:

- les variables scalaires symbolisées par *une seule lettre* sont notées en caractères italiques. *Ex.*: la variable U ;
- les variables scalaires, fonctions, indices, etc. symbolisés par plusieurs lettres sont notées en caractères romains (i.e. caractères “droits”, non-italiques). *Ex.*: le nombre de Courant Cr . Ceci permet de faire la différence entre Cr (le produit des deux quantités C et r) et Cr (une seule variable), ou bien entre la fonction \cos (cosinus) et le produit COS des variables C , O et S ;
- les opérateurs différentiels sont notés en caractères romains. Ceci permet de faire la différence entre dU (différentielle de la variable U) et dU (produit des deux variables d et U);
- les vecteurs et matrices sont notés en caractères gras. *Ex.*: le vecteur \mathbf{U} . Durant les cours, étant donné l'impossibilité de faire la différence au tableau entre caractères gras et caractères normaux, les vecteurs seront notés en utilisant une flèche ($\vec{\mathbf{U}}$) et les matrices sont distinguées par une double barre ($\mathbf{\bar{A}}$);
- dans un graphique, les points sont notés en caractères romains. *Ex.*: le point A . Dans le texte, on utilisera également les caractères romains pour se référer à ces points. Ceci permet de faire la distinction entre le point A et la section en travers \mathbf{A} .

Cette notation est relativement standard. Elle est utilisée dans la majorité des publications à caractère scientifique.

Chapitre 1

Classification des équations différentielles

Objectifs

À la fin de ce chapitre, vous devez pouvoir:

- donner votre propre définition des équations différentielles ordinaires (EDOs) et des équations aux dérivées partielles (EDPs),
- déterminer le type d'une EDP du second ordre,
- pour chacun des types d'EDP du second ordre, donner des exemples physiques où ce type d'EDP intervient,
- indiquer les conditions initiales et aux limites nécessaires pour résoudre ces équations.

1.1 Équations Différentielles Ordinaires (EDOs)

1.1.1 Définitions

Equations différentielles ordinaires. Une Équation Différentielle Ordinaire (EDO) est une équation faisant intervenir une fonction (inconnue) d'*une seule* variable (temps ou espace), ainsi qu'une ou plusieurs dérivées de la fonction.

Exemple: L'équation

$$\frac{dC}{dt} = -k_d C \quad (1.1)$$

où C représente la concentration d'une substance dissoute (e.g. contaminant), k_d son taux de dégradation et t le temps, est une EDO.

A noter la notation d (caractère romain) pour l'opérateur différentiel, par opposition à d (italique), qui désigne une variable.

Variable dépendante, variable indépendante (1.1) ci-dessus, la fonction inconnue $C(t)$ est appelée la variable dépendante. La variable t (par rapport à laquelle C varie) est appelée la variable indépendante.

Ordre d'une EDO l'ordre d'une EDO est défini comme celui de la dérivée la plus élevée rencontrée dans l'équation.

Exemples: l'équation (1.1) est une équation du premier ordre car la dérivée d'ordre le plus élevé est la dérivée première de A par rapport au temps. L'équation suivante

$$\frac{d^2 C}{dt^2} + a(t) \frac{dC}{dt} + b(t) = 0 \quad (1.2)$$

où a et b sont des fonctions (connues) du temps, est une EDO du deuxième ordre car la dérivée d'ordre le plus élevé est la dérivée seconde par rapport au temps.

EDOs linéaires, non-linéaires, quasi-linéaires linéaire est une EDO qui ne fait intervenir que des combinaisons linéaires des dérivées de la fonction inconnue. Une telle équation prend la forme

$$a_0 U + a_1 \frac{dU}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n U}{dt^n} = b \quad (1.3)$$

où les coefficients a_0, a_1, \dots, a_n et b sont des constantes (connues) et U est la fonction inconnue (à déterminer).

Une EDO non-linéaire est une EDO où l'une des dérivées intervient comme argument d'une fonction non-linéaire. L'équation suivante

$$c_0(U) + c_1 \left(\frac{dU}{dt} \right) + \dots + c_n \left(\frac{d^n U}{dt^n} \right) = d \quad (1.4)$$

est non-linéaire si au moins une des fonctions (connues) $c_0(x), c_1(x), \dots, c_n(x)$ n'est pas linéaire par rapport à x .

Une EDO quasi-linéaire est une équation du type (1.3) où les coefficients sont fonction de la variable dépendante (ici, U) et/ou de la variable indépendante (ici, t):

$$a_0 U + a_1 t U \frac{dU}{dt} + K + a_n \frac{d^n U}{dt^n} = b t U \quad (1.5)$$

Exemples: L'équation (1.1) est une EDO linéaire. L'équation (1.2) est une équation quasi-linéaire. L'équation suivante est une EDO non-linéaire:

$$U + \frac{5}{3t + \left(\frac{dU}{dt}\right)^2} = 0 \quad (1.6)$$

car la dérivée dU/dt est prise comme argument de la fonction non-linéaire $C_1(x) = 5/(3t + x^2)$.

Dans ce cours, seules les EDOs linéaires et quasi-linéaires seront abordées. Elles représentent une majorité des équations intervenant dans la vie de l'ingénieur hydraulicien.

Conditions initiales. La solution de l'équation (1.1) est bien connue:

$$C(t) = C_0 \exp(-kt) \quad (1.7)$$

où C_0 est la valeur de C à la date $t = 0$. Il est nécessaire de connaître C_0 pour pouvoir calculer son évolution aux dates t ultérieures. C_0 est appelée la *condition initiale*.

Pour que la solution de l'EDO soit unique, il faut que le nombre de conditions initiales [aux limites] soit égal à l'ordre de l'EDO. Ainsi, pour résoudre l'équation (1.2), deux conditions initiales sont nécessaires.

1.1.2 Exemples d'EDOs

Courbe de remous. La formule suivante permet le calcul du débit en régime uniforme:

$$Q = K_{str} A R_H^{2/3} I^{1/2} \quad (1.8)$$

où A est la section mouillée, I est la pente de la ligne d'énergie, K_{str} est le coefficient de Strickler, Q est le débit liquide et R_H est le rayon hydraulique (Cf. Fig. 1.1).

Pour un canal à section rectangulaire dont la largeur b est très grande comparée à la profondeur h , on a:

$$\left. \begin{array}{l} A = bh \\ R_H \approx h \end{array} \right\} (1.9)$$

l peut en outre être approché par:

$$l \approx l_b + \frac{dh}{dx} (1.10)$$

où l_b est la pente du fond. En substituant les Eqs. (1.9-10) dans l'Eq. (1.8), il vient:

$$Q = K_{Str} b h^{5/3} \left(l_b + \frac{dh}{dx} \right)^{1/2} (1.11)$$

L'équation (1.11) peut être considérée comme une EDO non-linéaire par rapport à h (en effet, la dérivée dh/dx apparaît dans une fonction racine carrée, qui est une fonction non-linéaire). Elle peut être facilement transformée en une équation quasi-linéaire, plus facile à résoudre, en élevant les deux membres de l'équation au carré:

$$l_b + \frac{dh}{dx} = \frac{Q^2}{K_{Str}^2 b^2 h^{10/3}} (1.12)$$

Soit:

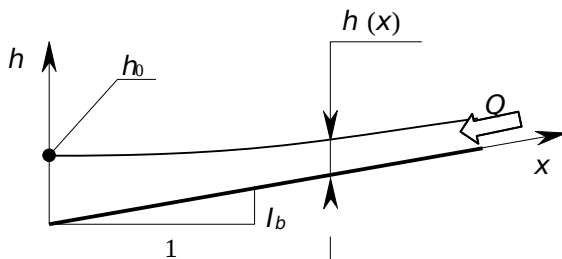


Fig. 1.1. Schéma de définition pour l'équation de courbe de remous.

$$\frac{dh}{dx} = \frac{Q^2}{K_{\text{str}}^2 b^2 h^{10/3}} - I_b \quad (1.13)$$

L'équation (1.13) est une EDO quasi-linéaire. La variable indépendante est la coordonnée d'espace x . La variable dépendante est la profondeur h . Pour qu'il soit possible de calculer la profondeur h en tout point de l'espace, une condition initiale est nécessaire (en l'occurrence, la valeur h_0 de la profondeur au point aval du bief étudié).

Modèle de Lotka-Volterra pour la dynamique des populations.

est un système de deux ODEs décrivant l'évolution dans le temps de deux populations: l'une de prédateurs, l'autre de proies (chassées par les premiers). Les équations sont dérivées des hypothèses suivantes:

- Le taux de croissance nette (natalité moins mortalité) de chaque population est indépendant de la population pour de faibles effectifs (pas d'effet de saturation de l'habitat), mais la croissance de la population de proies est limitée par la disponibilité des ressources naturelles,
- le nombre de proies tuées par les prédateurs est proportionnel au nombre de proies et de prédateurs (plus de densité = probabilité plus élevée de "rencontre"),
- la population des prédateurs croît proportionnellement au nombre de proies dévorées,
- les proies et les prédateurs sont confinés dans un espace suffisamment restreint pour que les proies soient instantanément accessibles aux prédateurs (pas d'effet retard dû à un long rayon d'action, donc la variable d'espace n'intervient pas.)

Ces hypothèses mènent au système d'équations suivant:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ax + \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= by - cy^2 - \beta xy \end{aligned} \right\} (1.14)$$

où a , b , c , α et β sont des constantes. Ce système est un système d'équations quasi-linéaires. La solution analytique présente habituellement des oscillations, avec un déphasage entre les populations des proies et des prédateurs. Le caractère non-linéaire des fonctions $-ax + \alpha xy$ et $by - cy^2 - \beta xy$ nécessite des méthodes numériques extrêmement précises, telles que les algorithmes de Runge-Kutta examinés dans la section 2.3.

1.2 Équations aux Dérivées Partielles (EDPs)

1.2.1 Définitions

Equations aux dérivées partielles (EDPs) Une équation aux dérivées partielles fait intervenir plusieurs variables indépendantes (temps et espace pour les EDPs de l'ingénieur), ainsi que les dérivées partielles de la variable dépendante (i.e. la solution recherchée) par rapport à ces variables indépendantes.

Exemple: l'équation de convection (parfois appelée advection)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (1.15)$$

est une EDP. La variable dépendante est C , les variables indépendantes sont le temps t et l'espace x . La grandeur u (homogène à une vitesse) peut (ou non) être fonction de t , x et C .

Ordre d'une EDP L'ordre d'une EDP est défini exactement de la même façon que pour une EDO: c'est l'ordre le plus élevé parmi toutes les dérivées partielles de l'EDP.

Exemples: l'EDP (1.15) est une EDP d'ordre 1 car elle ne contient que des dérivées partielles d'ordre 1 (par rapport à t ou à x). En revanche, l'EDP suivante

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0 \quad (1.16)$$

est une EDP d'ordre 2 car sa dérivée partielle d'ordre le plus élevé est une dérivée seconde (en l'occurrence par rapport à x).

EDPs linéaires, quasi-linéaires et non-linéaires. Les définitions sont les mêmes que pour les EDOs (se reporter à la sous-section 1.1.1).

Conditions initiales, conditions aux limites Contrairement aux EDOs, les conditions initiales ne suffisent pas à assurer l'unicité de la solution. Il faut également fournir des conditions aux limites. Pour certains types d'équations (Ex. EDPs elliptiques), le concept de condition initiale n'a pas de sens. Les conditions initiales et les conditions aux limites se distinguent de la manière suivante :

- une condition initiale s'applique pour une valeur donnée (et unique)

d'une variable indépendante. A partir de cette condition initiale, il est possible de déduire la solution pour toutes les autres valeurs de la variable indépendante.

Ainsi, dans l'équation de dégradation (1.1), dont la solution est donnée par (1.7), la valeur C_0 à $t = 0$ est une condition initiale car sa connaissance permet de déduire la valeur de C à toutes les autres dates t . De même, dans l'équation de courbe de remous (1.13), h_0 est une condition initiale car, à partir de cette valeur, il est possible de déduire h en tout autre point de l'espace.

- une condition aux limites est appliquée en tout point de la frontière du domaine sur lequel on souhaite résoudre les équations (et non en un point unique). Il n'est pas possible de déterminer la solution en partant simplement d'un seul point de la limite du domaine et en progressant à l'intérieur de celui-ci, car la solution est également conditionnée par sa valeur en tous les autres points de la frontière.

Ainsi, pour résoudre l'équation (1.16) sur un domaine $[x_1, x_2]$, il est nécessaire d'imposer C (ou son gradient) en x_1 et en x_2 (et non uniquement en x_1 ou x_2).

1.2.2 Classification des EDPs du second ordre

Les EDPs du second ordre représentent une classe importante des EDPs du monde de l'ingénierie (et de la mécanique des fluides en particulier). La partie 'EDPs' de ce cours traite des EDPs du second ordre. On considèrera uniquement des EDPs quasi-linéaires:

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + B \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + D \frac{\partial U}{\partial X} + E \frac{\partial U}{\partial Y} + F = 0 \quad (1.17)$$

où A, B, \dots, F sont des fonctions de X, Y et U . X et Y sont les variables indépendantes (ce pourrait être t, x, y , etc.) de l'EDP et U est la variable dépendante. Selon la valeur des coefficients A, B et C , l'EDP est dite hyperbolique, parabolique ou elliptique.

EDPs hyperboliques EDP du type (1.17) est dite hyperbolique si son discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$ est strictement positif.

Exemple: l'équation suivante est du type hyperbolique:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \lambda^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (1.18)$$

En effet, (1.18) peut être mise sous la forme (1.17) en posant $X = t$, $Y = x$, $A = 1$, $C = -\lambda^2$, et $B = D = E = F = 0$. Il est facile de vérifier que $B^2 - 4AC = \lambda^2 > 0$. A noter que λ est homogène à une vitesse.

EDPs paraboliques. Une EDP du type (1.17) est dite parabolique si son discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$ est nul.

Exemple: l'équation suivante est du type parabolique:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad v \text{ positif} \quad (1.19)$$

En effet, (1.19) peut être mise sous la forme (1.17) en posant $X = t$, $Y = x$, $D = 1$, $C = v$, et $A = B = E = F = 0$. On vérifiera que $B^2 - 4AC = 0$.

EDPs elliptiques. Une EDP du type (1.17) est dite elliptique si son discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$ est strictement négatif.

Exemple: l'équation suivante est du type elliptique:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = Q \quad (\text{équation de la chaleur}) \quad (1.20)$$

En effet, (1.20) peut être mise sous la forme (1.17) en posant $X = t$, $Y = x$, $A = C = 1$, et $B = D = E = F = 0$. On peut vérifier que $B^2 - 4AC < 0$.

Une aide mnémotechnique. La « technique » suivante peut être utilisée pour déterminer la nature d'une EDP du second ordre: il suffit, dans l'équation originale, de remplacer les dérivées $\partial^p U / \partial X^p$ ($p = 1, 2$) par X^p , les dérivées $\partial^p U / \partial Y^p$ ($p = 1, 2$) par Y^p et le second membre par une constante. Ainsi, (1.17) devient:

$$AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = \text{Cst} \quad (1.21)$$

L'équation (1.21) est l'équation d'une courbe conique dans le plan (X, Y) . Si cette courbe est une ellipse, l'EDP est elliptique; si la courbe est une parabole, l'EDP est parabolique; enfin, si la courbe est une hyperbole, l'EDP est hyperbolique.

Exemples: en appliquant la méthode ci-dessus à l'équation (1.18), on obtient:

$$T^2 - \lambda^2 X^2 = \text{Cst} \quad (1.22)$$

qui est l'équation d'une courbe hyperbolique dans le plan (X, T) (Cf. Fig. 1.2). L'équation (1.19) est transformée par la même méthode en:

$$T - vX^2 = \text{Cst} \quad (1.23)$$

qui est l'équation d'une parabole dans le plan (X, T) (Cf. Fig. 1.3). Enfin, l'équation (1.20) devient :

$$X^2 + Y^2 = \text{Cst} \quad (1.24)$$

qui est l'équation d'un cercle de rayon $\text{Cst}^{1/2}$ (cas particulier d'une ellipse) dans le plan (X, Y) (Cf. Fig. 1.4).

EDPs du second ordre impliquant plus de deux variables indépendantes.

Le principe de classification des EDPs reste le même quand on se trouve en présence de 3 (ou 4) variables indépendantes. Par exemple, l'EDP (1.18) peut être généralisée à deux dimensions d'espace :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \lambda_x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \lambda_y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (1.25)$$

où λ_x et λ_y sont les vitesses de propagation des ondes dans les directions x et y (elles sont égales dans un milieu isotrope). En utilisant la transformation exposée dans le paragraphe précédent, on obtient :

$$T^2 - \lambda_x^2 X^2 - \lambda_y^2 Y^2 = \text{Cst} \quad (1.26)$$

qui est l'équation d'un hyperboloïde de révolution d'axe T dans l'espace (X, Y, T) (Cf. Fig. 1.5). L'équation (1.25) est donc du type hyperbolique. De même, la généralisation de l'équation (1.19) à deux dimensions d'espace

$$\frac{\partial U}{\partial t} - v_x \frac{\partial U}{\partial x} - v_y \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad v_x \text{ et } v_y \text{ positifs} \quad (1.27)$$

est transformée en :

$$T - v_x X^2 - v_y Y^2 = \text{Cst} \quad (1.28)$$

qui est la formule d'un parabolicoïde de révolution d'axe T dans l'espace (X, Y, T) . (1.27) est donc une EDP parabolique. Enfin, (1.20) est généralisée pour trois dimensions d'espace en :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = Q \quad (1.29)$$

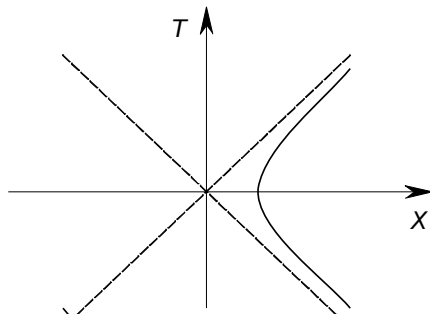


Fig. 1.2. Représentation dans le plan (X, T) d'une courbe d'équation $T^2 - u^2 X^2 = \text{Cst}$.

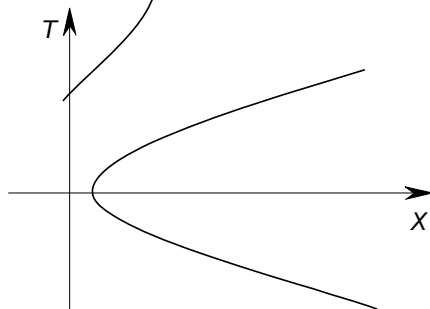


Fig. 1.3. Représentation dans le plan (X, T) d'une courbe d'équation $T^2 - v X^2 = \text{Cst}$.

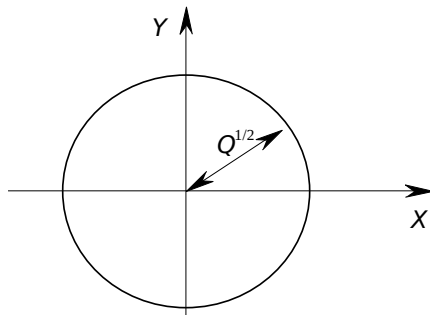


Fig. 1.4. Représentation dans le plan (X, Y) d'une courbe d'équation $X^2 + Y^2 = \text{Cst}$.

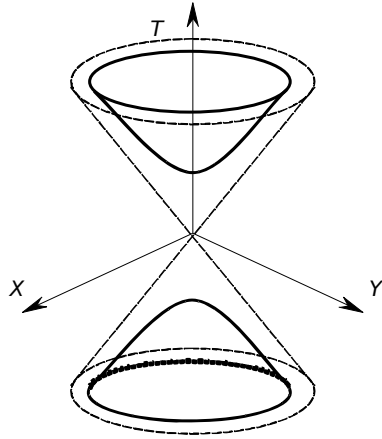


Fig. 1.5. Représentation dans l'espace (X, Y, T) d'une courbe d'équation $T^2 - \lambda_x^2 X^2 - \lambda_y^2 Y^2 = \text{Cst}$.

Cette équation se transforme en

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \text{Cst} \quad (1.30)$$

qui est l'équation d'une sphère (cas particulier d'un ellipsoïde) dans l'espace (X, Y, Z) . (1.29) est par conséquent une équation elliptique.

1.2.3 Besoins en termes de conditions initiales et aux limites

EDPs hyperboliques EDPs hyperboliques abordées dans ce cours comprendront en général une variable de temps et une (ou deux) d'espace. Elles seront de la forme (1.18). On cherche une solution de (1.18) en tout point d'un domaine de calcul $\Omega = [x_1, x_2]$ et pour des dates $t \geq 0$. Pour pouvoir déterminer la solution de (1.18) de façon unique, il faut connaître:

- la valeur de U en tout point du domaine de calcul à $t = 0$ (condition initiale);
- la valeur de U à toute date $t \geq 0$ aux limites du domaine (conditions aux limites).

On verra plus loin (sous-section 1.2.4) que certaines EDP hyperboliques n'ont

besoin que d'une condition à la limite (cas particulier de l'équation de convection).

EDPs paraboliques La plupart des EDPs paraboliques de l'ingénieur hydraulicien sont d'ordre 1 par rapport au temps et d'ordre 2 par rapport à une (ou plusieurs) dimension(s) d'espace. C'est le cas de l'équation (1.19). Les conditions aux limites nécessaires à l'existence et l'unicité de la solution sont les mêmes que pour les EDPs hyperboliques.

EDPs elliptiques EDPs elliptiques étudiées dans ce cours impliquent 2 (ou 3) dimensions de l'espace et aucune de temps. Cela signifie que la solution ne dépend pas du temps. Dans ce cas, seules des conditions aux limites sont nécessaires.

1.2.4 Exemples d'EDPs hyperboliques

Les EDPs hyperboliques décrivent des phénomènes de propagation d'onde(s) *sans atténuation*, telles que le transport par convection, les ondes acoustiques ou cinématiques.

Transport par convection L'équation de convection (parfois appelée advection pour la distinguer de la convection thermique) s'écrit:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (1.31)$$

où U est la variable transportée (*Ex.*: concentration en contaminant, température, DBO) et λ est la vitesse de propagation (*Ex.*: vitesse moyenne du courant dans une rivière). Si la vitesse de propagation λ dépend de U , l'équation (1.25) est aussi appelée équation d'onde cinématique.

A première vue, cette équation ne peut être classée comme hyperbolique, parabolique ou elliptique car elle est seulement d'ordre 1. Cependant, elle peut être transformée en une EDP du second ordre en suivant la procédure suivante:

1) Dérivation de (1.31) par rapport à t . On obtient:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} = 0 \quad (1.32)$$

2) Dérivation de (1.31) par rapport à x . On obtient:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (1.33)$$

3) (1.33) peut être réécrite sous la forme:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\lambda \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (1.34)$$

4) En substituant (1.34) dans (1.32), on obtient l'équation (1.18)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \lambda^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$$

qui est une EDP hyperbolique (Cf. sous-section 1.2.2).

N.B.: L'équation du premier ordre (1.31) et l'équation du second ordre (1.18) *ne sont pas équivalentes*. (1.31) mène à (1.18), mais l'inverse n'est pas vrai. En effet, on peut vérifier que (1.18) peut aussi être obtenue à partir de l'équation suivante:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \lambda \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (1.35)$$

qui exprime la convection à une vitesse $-\lambda$ (au lieu de $+\lambda$). La solution de (1.31) vérifie donc (1.18), mais l'inverse n'est pas forcément vrai!

Propagation d'ondes acoustiques L'équation (1.18) décrit la propagation d'ondes acoustiques:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \lambda^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$$

où U est la pression (propagation du son dans un fluide) ou le déplacement par rapport à une position de référence (propagation du son dans un milieu solide élastique, vibration d'une corde). D'après le paragraphe précédent, on peut conclure que la solution de (1.18) est formée par la somme d'une solution de l'équation (1.31) (c.à.d. d'une onde se propageant à la vitesse $+\lambda$) et d'une solution de (1.35) (c.à.d. d'une onde se propageant à la vitesse $-\lambda$).

1.2.5 Exemples d'EDPs paraboliques

Les EDPs paraboliques décrivent en général des phénomènes de diffusion, c.à.d.

des phénomènes de transport générés par un gradient (de concentration, de charge hydraulique, etc.)

Diffusion de polluant (1.19), rappelée ci-dessous

$$S \frac{\partial U}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \nu \text{ positif}$$

peut être utilisée pour exprimer la diffusion d'un contaminant dans un fluide. Dans ce cas, U sera la concentration en contaminant et ν le coefficient de diffusion, parfois appelé diffusivité.

Écoulements souterrains transitoires. L'équation d'évolution de la charge hydraulique dans un aquifère s'écrit, pour deux dimension d'espace:

$$S \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.36)$$

où h est la charge hydraulique, S le coefficient d'emmagasinement et T_x, T_y les transmissivités dans les directions x et y respectivement. (1.36) peut être développée en:

$$S \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial T_x}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial T_y}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} - T_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - T_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (1.37)$$

qui est une EDP parabolique.

1.2.6 Exemples d'EDPs elliptiques

En général, les EDPs elliptiques de l'ingénieur sont obtenues à partir d'EDPs paraboliques en faisant l'hypothèse de régime permanent. Elles décrivent donc les mêmes phénomènes physiques que les EDPs paraboliques, avec une hypothèse supplémentaire d'état d'équilibre.

Écoulements souterrains permanents. Étant donné que l'écoulement dans l'aquifère est permanent, $\partial h / \partial t = 0$ et l'équation (1.36) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.38)$$

que l'on peut développer comme suit:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + T_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (1.39)$$

On vérifie que cette EDP est elliptique.

Equation de la chaleur L'équation de la chaleur en régime permanent s'écrit, pour trois dimensions d'espace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (1.40)$$

Cette EDP est également elliptique.

1.2.7 Équations 'mixtes'

Un grand nombre d'EDPs de l'ingénieur contiennent à la fois des termes paraboliques, hyperboliques et même parfois des termes venant d'EDOs.

Equation de convection-diffusion-dégradation de contaminant. L'équation de transport d'un contaminant en présence d'advection, diffusion et dégradation s'écrit:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = -k_D C \quad (1.41)$$

où C est la concentration en contaminant, D est la diffusivité, k_D est le coefficient de dégradation (cinétique linéaire) et u est la vitesse de l'écoulement. Cette équation peut être vue comme la combinaison des effets de l'EDP hyperbolique de convection

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (1.42)$$

ainsi que de l'EDP parabolique de diffusion

$$\frac{\partial C}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0 \quad (1.43)$$

et enfin, de l'EDO de dégradation (1.1)

$$\frac{dC}{dt} = -k_D C$$

Chapitre 2

Différences finies pour les Equations Différentielles Ordinaires (EDOs)

Objectifs

À la fin de ce chapitre, vous devez pouvoir:

- expliquer en vos propres termes le principe de la discrétisation et des différences finies pour la résolution des équations différentielles ordinaires,
- expliquer ce qu'est un schéma explicite ou implicite,
- expliquer en termes simples les notions de consistance, de stabilité et de convergence,
- discrétiser une EDO (ou un système d'EDOs) du premier ordre à l'aide des méthodes d'Euler, d'Euler implicite et RK2,
- indiquer la limite de stabilité de la solution numérique en termes de pas de temps (ou d'espace).

2.1 Principe général: discrétisation de l'espace ou du temps

Principe. Lorsque l'on recherche la solution d'une EDO, on suppose implicitement que la fonction inconnue U est continue par rapport à la variable indépendante (sinon, il serait impossible de définir une dérivée, une dérivée seconde, *etc.*) Mais une hypothèse encore plus forte (si évidente qu'elle n'est quasiment jamais mentionnée) est que la variable indépendante est elle-même continue. Ainsi, pour l'équation (1.13) de la courbe de remous

$$\frac{dh}{dx} = \frac{Q^2}{K_{\text{Str}}^2 b^2 h^{10/3}} I_b$$

on suppose que la hauteur d'eau h est non seulement continue, mais également définie pour toute valeur de la coordonnée d'espace x .

Au contraire, lorsque l'on veut résoudre numériquement une EDO, on cherche à déterminer la valeur de la solution à des dates (si la variable indépendante est le temps) ou des points (si la variable indépendante est l'espace) définis à l'avance. La solution numérique n'a de sens qu'en ces dates (ou ces points). On a transformé les variables indépendante et dépendante *continues* en des variables indépendante et dépendante *discrètes*. Cette transformation est appelée la *discrétisation* (Fig. 2.1).

Dans une EDO comme (1.13), la hauteur h et sa dérivée dh/dx seront estimées en utilisant les valeurs discrétisées de h et x . Dans la version discrétisée des équations, les points de calcul sont désignés par des indices et les dates de calcul par des exposants.

Exemple Dans (1.13), la dérivée dh/dx peut être approchée comme suit entre x et x_{i+1} :

$$\frac{dh}{dx} \approx \frac{h(x_{i+1}) - h(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad (2.1)$$

où x_i et x_{i+1} sont les valeurs de x où l'on souhaite calculer la solution. Souvent, (2.1) sera réécrite sous la forme

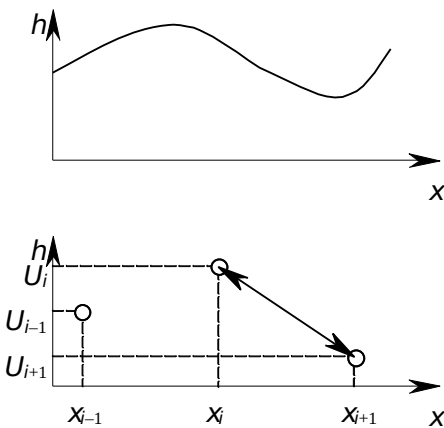


Fig. 2.1. Principe de la discrétisation.

$$\frac{dh}{dx} \approx \frac{h_{i+1} - h_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (2.2)$$

A noter que (2.2) peut être vue comme une approximation de dh/dx à mi-distance entre i et $i + 1$. Ce n'est pas la seule approximation possible de dh/dx ; il existe de nombreuses autres possibilités.

Définitions et notations Les définitions et notations suivantes sont les plus couramment employées dans les articles et ouvrages que vous serez amenés à lire à l'avenir.

- Solution analytique: la solution analytique d'une ODE est la solution de l'ODE véritable.
- Solution numérique : la solution numérique d'une ODE est celle que l'on obtient en résolvant la version discrétisée de l'ODE.
- Schéma numérique : ce terme désigne la manière dont on discrétise l'ODE (et non pas l'ODE discrétisée elle-même : le même schéma numérique peut être appliqué à différentes ODEs).
- Date (ou temps) de calcul : les dates successives où la solution numérique est censée être calculée (quand la variable indépendante de l'ODE est le temps).
- Point de calcul : les points où la solution numérique est censée être calculée (pour une ODE dont la variable indépendante est l'espace).
- Notation des variables discrétisées : dans la majorité des publications (livres ou articles), on utilise un indice (i ou j) pour identifier les points de calcul et un exposant (généralement n) pour les dates de calcul.
- Pas d'espace : la distance entre deux points de calcul successifs (la quantité $x_{i+1} - x_i$ dans l'équation (2.2)). Le pas d'espace est le plus souvent noté Δx , Δy ou Δz (selon que la variable d'espace est x , y ou z).
- Pas de temps : la différence entre deux dates successives où l'on cherche à calculer la solution (si le temps est une variable indépendante).

2.2 Méthodes de type Euler

Cette section présente une des méthodes les plus anciennes (sinon la plus ancienne) de résolution d'une EDO du premier ordre : la méthode d'Euler. Il existe deux types de méthodes d'Euler : explicite et implicite (aussi dite méthode d'Euler améliorée). Elles sont présentées dans les sous-sections suivantes. Dans les deux cas, on cherche à résoudre des équations du type :

$$\frac{dU}{dt} = f(U, t) \quad (2.3)$$

où f est une fonction *connue* de U et de t . A noter que la variable indépendante pourrait aussi être x , y ou z .

2.2.1 Méthode d'Euler explicite

Principe Dans la méthode d'Euler explicite, (2.3) est discrétisée comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{dt} &\approx \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \\ f(U, t) &\approx f(U^n, t^n) \end{aligned} \right\} (2.4)$$

où U^n est la valeur (connue) de U à la date t^n , U^{n+1} est la valeur (encore inconnue, que l'on désire calculer) de U à la date t^{n+1} , $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ est le pas de temps.

En remplaçant (2.4) dans (2.3), il vient :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = f(U^n, t^n) \quad (2.5)$$

Cette équation se réécrit :

$$U^{n+1} = U^n + f(U^n, t^n) \Delta t \quad (2.6)$$

Puisque U^n est connue et que la fonction f l'est aussi, $f(U^n, t^n)$ l'est également. U^{n+1} peut être déterminée directement d'après U^n . La méthode numérique est dite *explicite* car la valeur de U à la date $n + 1$ peut être déterminée explicitement à partir de la valeur de U à la date n .

Exemple. On applique la méthode d'Euler explicite à l'EDO de dégradation (1.1) rappelée ci-dessous :

$$\frac{dC}{dt} = -k_D C$$

(1.1) peut s'écrire sous la forme (2.3) en posant :

$$\left. \begin{aligned} U &= C \\ f(U) &= -k_D C \end{aligned} \right\} (2.7)$$

(1.1) est discrétisée suivant l'approche (2.4) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dC}{dt} &\approx \frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} \\ -k_D C &\approx -k_D C^n \end{aligned} \right\} (2.8)$$

En remplaçant (2.8) dans (1.1), on obtient :

$$\frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} = -k_D C^n \quad (2.9)$$

soit, conformément à (2.6) :

$$C^{n+1} = (1 - k_D \Delta t) C^n \quad (2.10)$$

2.2.2 Méthode d'Euler implicite

Principe. Dans la méthode d'Euler implicite, (2.3) est discrétisée comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{dt} &\approx \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \\ f(U, t) &\approx f(U^{n+1}, t^{n+1}) \end{aligned} \right\} (2.11)$$

A la différence de la méthode explicite, f est maintenant calculée à partir de la valeur (*inconnue*) de U à la date t^{n+1} . En remplaçant (2.11) dans (2.3), il vient :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = f(U^{n+1}, t^{n+1}) \quad (2.12)$$

Cette équation peut être réécrite comme suit :

$$U^{n+1} - f(U^{n+1}, t^{n+1}) \Delta t = U^n \quad (2.13)$$

Contrairement au cas explicite, cette formulation lie la valeur (*inconnue*) U^{n+1} à une fonction de cette valeur même. On dit aussi que U^{n+1} est définie *implicitement*. Cette méthode est *implicite*. En général (sauf expression particulièrement simple de la fonction f), la résolution de (2.13) impose d'avoir recours à des méthodes itératives (de type Newton).

Exemple On applique la méthode d'Euler implicite à l'EDO de dégradation (1.1). En appliquant (2.4) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dC}{dt} &\approx \frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} \\ -k_D C &\approx -k_D C^{n+1} \end{aligned} \right\} (2.14)$$

En remplaçant (2.14) dans (1.1), on obtient :

$$\frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} = -k_D C^{n+1} \quad (2.15)$$

soit, conformément à (2.13) :

$$C^{n+1} + k_D \Delta t C^{n+1} = C^n \quad (2.16)$$

La simplicité de la fonction f permet d'obtenir une expression analytique pour C^{n+1} :

$$C^{n+1} = \frac{C^n}{1 + k_D \Delta t} \quad (2.17)$$

2.2.3 Méthode d'Euler semi-implicite

Principe À partir des deux méthodes d'Euler présentées précédemment, il est possible d'en dériver une troisième, où la dérivée est estimée comme une combinaison linéaire des deux méthodes précédentes. Pour cette raison, la méthode est dite semi-implicite.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{dt} &\approx \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \\ f(U, t) &\approx (1 - \theta) f(U^n, t^n) + \theta f(U^{n+1}, t^{n+1}) \end{aligned} \right\} (2.18)$$

où θ est un paramètre, dit d'implication, variant entre 0 et 1. On retrouve la méthode d'Euler explicite pour $\theta = 0$ et la méthode d'Euler implicite pour $\theta = 1$. En remplaçant (2.18) dans l'équation originale, on obtient :

$$U^{n+1} - \theta \Delta t f(U^{n+1}, t^{n+1}) = U^n + (1 - \theta) \Delta t f(U^n, t^n) \quad (2.19)$$

Le paramètre d'implication θ est souvent pris égal à 1/2 car ce choix permet d'augmenter l'ordre de la méthode (Cf. 2.4.2), donc sa précision. Comme pour la méthode implicite, il peut être nécessaire d'avoir recours à des méthodes itératives lorsque l'expression de f est compliquée.

Exemple On applique la méthode d'Euler semi-implicite à l'EDO de dégradation (1.1). (1.1) est discrétisée suivant l'approche (2.18) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dC}{dt} &\approx \frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} \\ -k_D C &\approx -(1 - \theta) k_D C^n - \theta k_D C^{n+1} \end{aligned} \right\} (2.20)$$

En remplaçant dans (1.1), on obtient :

$$\frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} = -(1-\theta)k_D C^n - \theta k_D C^{n+1} \quad (2.21)$$

Cette équation se réécrit sous la forme (2.19) :

$$C^{n+1} + \theta k_D \Delta t C^{n+1} = C^n - (1-\theta)k_D \Delta t C^n \quad (2.22)$$

Dans ce cas particulier, la simplicité de l'équation permet d'obtenir une solution analytique :

$$C^{n+1} = \frac{1 - (1-\theta)k_D \Delta t}{1 + \theta k_D \Delta t} C^n \quad (2.23)$$

Pour $\theta = 1/2$, (2.22) devient :

$$C^{n+1} = \frac{1 - \frac{k_D \Delta t}{2}}{1 + \frac{k_D \Delta t}{2}} C^n \quad (2.24)$$

2.3 Méthodes de type Runge-Kutta

Les méthodes de type Runge-Kutta permettent d'obtenir une plus grande précision que les méthodes d'Euler (dans le sens où elles donnent en général des solutions numériques plus proches des solutions analytiques que les méthodes d'Euler). Cette précision est obtenue par l'utilisation d'un pas de calcul intermédiaire. On évite alors l'inconvénient de méthodes du type Euler semi-explicite qui demandent le concours de méthodes itératives.

Les deux méthodes de Runge-Kutta les plus employées sont l'algorithme dit 'RK2' à deux pas de calcul et l'algorithme dit 'RK4' à quatre pas de calcul.

2.3.1 La méthode RK2

Principe On cherche à résoudre une EDO du type (2.3)

$$\frac{dU}{dt} = f(U, t)$$

L'algorithme RK2 se décompose comme suit :

- 1) Utiliser la méthode d'Euler explicite sur un demi pas de temps de calcul.

On obtient la valeur intermédiaire $U^{n+1/2}$:

$$U^{n+1/2} = U^n + \frac{\Delta t}{2} f(U^n, t^n) \quad (2.25)$$

- 2) Cette valeur intermédiaire est utilisée pour actualiser la valeur de la dérivée :

$$f^{n+1/2} = f(U^{n+1/2}, t^{n+1/2}) \quad (2.26)$$

- 3) Utiliser la valeur actualisée de la dérivée dans la méthode d'Euler explicite sur la totalité du pas de temps de calcul :

$$U^{n+1} = U^n + f^{n+1/2} \Delta t \quad (2.27)$$

Exemple On applique la méthode RK2 à l'EDO de dégradation (1.1). Les différentes étapes de l'algorithme ci-dessus sont appliquées l'une après l'autre :

- 1) Calcul de la solution au pas de temps intermédiaire. La méthode d'Euler explicite appliquée sur un pas de temps $\Delta t/2$ donne (Cf. Eq. (2.10)) :

$$C^{n+1/2} = \left(1 - \frac{k_D \Delta t}{2}\right) C^n \quad (2.28)$$

- 2) Calcul de la dérivée actualisée :

$$f^{n+1/2} = -k_D C^{n+1/2} = -\left(1 - \frac{k_D \Delta t}{2}\right) k_D C^n \quad (2.29)$$

- 3) Calcul de la solution à la date t^{n+1} par la méthode d'Euler explicite en utilisant la valeur actualisée de la dérivée :

$$\begin{aligned} C^{n+1} &= C^n + f^{n+1/2} \Delta t \\ &= \left[1 - \left(1 - \frac{k_D \Delta t}{2}\right) k_D \Delta t\right] C^n \quad (2.30) \\ &= \left[1 - k_D \Delta t + \frac{k_D \Delta t^2}{2}\right] C^n \end{aligned}$$

2.3.2 La méthode RK4

Principe : l'algorithme de la méthode RK4 est le suivant :

1) Calculer une première variation de U à partir de U^n et t^n :

$$\Delta U_1 = \Delta t f(U^n, t^n) \quad (2.31)$$

2) Mettre à jour cette variation en se plaçant au milieu du pas de temps :

$$\Delta U_2 = \Delta t f(U^n + \Delta U_1 / 2, t^n + \Delta t / 2) \quad (2.32)$$

3) Répéter l'opération :

$$\Delta U_3 = \Delta t f(U^n + \Delta U_2 / 2, t^n + \Delta t / 2) \quad (2.33)$$

4) La dernière variation de U est calculée à partir de la date $n + 1$:

$$\Delta U_4 = \Delta t f(U^n + \Delta U_3, t^n + \Delta t) \quad (2.34)$$

La valeur de U à la date t^{n+1} est donnée par :

$$U^{n+1} = U^n + \frac{1}{6} (\Delta U_1 + 2\Delta U_2 + 2\Delta U_3 + \Delta U_4) \quad (2.35)$$

Exemple On applique la méthode RK4 à l'équation (1.1) :

1) Calcul de ΔC_1 :

$$\Delta C_1 = -\Delta t k_D C^n \quad (2.36)$$

2) Calcul de ΔC_2 :

$$\Delta C_2 = -\Delta t k_D (C^n + \Delta C_1 / 2) = \left[-\Delta t k_D + \frac{(\Delta t k_D)^2}{2} \right] C^n \quad (2.37)$$

3) Calcul de ΔC_3 :

$$\begin{aligned} \Delta C_3 &= -\Delta t k_D (C^n + \Delta C_2 / 2) \\ &= \left[-\Delta t k_D + \frac{(\Delta t k_D)^2}{2} - \frac{(\Delta t k_D)^3}{4} \right] C^n \quad (2.38) \end{aligned}$$

4) Calcul de ΔC_4 :

$$\begin{aligned} \Delta C_4 &= -\Delta t k_D (C^n + \Delta C_3) \\ &= \left[-\Delta t k_D + (\Delta t k_D)^2 - \frac{(\Delta t k_D)^3}{2} + \frac{(\Delta t k_D)^4}{6} \right] C^n \quad (2.39) \end{aligned}$$

Calcul de C^{n+1} en remplaçant (2.36-39) dans (2.35) :

$$C^{n+1} = \left[1 - k_D \Delta t + \frac{(k_D \Delta t)^2}{2} - \frac{(k_D \Delta t)^3}{6} + \frac{(k_D \Delta t)^4}{24} \right] C^n \quad (2.40)$$

On retrouve bien le développement en série de Taylor au 4^{ème} ordre.

2.4 Consistance, stabilité, convergence

2.4.1 Introduction

Les équations (2.10), (2.17), (2.23), (2.30) et (2.40) représentent cinq discrétisations possibles de l'équation de dégradation (1.1). On rappelle que la solution analytique de (1.1) est :

$$C(t) = C^0 \exp(-k_D t) \quad (2.41)$$

où C^0 est la valeur de C à la date $t = 0$. En posant $t = n \Delta t$, on obtient pour la solution analytique

$$\left. \begin{aligned} C^n &= C^0 \exp(-k_D n \Delta t) \\ C^{n+1} &= C^0 \exp(-k_D (n+1) \Delta t) \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

D'après (2.41), on a :

$$C^{n+1} = C^n \exp(-k_D \Delta t) \quad (2.43)$$

On notera que les équations (2.10), (2.17), (2.23), (2.30) et (2.40) représentent toutes des approximations de (2.43). En effet, un développement limité de (2.43) par rapport à $k_D \Delta t$ donne :

$$C^{n+1} = \left[1 - k_D \Delta t + \frac{(k_D \Delta t)^2}{2} - \frac{(k_D \Delta t)^3}{6} + L \right] C^n \quad (2.44)$$

On notera que (2.10) et (2.17) n'approchent (2.43) qu'à l'ordre 1 par rapport à Δt , alors que (2.30) et (2.40) l'approchent à l'ordre 2, de même que la méthode semi-implicite avec $\theta = 1/2$. Les discrétisations RK2 (2.30) et RK4 (2.40) peuvent donc être considérées comme plus précises que les deux méthodes d'Euler. On peut cependant se demander si la *solution numérique* donnée par (2.40) sera plus précise que les solutions numériques obtenues par les deux méthodes d'Euler.

On applique à présent les méthodes d'Euler et RK2 à l'équation (1.1) avec les

paramètres du Tableau 2.1.

Tableau 2.1. Paramètres de simulation

Symbole	Signification	Valeur
C^0	Concentration initiale en contaminant	1 $\mu\text{g/l}$
k_D	Coefficient de dégradation	1 /mois
Δt	Pas de temps de calcul	0,2 mois, 0,5 mois, 1 mois et 2,1 mois

La Figure 2.2 montre les solutions numériques obtenues avec les différentes méthodes. Le pas de temps de 0,2 mois donne une solution de qualité acceptable pour les trois méthodes, avec une meilleure précision pour la solution RK2 ;

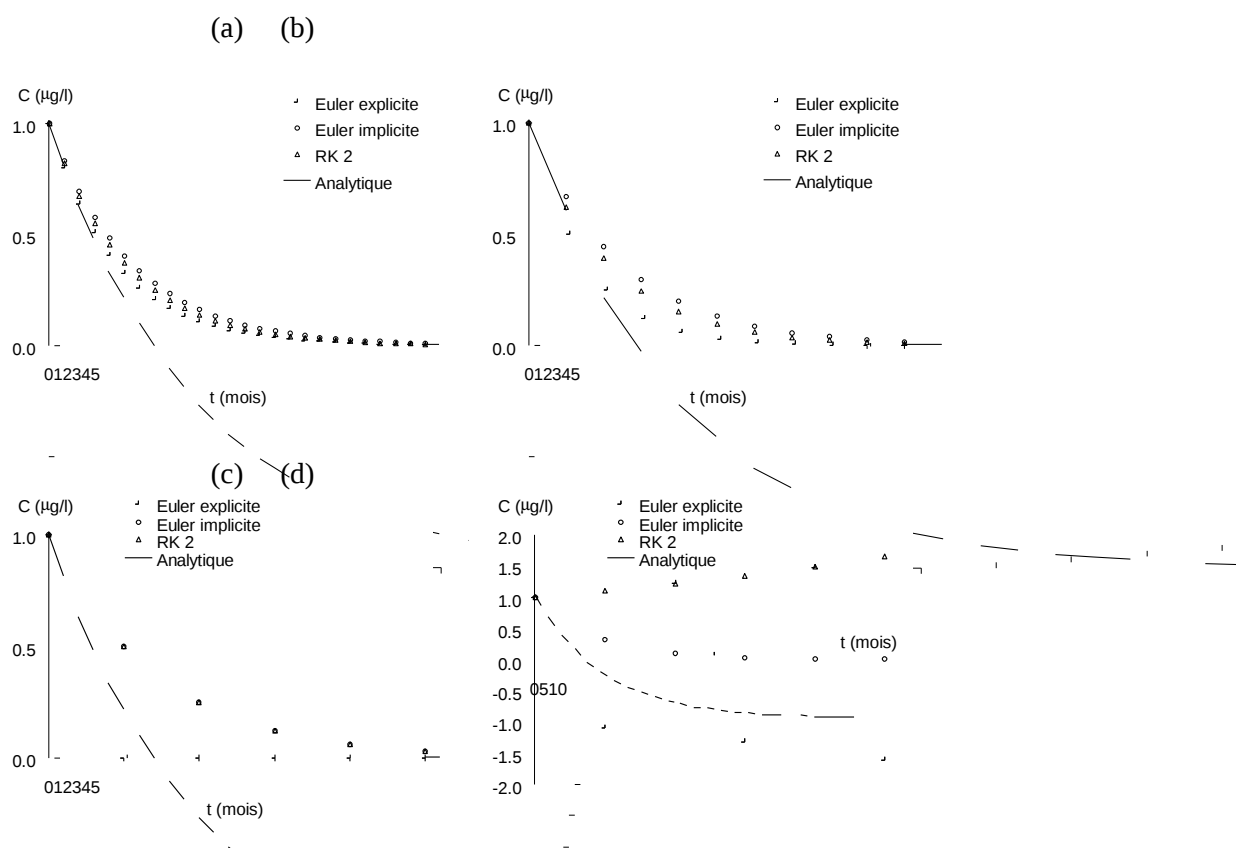


Fig. 2.2. Solution analytique et solutions numériques obtenues pour un pas de temps $\Delta t = 0,2$ mois (a), 0,5 mois (b), 1 mois (c) et 2,1 mois (d).

pour un pas de temps de 0,5 mois, la méthode RK2 approche la solution analytique de façon relativement précise, mais les méthodes Euler sont fort imprécises ; pour un pas de temps de 1 mois, la méthode d'Euler explicite donne une concentration égale à zéro dès le second pas de temps de calcul et les méthodes d'Euler implicite et RK2 surestiment largement la solution ; enfin, pour un pas de temps de calcul de 2,1 mois, les méthodes RK2 et Euler explicite « divergent » (on parle d'instabilité) alors que la solution obtenue par la méthode d'Euler implicite décroît vers zéro, mais en surestimant largement la solution. Cet exemple donne un aperçu des problèmes typiques rencontrés lors de l'utilisation des méthodes numériques : une méthode très précise avec un faible pas de temps de calcul (ou un petit pas d'espace) peut devenir extrêmement imprécise dès que l'on accroît le pas de temps (ou le pas d'espace). Il servira de base pour la présentation des concepts essentiels de consistance, de stabilité et de convergence qui permettent de comprendre le comportement des méthodes numériques.

2.4.2 Consistance

Définitions. La consistance est une propriété de la discrétisation. On dit que l'EDO discrétisée est consistante par rapport à l'EDO réelle si elle tend vers elle lorsque Δt (resp. Δx) tend vers 0.

La différence entre l'équation discrétisée et l'équation réelle est appelée l'erreur de troncature.

Principe de l'analyse de consistance. La consistance d'une discrétisation s'analyse en effectuant un développement en série de Taylor de l'équation discrétisée et en vérifiant que celle-ci tend vers l'EDO originale lorsque Δt (ou Δx) tend vers 0.

Exemple La méthode d'Euler explicite appliquée à l'équation (1.1) donne l'équation (2.10), rappelée ici :

$$C^{n+1} = (1 - k_D \Delta t) C^n$$

On exprime C^{n+1} à partir de C^n en effectuant un développement en série de Taylor par rapport au temps :

$$C^{n+1} = C^n + \Delta t \frac{dC}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 C}{dt^2} + \dots + \frac{\Delta t^p}{p!} \frac{d^p C}{dt^p} + \dots \quad (2.45)$$

l'équation (2.45) peut s'écrire comme suit :

$$C^{n+1} = C^n + \Delta t \frac{dC}{dt} + \text{HOT}(\Delta t) \quad (2.46)$$

où $\text{HOT}(\Delta t)$ est un polynôme contenant des termes d'ordre 2 et plus en Δt . En remplaçant (2.46) dans (2.10) ci-dessus, on obtient :

$$C^n + \Delta t \frac{dC}{dt} + \text{HOT}(\Delta t) = (1 - k_D \Delta t) C^n \quad (2.47)$$

Les termes C^n s'éliminent ; en divisant (2.47) par Δt , on obtient :

$$\frac{dC}{dt} = -k_D C - \text{HOT}_1(\Delta t) \quad (2.48)$$

où HOT_1 est un polynôme de degré 1 par rapport à Δt . L'équation (2.48) diffère de l'équation originale (1.1) par l'erreur de troncature $\text{TE}(\Delta t) = -\text{HOT}_1(\Delta t)$. Cette erreur tend bien vers 0 lorsque le pas de temps tend vers 0. Donc l'équation discrétisée (2.10) est consistante par rapport à l'équation originale (1.1).

2.4.3 Stabilité

Définition La stabilité est une propriété de la solution (analytique et/ou numérique). La solution est stable si elle est bornée dans le temps (resp. l'espace). La stabilité de la solution numérique est parfois attachée à la valeur de Δt (resp. Δx), comme le montre l'exemple de la sous-section 2.4.1.

Un critère simple de stabilité pour les EDOs du 1er ordre.
méthode simple pour vérifier la stabilité des solutions numériques : la solution est stable si l'on peut trouver une constante V telle que :

$$-1 \leq \frac{U^{n+1} - V}{U^n - V} \leq 1 \quad \forall n \quad (2.49)$$

L'équation (2.49) exprime le fait que l'écart entre la solution U^n et la « valeur de référence » (souvent une valeur asymptotique) ne s'accroît pas au cours du temps. Souvent, la constante V peut être prise égale à zéro.

Exemple : la discrétisation de (1.1) selon la méthode d'Euler explicite donne (2.10), qui peut être réécrite comme suit :

$$\frac{C^{n+1}}{C^n} = 1 - k_D \Delta t \quad (2.50)$$

(ici, $V = 0$). La solution numérique est stable si

$$-1 \leq \frac{C^{n+1}}{C^n} \leq 1 \quad (2.51)$$

On vérifiera que les conditions (2.51) sont remplies lorsque

$$\left. \begin{array}{l} k_D \Delta t \leq 2 \\ k_D \Delta t \geq 0 \end{array} \right\} (2.52)$$

puisqu'il s'agit d'une équation de dégradation, k_D est positif et la deuxième condition (2.52) est toujours vérifiée. La solution numérique est donc stable si

$$k_D \leq \frac{2}{\Delta t} \quad (2.53)$$

Stabilité des schémas explicites et implicites. Les schémas explicites ne sont en général stables que pour une certaine plage du pas de temps [resp. d'espace]. On dit qu'ils sont sujets à une *contrainte de stabilité*.

Les schémas implicites sont toujours stables quelle que soit la valeur du pas de temps [resp. d'espace]. On dit qu'ils sont inconditionnellement stables.

N.B. Ces considérations ne sont valables que lorsque l'on traite des *EDOs linéaires* (Cf. la courbe de remous pour un contre-exemple) !

2.4.4 Convergence

Définition La convergence est une propriété de la solution numérique. On dit que la solution numérique converge vers la solution analytique si elle tend vers elle *en tout point* du temps (resp. de l'espace) lorsque Δt (resp. Δx) tend vers 0.

Théorème de Lax. La consistance et la stabilité sont en général relativement faciles à démontrer. La convergence demande souvent des démonstrations longues et ardues. Le théorème de Lax permet d'obvier à cette difficulté: il exprime en effet une équivalence entre consistance, stabilité et convergence pour la résolution des EDOs linéaires. Il a été étendu aux EDOs (et EDPs) non-linéaires. Il s'énonce comme suit :

La consistance et la stabilité sont nécessaires et suffisantes à la convergence

Autrement dit, si l'on a discrétisé une EDO de façon consistante et si la solution de cette EDO est stable, alors elle est également convergente.

N.B. : ceci est la raison pour laquelle vous pouvez avoir confiance dans la solution donnée par les modèles mathématiques que vous utilisez !

2.5 Discrétisation d'EDOs d'ordre 2 et plus

On n'a examiné pour l'instant que des EDOs d'ordre 1. L'analyse de consistance de la sous-section 2.4.2 peut être généralisée pour définir une méthode de discrétisation des EDOs d'ordre 2 et plus. Pour discrétiser une dérivée d'ordre 1, on a besoin de la valeur de la variable dépendante en au moins deux points (par exemple, U^n et U^{n+1}). Pour une dérivée seconde, on aura besoin d'au moins trois points. De façon générale, on a besoin de $p + 1$ points au minimum pour discrétiser une dérivée d'ordre p .

Ainsi, pour discrétiser la dérivée seconde d^2U/dt^2 , on utilisera les valeurs U^{n-1} , U^n et U^{n+1} . On effectue un développement en série de Taylor à partir de la date t^n :

$$\left. \begin{aligned} U^{n+1} &= U^n + \Delta t \frac{dU}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2U}{dt^2} + \text{HOT}_1(\Delta t^3) \\ U^{n-1} &= U^n - \Delta t \frac{dU}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2U}{dt^2} + \text{HOT}_2(\Delta t^3) \end{aligned} \right\} (2.54)$$

On peut obtenir une approximation de d^2U/dt^2 en additionnant les deux égalités dans (2.54) (on notera que les termes en Δt^3 s'annulent) :

$$U^{n+1} + U^{n-1} = 2U^n + \Delta t^2 \frac{d^2U}{dt^2} + \text{HOT}_3(\Delta t^4) \quad (2.55)$$

(2.55) devient :

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{U^{n+1} + U^{n-1} - 2U^n}{\Delta t^2} + \text{HOT}_4(\Delta t^2) \quad (2.56)$$

La fraction $(U^{n+1} + U^{n-1} - 2U^n)/\Delta t^2$ constitue donc une approximation consistante de d^2U/dt^2 .

Chapitre 3

Différences finies pour les Équations aux Dérivées Partielles (EDPs)

Objectifs

À la fin de ce chapitre, vous devez pouvoir:

- expliquer en vos propres termes le principe de la discrétisation des EDPs par les différences finies,
- expliquer ce qu'est un maillage structuré, non structuré, Cartésien, curviligne,
- expliquer ce qu'est un schéma décentré amont,
- discrétiser une EDP (ou un système d'EDPs) du second ordre,
- donner une définition du nombre de Courant (EDPs hyperboliques) et du nombre de Fourier (EDPs paraboliques), ainsi que leur influence potentielle sur la stabilité de la solution numérique.

3.1 Principe

On rappelle que, contrairement à une EDO, une EDP implique plusieurs variables indépendantes (au moins 2). L'une d'elles peut être le temps (pour des EDPs paraboliques ou hyperboliques) ou non (*Ex.* l'équation (1.20) exprime un régime permanent). Dans la discrétisation des EDPs, le temps est une dimension « particulière », dans le sens où sa discrétisation est toujours relativement simple. En revanche, les possibilités de discrétisation de l'espace sont nombreuses. Ceci est vrai en particulier pour les EDPs où interviennent plusieurs dimensions de l'espace. Les diverses possibilités sont présentées dans les sous-sections suivantes.

3.1.1 Discrétisation impliquant une seule dimension d'espace

Dans le cas d'EDPs ne comportant qu'une seule dimension d'espace, le temps et l'espace sont discrétisés de la même manière : on définit des points de calcul (généralement notés en utilisant l'indice i) d'abscisses x et des dates de calcul t^n où l'on veut déterminer la solution numérique (Figure 3.1). La solution numérique au point i au pas de temps n est notée U_i^{n+1} . Le terme de *maillage* est souvent utilisé pour désigner la disposition des points de discrétisation de l'espace.

En général, le maillage est fixe dans l'espace. Cependant, il existe des méthodes à maillage *mobile*, c'est à dire que les positions des points de calcul sont susceptibles de changer au cours du temps. C'est le cas des problèmes où la forme ou l'étendue du domaine de calcul sont susceptibles d'évoluer dans le temps. On parle alors de *maillage adaptatif*. Dans ce cours, seuls les maillages fixes sont considérés.

3.1.2 Problèmes multidimensionnels

Lorsque l'EDP que l'on cherche à résoudre implique plus d'une direction d'espace, il existe de nombreuses options pour discrétiser ce dernier. Les deux principaux types de maillage sont les suivants :

- dans un *maillage structuré*, l'espace est discrétisé en lignes, colonnes et/ou rangées. Les intersections des lignes définissent les points de calcul. Dans deux dimensions d'espace, un point de calcul est repéré par deux indices (en général i et j) ; un point sera repéré en trois dimensions d'espace par le biais de trois indices (généralement notés i, j et k). Il existe deux grandes « familles » de maillage structuré (Figure 3.2) :

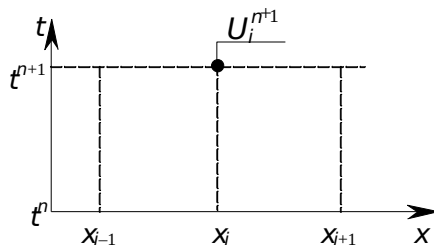


Fig. 3.1. discrétisation du temps et de l'espace (cas d'une seule dimension d'espace).

- * les maillages *cartésiens*, où les points de calcul sont positionnés sur des *lignes droites* ;
 - * les maillages *curvilignes*, où les points de calcul sont positionnés sur des lignes courbes. ceci permet une plus grande flexibilité dans la description de la géométrie (en particulier pour des modèles côtiers, où une description fine de la géométrie du littoral est nécessaire).
- dans un maillage *non structuré*, les points de calcul ne sont pas alignés selon des directions préférentielles. Ils sont repérés par un seul indice (Fig. 3.2).

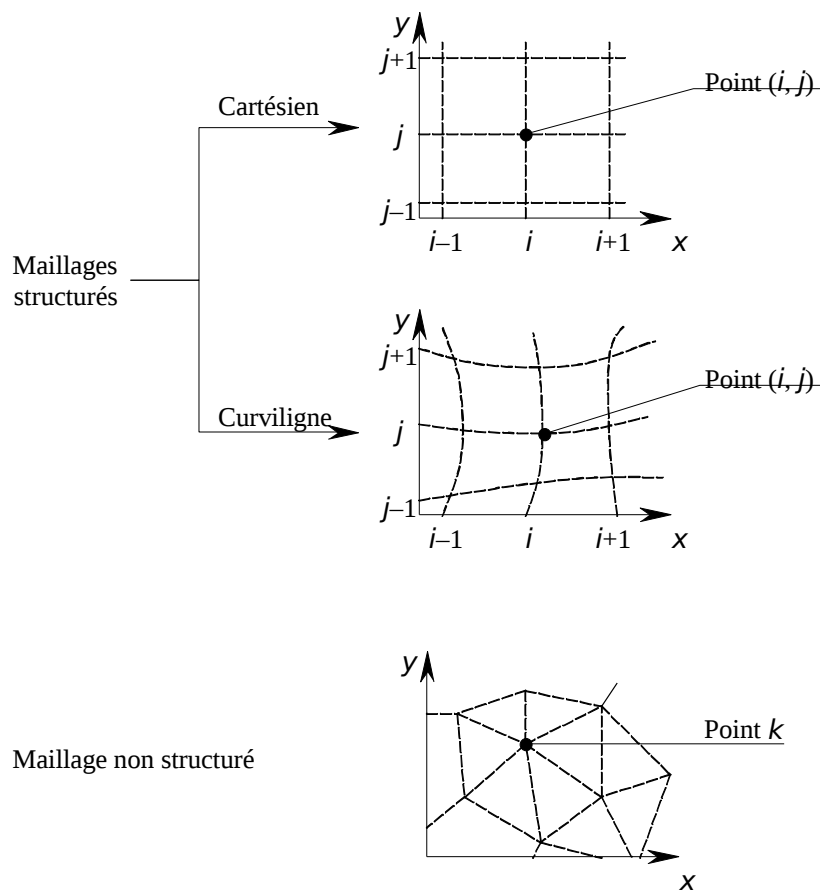


Fig. 3.2. Divers types de maillage (ici pour deux dimensions d'espace).

N.B. : dans ce cours, on ne traitera que des maillages structurés cartésiens.

3.2 Méthodes pour les EDPs hyperboliques

Dans cette section, on traite l'équation de convection (1.31) (encore appelée advection) que l'on rappelle ici :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Cette équation est la plus simple de toutes les EDPs possibles, puisqu'elle comporte un nombre minimal de variables indépendantes et des ordres de dérivation minimaux. Elle figure pourtant parmi les EDPs les plus difficiles à résoudre, dans le sens où les moindres défauts des méthodes numériques peuvent être mis en évidence à l'aide de cas-tests extrêmement simples. On rappelle que l'équation (1.31) est équivalente à la formulation suivante, qui fait intervenir la dérivée totale D/Dt :

$$\frac{DU}{Dt} = 0 \quad \text{pour} \quad \frac{dx}{dt} = \lambda \quad (3.1)$$

L'équivalence de ces deux formulations est démontrée en Annexe B. Cette équivalence est utilisée dans les méthodes aux caractéristiques et dans certaines méthodes aux volumes finis (*Cf.* chapitre 4). Les méthodes les plus classiques sont présentées ici.

3.2.1 Schémas décentrés amont

Il existe deux principales versions de schémas décentrés amont : une version explicite et une version implicite.

Schéma décentré amont explicite. Dans le schéma décentré amont explicite, les dérivées $\frac{\partial U}{\partial t}$ et $\frac{\partial U}{\partial x}$ sont approchées de la façon suivante (*Cf.* Fig. 3.3 pour illustration) :

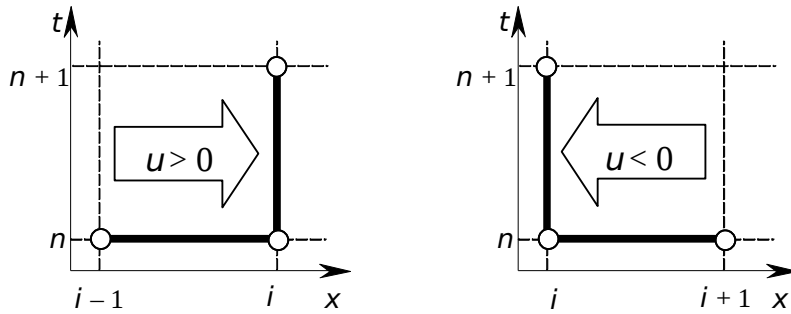


Fig. 3.3. Schéma décentré amont explicite. Points de calcul utilisés pour une vitesse positive (gauche) et négative (droite).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial U}{\partial x} &\approx \begin{cases} \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x_{i-1/2}} & \text{si } \lambda \geq 0 \\ \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x_{i+1/2}} & \text{si } \lambda \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} (3.2)$$

où $\Delta x_{i-1/2}$ et $\Delta x_{i+1/2}$ représentent respectivement les distances $x_i - x_{i-1}$ et $x_{i+1} - x_i$. A noter que la dépendance de l'approximation de $\partial U / \partial x$ par rapport au signe de λ peut être justifiée grossièrement de la façon suivante : l'information sur l'état de U vient de l'amont, il peut donc paraître normal d'utiliser les points à l'amont de i pour l'approximation de la dérivée d'espace. En remplaçant (3.2) dans (1.31), il vient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \lambda \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x_{i-1/2}} &= 0 & \text{si } \lambda \geq 0 \\ \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \lambda \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x_{i+1/2}} &= 0 & \text{si } \lambda \leq 0 \end{aligned} \right\} (3.3)$$

ce qui donne :

$$\left. \begin{aligned} U_i^{n+1} &= \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i-1/2}} U_{i-1}^n + \left(1 - \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i-1/2}}\right) U_i^n & \text{si } \lambda \geq 0 \\ U_i^{n+1} &= \left(1 + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i+1/2}}\right) U_i^n - \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i+1/2}} U_{i+1}^n & \text{si } \lambda \leq 0 \end{aligned} \right\} (3.4)$$

On introduit le nombre de Courant (adimensionnel) :

$$Cr = \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \quad (3.5)$$

(du nom du mathématicien Robert Courant – il s’écrit avec une majuscule !) Ce nombre permet de simplifier l’écriture du schéma :

$$\left. \begin{aligned} U_i^{n+1} &= Cr_{i-1/2} U_{i-1}^n + (1 - Cr_{i-1/2}) U_i^n & \text{si } \lambda \geq 0 \\ U_i^{n+1} &= (1 + Cr_{i+1/2}) U_i^n - Cr_{i+1/2} U_{i+1}^n & \text{si } \lambda \leq 0 \end{aligned} \right\} (3.6)$$

Ce schéma est stable pour des nombres de Courant compris entre -1 et $+1$.

Schéma décentré amont implicite. Dans ce schéma, les dérivées sont estimées comme suit (Cf. Fig. 3.4):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial U}{\partial x} &\approx \begin{cases} \frac{U_i^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{\Delta x_{i-1/2}} & \text{si } \lambda \geq 0 \\ \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} & \text{si } \lambda \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} (3.7)$$

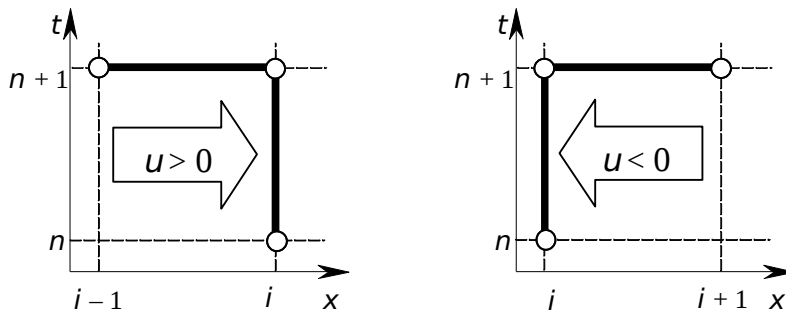


Fig. 3.4. Schéma décentré amont implicite. Points de calcul utilisés pour une vitesse positive (gauche) et négative (droite).

N.B. : la dérivée $\partial/\partial x$ est estimée en utilisant les valeurs (inconnues) au pas de temps $n + 1$. En remplaçant dans (1.31), on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \lambda \frac{U_i^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{\Delta x_{i-1/2}} &= 0 & \text{si } \lambda \geq 0 \\ \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \lambda \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} &= 0 & \text{si } \lambda \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

ce qui donne une relation entre deux points consécutifs au pas de temps $n + 1$:

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i-1/2}}\right) U_i^{n+1} - \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i-1/2}} U_{i-1}^{n+1} &= U_i^n & \text{si } \lambda \geq 0 \\ \left(1 - \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i+1/2}}\right) U_i^{n+1} + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i+1/2}} U_{i+1}^{n+1} &= U_i^n & \text{si } \lambda \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

On obtient un système bidiagonal d'équations faisant intervenir les valeurs inconnues de U en deux points consécutifs. Ce système peut cependant être inversé en utilisant une méthode de simple balayage. En effet, (3.9) peut se récrire

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i-1/2}}\right) U_i^{n+1} &= U_i^n + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i-1/2}} U_{i-1}^{n+1} & \text{si } \lambda \geq 0 \\ \left(1 - \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i+1/2}}\right) U_i^{n+1} &= U_i^n - \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i+1/2}} U_{i+1}^{n+1} & \text{si } \lambda \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Ce qui donne :

$$\left. \begin{aligned} U_i^{n+1} &= \frac{U_i^n + C_{i-1/2} U_{i-1}^{n+1}}{1 + C_{i-1/2}} & \text{si } \lambda \geq 0 \\ U_i^{n+1} &= \frac{U_i^n - C_{i+1/2} U_{i+1}^{n+1}}{1 - C_{i+1/2}} & \text{si } \lambda \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Il suffit donc de balayer le domaine en partant du point amont (point 1 si λ est positif, point N si λ est négatif) et d'utiliser (3.11) comme relation de récurrence pour déterminer le point suivant dans le sens du balayage.

Ce schéma est stable pour toutes les valeurs du nombre de Courant. On dit aussi qu'il est *inconditionnellement stable*.

3.2.2 La méthode des caractéristiques

La méthode des caractéristiques s'appuie sur la formulation (3.1) de l'équation de convection. (3.1) peut se récrire sous la forme encore plus simple :

$$U = \text{Cst} \quad \text{pour} \quad \frac{dx}{dt} = \lambda \quad (3.12)$$

qui indique que la quantité U est *invariante* le long de la trajectoire $dx/dt = \lambda$. Cette trajectoire est représentée par une courbe (appelée *courbe caractéristique*) de pente $1/\lambda$ dans le plan (x, t) . Ce plan est appelé l'*espace des phases* (Fig. 3.5). Le principe de la méthode des caractéristiques est le suivant : si l'on veut déterminer la valeur de U en un point $(i, n + 1)$ dans l'espace des phases, il suffit de remonter la courbe caractéristique dans le temps jusqu'à une date où la valeur de U est connue.

Ainsi, la valeur de U au point $(i, n + 1)$ est égale à sa valeur U_A au point A (situé au pas de temps n). Le point A est souvent appelé le *piéd* de la caractéristique. La valeur de U au point A est interpolée linéairement entre les points $i - 1$ et i (on ne donne la formule que pour une vitesse d'advection λ positive) :

$$U_A = \frac{x_i - x_A}{\Delta x_{i-1/2}} U_{i-1}^n + \frac{x_A - x_{i-1}}{\Delta x_{i-1/2}} U_i^n \quad (3.13)$$

où x_A est l'abscisse de A. Elle peut être estimée comme suit :

$$x_A = x_i - \lambda \Delta t \quad (3.14)$$

En introduisant (3.14) et la définition (3.5) du nombre de Courant dans (3.13), on obtient

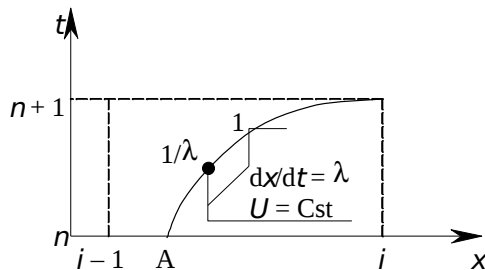


Fig. 3.5 Caractéristique dans l'espace des phases.

$$U_i^{n+1} = U_A = C_{i-1/2} U_{i-1}^n + (1 - C_{i-1/2}) U_i^n \quad (3.15)$$

qui donne exactement la même formule que (3.6) pour une vitesse d'advection λ positive. On vérifiera que la formulation est identique à celle de (3.6) pour une vitesse d'advection λ négative.

Le schéma (3.15) est stable pour des nombres de Courant compris entre 0 et 1. Pour des nombres de Courant négatifs, il est nécessaire d'effectuer l'interpolation entre les points i et $i + 1$.

Il est possible d'accroître la précision de la méthode en utilisant une interpolation parabolique (c.à.d. que l'on ajuste une courbe du type $U(x) = ax^2 + bx + c$ entre les points $i - 1$, i et $i + 1$).

3.2.3 Le schéma de Preissmann

Principe Le schéma de Preissmann est utilisé dans des logiciels de simulation tels que CARIMA ou ISIS. Il est implicite. Les dérivées en temps et en espace sont approchées en utilisant les points (i, n) , $(i + 1, n)$, $(i, n + 1)$ et $(i + 1, n + 1)$. Il est conçu de manière à respecter le caractère conservatif des équations.

Les dérivées en temps et en espace sont approchées comme suit (Cf. Fig. 3.6) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\approx \theta \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \psi \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i+1}^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial U}{\partial x} &\approx \theta \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \theta \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

où ψ et θ sont deux paramètres, déterminés par l'utilisateur, qui permettent de « décentrer » le schéma en espace et en temps respectivement. Ils peuvent influencer considérablement sur la stabilité et le degré de précision de la solution numérique. En général, il est conseillé de prendre $\psi = 1/2$ et θ supérieur ou égal à $1/2$ (pour des valeurs inférieures de θ , la solution peut devenir instable).

Dans la formulation (3.16), on peut considérer que la dérivée par rapport au temps est estimée comme la moyenne pondérée des deux dérivées par rapport au temps estimées aux points i et $i + 1$; par une démarche similaire, la dérivée par rapport à l'espace est estimée comme la moyenne pondérée des dérivées estimées aux pas de temps n et $n + 1$.

Application à l'équation de convection Le schéma de Preissmann est appliqué à la discrétisation de l'équation (1.31), que l'on rappelle ici :

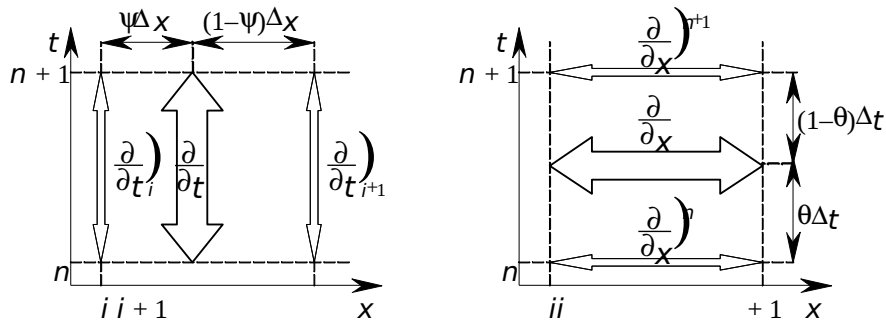


Fig. 3.6. Principe du schéma de Preissmann. La dérivée par rapport au temps est une pondération des dérivées estimées aux points i et $i + 1$; la dérivée par rapport à l'espace est une pondération des dérivées estimées aux pas de temps n et $n + 1$.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

En remplaçant (3.16) dans (1.31), on obtient :

$$\begin{aligned} & (\psi - \theta) \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \psi \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i+1}^n}{\Delta t} \\ & + \left[(\psi - \theta) \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \theta \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} \right] \lambda = 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

En regroupant les termes en U^{n+1} , (3.17) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\alpha_{i+1/2} U_i^{n+1} + \beta_{i+1/2} U_{i+1}^{n+1} + \chi_{i+1/2} = 0 \tag{3.18}$$

où les coefficients $\alpha_{i+1/2}$, $\beta_{i+1/2}$ et $\chi_{i+1/2}$ sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{i+1/2} &= 1 - \psi - \theta Cr_{i+1/2} \\ \beta_{i+1/2} &= \psi + \theta Cr_{i+1/2} \\ \chi_{i+1/2} &= (\psi - \theta) Cr_{i+1/2} U_i^n + (\psi + \theta) Cr_{i+1/2} U_{i+1}^n \end{aligned} \right\} \tag{3.19}$$

Comme pour le schéma décentré amont implicite (Cf. Eq. (3.9)), on se trouve en présence d'un système d'équations algébriques à deux inconnues impliquant des points consécutifs du maillage. Ce système est aisément résolu en effectuant un

balayage du domaine de calcul en partant de l'amont (point 1 pour une vitesse d'advection positive, point N pour une vitesse d'advection négative). En effet, (3.18) peut s'écrire sous les deux formes équivalentes suivantes :

$$\left. \begin{aligned} U_{i+1}^{n+1} &= -\frac{\alpha_{i+1/2}}{\beta_{i+1/2}} U_i^{n+1} - \frac{\chi_{i+1/2}}{\beta_{i+1/2}} \\ U_i^{n+1} &= -\frac{\beta_{i+1/2}}{\alpha_{i+1/2}} U_{i+1}^{n+1} - \frac{\chi_{i+1/2}}{\alpha_{i+1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

La première égalité (3.20) doit être utilisée dans le cas d'une vitesse d'advection positive, pour balayer le domaine dans le sens des indices i croissants ; la seconde égalité sera utilisée dans le cas d'une vitesse d'advection négative, pour balayer le maillage dans le sens des indices i décroissants.

Stabilité : schéma de Preissmann est stable sous la condition suivante :

$$\theta - \frac{1}{2} + \frac{\Psi - \frac{1}{2}}{Cr_{i+1/2}} \geq 0 \quad (3.21)$$

Pour le cas particulier $\Psi = 1/2$, la condition (3.21) devient :

$$\theta \geq \frac{1}{2} \quad (3.22)$$

Au-dessous de cette valeur de θ , le schéma est inconditionnellement instable, quel que soit le nombre de Courant ; au-dessus de cette valeur, il est inconditionnellement stable, indépendamment du nombre de Courant.

3.2.4 Le schéma de Crank-Nicholson

Ce schéma utilise trois points consécutifs (Cf. Fig. 3.7). On donne son expression pour un pas d'espace Δx régulier :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial U}{\partial x} &\approx \frac{1}{4} \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{1}{4} \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

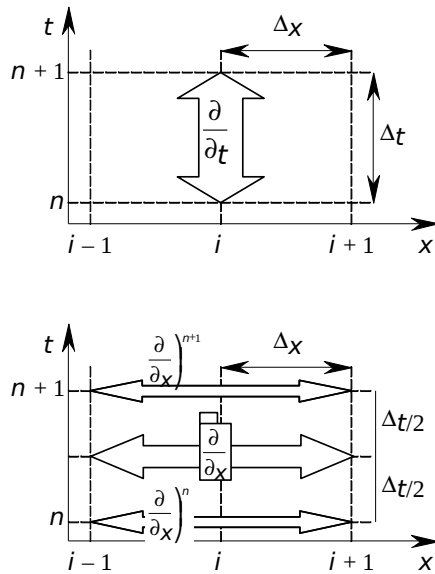


Fig. 3.7. Schéma de Crank-Nicolson.

3.2.5 Stabilité des schémas

La stabilité d'un schéma numérique pour les EDPs s'analyse de manière similaire à celle d'un schéma pour les EDOs : le principe consiste à analyser le rapport U_i^{n+1}/U_i^n et sous quelles conditions il est inférieur à 1 (auquel cas le schéma est stable) ou supérieur (auquel cas le schéma est instable).

La stabilité des schémas numériques *explícitos* pour les EDPs hyperboliques est en général fortement conditionnée par la valeur du nombre de Courant.

3.3 Méthodes pour les EDPs paraboliques

Schéma à trois points explicite. On présente ici un schéma pour la résolution de l'équation de diffusion (1.19), rappelée ici :

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \nu \text{ positif}$$

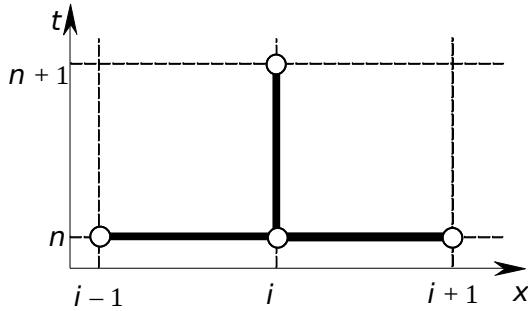


Fig. 3.8. Schéma à trois points explicite.

Du fait de la présence d'une dérivée seconde par rapport à x , il est nécessaire d'introduire trois points en espace. Pour un pas d'espace Δx uniforme, les dérivées sont approchées comme suit (Figure 3.8) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &\approx \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2} \end{aligned} \right\} (3.24)$$

En remplaçant les approximations (3.24) dans l'équation (1.19), il vient :

$$U_i^{n+1} = U_i^n + v \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2} \Delta t \quad (3.25)$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$U_i^{n+1} = U_{i-1}^n + U_{i+1}^n F + (1 - 2F) U_i^n \quad (3.26)$$

où $F = v \Delta t / \Delta x^2$ est parfois appelé le nombre de Fourier. Il représente l'analogue du nombre de Courant pour les phénomènes de diffusion.

Le schéma est stable pour des nombres de Fourier compris entre 0 et 1/2.

Schéma à trois points implicite. Ce schéma utilise les approximations suivantes (Cf. Fig. 3.9) :

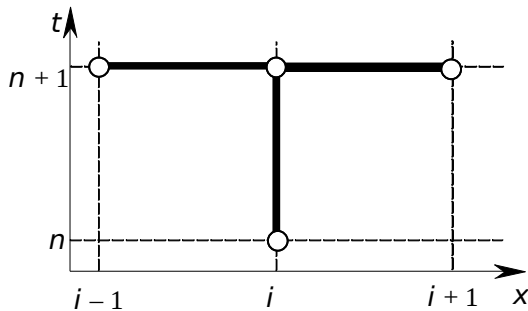


Fig. 3.9. Schéma à trois points implicite.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &\approx \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \end{aligned} \right\} (3.27)$$

En remplaçant les approximations (3.27) dans l'équation (1.19), il vient :

$$U_i^{n+1} - v \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \Delta t = U_i^n \quad (3.28)$$

ce qui s'écrit encore :

$$(1 + 2F) U_i^{n+1} - (F) U_{i-1}^{n+1} + (F) U_{i+1}^{n+1} = U_i^n \quad (3.29)$$

Cette équation fait intervenir trois variables inconnues (à la date $n+1$). En dénommant N le nombre total de points du maillage, on peut écrire $N-2$ équations du type (3.29) pour les points 2 à $N-1$ inclus. Il est en outre nécessaire de fournir 2 conditions aux limites (aux points 1 et N respectivement). Par conséquent, on a au total N équations pour N inconnues et la solution est unique. Une méthode couramment utilisée pour l'inversion du système d'équations (3.29) est par exemple celle du double balayage (Cf. cours de première année).

Le schéma implicite est inconditionnellement stable (c.à.d. que la stabilité n'est pas limitée par la valeur du nombre de Fourier).

Schéma de Crank-Nicholson Le schéma de Crank-Nicholson pour les EDPs paraboliques revient à prendre une moyenne entre les formulations implicite et

explicite :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &\approx \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{2\Delta x^2} + \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{2\Delta x^2} \end{aligned} \right\} (3.30)$$

3.4 Méthodes pour les EDPs elliptiques

Les EDPs elliptiques de l'ingénieur sont en général des EDPs exprimant un régime permanent ; elles ne font donc pas intervenir de dimension de temps. En revanche, elles impliquent deux ou trois dimensions d'espace. L'espace peut être discrétisé en utilisant un maillage structuré ou non structuré. Dans cette section, on ne présente la méthode que pour un maillage structuré.

On présente la méthode pour la résolution de l'équation (1.20) :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = Q$$

Comme pour les équations paraboliques, l'approximation des dérivées secondes requiert trois points dans chaque direction de l'espace :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &\approx \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &\approx \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{\Delta y^2} \end{aligned} \right\} (3.31)$$

où Δx et Δy sont les pas d'espace selon les directions x et y respectivement. On notera la disparition de l'exposant en temps et l'apparition d'un double indexage sur l'espace. En remplaçant (3.31) dans (1.20), on obtient :

$$\frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{\Delta y^2} = Q_{i,j} \quad (3.32)$$

L'équation (3.32) peut être écrite pour chaque point (i, j) à l'intérieur du domaine. Elle ne peut être écrite pour les points situés sur les limites, car pour un point (i, j) en bordure du domaine, l'un au moins des points $(i-1, j)$, $(i+1, j)$, $(i, j-1)$ ou $(i, j+1)$ n'est pas situé à l'intérieur du domaine et l'EDP

ne peut lui être appliquée. En revanche, on rappelle qu'il est nécessaire de fournir des conditions aux limites en tout point ; on obtient donc le nombre nécessaire et suffisant d'équations pour que la solution soit unique. Il n'est cependant pas aisé d'inverser un système de la forme (3.30) (dont la largeur de bande est au minimum 5), aussi a-t-on souvent recours à des méthodes telles que les directions alternées (Cf. section 3.5 ci-dessous).

3.5 Problèmes multidimensionnels

Un problème multidimensionnel est un problème où interviennent plusieurs dimensions d'espace (deux ou trois). Cette section présente les méthodes les plus couramment utilisées. Il est à noter que le traitement des problèmes multidimensionnel est un sujet de recherche très actuel dans de nombreux domaines, en particulier celui de la propagation d'ondes. En effet, pratiquement toutes les méthodes numériques existantes introduisent des effets indésirables sur la précision des solutions numériques.

3.5.1 Les directions alternées

Jusqu'à une période récente, la plupart des méthodes numériques ont été mises au point pour une dimension d'espace uniquement. Les raisons en sont nombreuses, mais deux facteurs principaux peuvent être cités :

- 1) Un certain nombre de notions mathématiques (et de théorèmes sur la convergence des solutions) ne sont applicables qu'en une dimension d'espace ;
- 2) Pendant longtemps, la capacité de stockage (tant en mémoire que physiquement sur disque) et la puissance de calcul des ordinateurs sont restées très limitées. Ceci rendait le traitement de situations multidimensionnelles (qui sont caractérisées par un grand nombre de points de calcul) extrêmement lourd, sinon impossible.

Pour cette raison, un certain nombre de techniques ont été mises au point pour tenter de résoudre des EDPs à plusieurs dimensions en utilisant des méthodes conçues pour une seule dimension d'espace. Ces méthodes sont connues sous le nom de *directions alternées*

Directions alternées explicites considère une EDP en trois dimensions

d'espace :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + c \frac{\partial U}{\partial y} + d \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + e \frac{\partial U}{\partial z} + f \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (3.33)$$

où les coefficients a, \dots, f sont (ou non) des fonctions des coordonnées d'espace x, y, z , de U et/ou du temps t . Cette EDP est hyperbolique si $b = d = f = 0$ et parabolique dans les autres cas. Les directions alternées explicites consistent à traiter successivement chaque dimension d'espace en prenant pour point de départ le résultat obtenu en traitant les directions précédentes.

L'algorithme est le suivant :

- 1) En notant U^n la solution au début du pas de temps, on résout dans un premier temps la partie de l'équation dans la direction x :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (3.34)$$

On obtient alors une solution intermédiaire que l'on notera $U^{n+1,x}$.

- 2) On utilise la solution intermédiaire comme point de départ pour résoudre la partie de l'équation dans la direction y :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial y} + d \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (3.35)$$

On obtient une seconde solution intermédiaire que l'on notera $U^{n+1,y}$.

- 3) On utilise cette seconde solution intermédiaire comme point de départ pour résoudre la partie de l'équation dans la direction z :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + e \frac{\partial U}{\partial z} + f \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (3.36)$$

La solution obtenue à la fin de ces trois balayages est la solution U^{n+1} .

Chacune des étapes 1) – 3) consiste à résoudre un problème unidimensionnel.

Directions alternées implicites (ADI). Cet algorithme est souvent mentionné dans la littérature sous le terme ADI (pour Alternate Directions Implicit). Il est plus général que le précédent car il permet de résoudre également des EDPs elliptiques. On considère la forme plus générale de (3.33) :

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + c \frac{\partial U}{\partial y} + d \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + e \frac{\partial U}{\partial z} + f \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (3.37)$$

où ε peut être pris égal à 0 pour une EDP elliptique. L'algorithme est le suivant :

- 1) En notant U^n la solution au début du pas de temps, on résout dans un premier temps la partie de l'équation dans la direction x :

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = - \left[c \frac{\partial U}{\partial y} + d \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + e \frac{\partial U}{\partial z} + f \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right]^n \quad (3.38)$$

On obtient alors une solution intermédiaire que l'on notera $U^{n+1,x}$. On notera que pour une EDP elliptique (c.à.d. pour $\varepsilon = 0$), le concept de pas de temps ne s'applique pas et l'on utilisera de préférence la notation U^x .

- 2) On utilise la solution intermédiaire comme point de départ pour résoudre la partie de l'équation dans la direction y :

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial y} + d \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = - \left[a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + e \frac{\partial U}{\partial z} + f \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right]^x \quad (3.39)$$

On obtient une seconde solution intermédiaire que l'on notera $U^{n+1,y}$ (ou U^y dans le cas d'une EDP elliptique).

- 3) On utilise cette seconde solution intermédiaire comme point de départ pour résoudre la partie de l'équation dans la direction z :

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial t} + e \frac{\partial U}{\partial z} + f \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = - \left[a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + c \frac{\partial U}{\partial y} + d \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right]^y \quad (3.40)$$

La solution obtenue à la fin de ces trois balayages est la solution $U^{n+1,z}$ (ou U^z dans le cas d'une EDP elliptique).

- 4) On reprend la solution $U^{n+1,z}$ (ou U^z) comme point de départ pour répéter les étapes 1) – 3). La boucle 1) – 3) s'appelle une *itération*. On itère tant que la différence entre les résultats de l'itération m et $m+1$ diffère d'une valeur supérieure à un *critère de convergence* fixé à l'avance par l'utilisateur.

3.5.2 Méthodes multidimensionnelles

Les méthodes multidimensionnelles pures consistent à prendre en compte tous les termes des EDPs liés à toutes les directions de l'espace en une seule fois. Si cela ne pose pas de problème particulier pour les méthodes explicites, pour les méthodes implicites il est nécessaire de procéder à une numérotation *globale* des points de calcul (c.à.d. une numérotation dans laquelle chaque point du maillage est repéré par un seul indice).

On considère par exemple l'équation de diffusion bidimensionnelle :

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (3.41)$$

Les dérivées partielles de cette équation peuvent être discrétisées comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\approx \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &\approx \frac{U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &\approx \frac{U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Ce qui donne :

$$\left(U_{i-1,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1} \right) F_x + \left(U_{i,j-1}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1} \right) F_y + (1 - 2F_x - 2F_y) U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n \quad (3.43)$$

où $F_x = \nu \Delta t / \Delta x^2$ et $F_y = \nu \Delta t / \Delta y^2$ sont les nombres de Fourier dans les directions x et y respectivement. Après renumérotation des points, (3.43) devient :

$$\left(U_{p^1}^{n+1} + U_{p^2}^{n+1} \right) F_x + \left(U_{p^3}^{n+1} + U_{p^4}^{n+1} \right) F_y + (1 - 2F_x - 2F_y) U_{p^5}^{n+1} = U_{p^5}^n \quad (3.44)$$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\mathbf{A} \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{B} \quad (3.45)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} A_{p^5, p^1} &= A_{p^5, p^2} = F_x \\ A_{p^5, p^3} &= A_{p^5, p^4} = F_y \\ A_{p^5, p^5} &= 1 - 2F_x - 2F_y \\ B_{p^5} &= U_{p^5}^n \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

La solution \mathbf{B}^{n+1} est obtenue en inversant la matrice \mathbf{A} :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (3.47)$$

La différence entre les indices max $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ et min $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ indique la largeur de bande de la matrice \mathbf{A} . Cette largeur de bande est un facteur important pour la rapidité avec laquelle \mathbf{A} peut être inversée. C'est pourquoi la numérotation des points de calcul est une étape importante dans le traitement du maillage.

3.6 Traitement des termes non-linéaires dans les schémas implicites

De nombreuses EDPs de l'ingénieur contiennent des termes non-linéaires. Ainsi, dans les équations de Saint-Venant, on trouve des termes tels que le débit de quantité de mouvement Q^2/A , ou des termes de frottement tels que $|Q|Q/(CR^2)$. Ces termes sont non-linéaires par rapport à Q , qui est une des variables (inconnues, à calculer) de l'écoulement.

Lorsque l'on veut calculer Q au pas de temps $n + 1$, on procède en général par inversion d'un système linéaire tel que (3.45). Il est donc indispensable que le système à résoudre soit linéarisé. Ainsi, le terme Q^2/A est approché par :

$$\frac{Q^2}{A} \approx \frac{Q^n Q^{n+1}}{A^{n+1/2}} \quad (3.48)$$

qui est un terme linéaire par rapport à Q^{n+1} , où la section en travers $A^{n+1/2}$ est approchée par :

$$A^{n+1/2} \approx \frac{A^n + A^{n+1}}{2} \quad (3.49)$$

Au cours d'un pas de temps, on effectue de façon itérative les opérations suivantes :

- 1) Calcul de $A^{n+1/2}$. Pour la première itération, on estime $A^{n+1/2}$ comme étant égal à A^n .
- 2) Calcul du coefficient $Q^n/A^{n+1/2}$. Ce terme entre dans la matrice \mathbf{A} que l'on doit inverser.
- 3) Inversion du système (3.45). On obtient une première estimation de \mathbf{U}^{n+1} .

- 4) Répétition des étapes 1) – 3) sur la base de la valeur mise à jour de \mathbf{U}^{n+1} , jusqu'à la convergence.

3.7 Consistance des schémas numériques pour EDPs – diffusion et dispersion numériques

3.7.1 Analyse de consistance des schémas pour les EDPs

La consistance des schémas numériques pour les EDPs s'analyse de la même manière que celle des schémas pour EDOs : par développements en séries de Taylor.

Exemple : l'analyse de consistance de la méthode aux caractéristiques (3.15) :

$$U_i^{n+1} = C_{r_{i-1/2}} U_{i-1}^n + (1 - C_{r_{i-1/2}}) U_i^n$$

On effectue un développement en série de Taylor au voisinage de U_i^n :

$$\left. \begin{aligned} U_{i-1}^n &= U_i^n - \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \text{HOT}_1(\Delta x) \\ U_i^{n+1} &= U_i^n + \Delta t \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \text{HOT}_2(\Delta t) \end{aligned} \right\} (3.50)$$

où HOT_1 et HOT_2 sont des polynômes de degré au moins 3 en Δx et Δt respectivement. En substituant (3.50) dans (3.15), on obtient :

$$\begin{aligned} & U_i^n + \Delta t \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \text{HOT}_2(\Delta t) \\ & = \\ & \left[U_i^n - \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \text{HOT}_1(\Delta x) \right] C_{r_{i-1/2}} + (1 - C_{r_{i-1/2}}) U_i^n \end{aligned} \quad (3.51)$$

Cette égalité se simplifie en :

$$\Delta t \frac{\partial U}{\partial t} + \Delta x C_{r-1/2} \frac{\partial U}{\partial x} = \left[\frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \text{HOT}_1(\Delta x) \right] C_{r-1/2} - \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \text{HOT}_2(\Delta t) \quad (3.52)$$

En divisant par Δt et en introduisant la définition du nombre de Courant, il vient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + u \frac{\partial U}{\partial x} = \left[\frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\text{HOT}_1(\Delta x)}{\Delta x} \right] u - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\text{HOT}_2(\Delta t)}{\Delta t} \quad (3.53)$$

L'erreur de troncature est donnée par :

$$\text{TE}(\Delta t, \Delta x) = \left[\frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\text{HOT}_1(\Delta x)}{\Delta x} \right] u - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\text{HOT}_2(\Delta t)}{\Delta t} \quad (3.54)$$

Cette erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0. En effet, le polynôme $\text{HOT}_1/\Delta x$ est de degré au moins 2 en Δx et le polynôme $\text{HOT}_2/\Delta t$ est de degré au moins 2 en Δt . Donc le schéma (3.15) est consistant à l'équation de convection. A noter que, pour que l'erreur de troncature disparaisse, il est nécessaire de réduire *à la fois* le pas de temps et d'espace (réduire uniquement l'un des deux ne permet pas d'améliorer la qualité de la solution numérique !)

3.7.2 Diffusion numérique

L'analyse de consistance ci-dessus montre que l'erreur de troncature contient des termes en $\partial^2 U / \partial x^2$. Comme indiqué au §1.2.5, de tels termes sont classiquement associés au phénomène de diffusion. Ils sont de nature numérique (puisque'ils sont dûs à la discrétisation de l'équation originelle qui, elle, ne contient pas de termes de diffusion) ; on parle de *diffusion numérique*. La diffusion numérique a pour effet de « lisser » les profils calculés (Cf. Fig. 3.10 pour illustration).

3.7.3 Dispersion numérique

Il existe des discrétisations de l'équation de convection d'où les termes en $\partial^2 U / \partial x^2$ sont absents ? c'est par exemple le cas du schéma de Preissmann avec $\theta = \psi = 1/2$. Les dérivées d'ordre le plus faible dans l'erreur de troncature sont alors des dérivées en $\partial^3 U / \partial x^3$. De telles dérivées sont associées à la *dispersion* (au sens des ondes. Il ne s'agit *pas* de la dispersion hydrodynamique !), dont l'effet est de créer des oscillations dans les profils

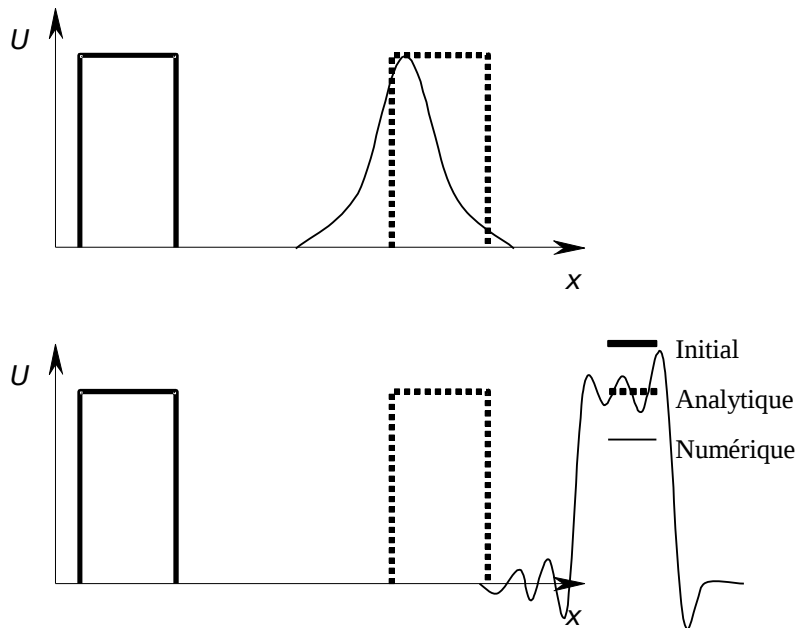


Fig. 3.10. Effets de la diffusion numérique (haut) et de la dispersion numérique (bas) sur des profils souis à la convection.

calculés (Cf. Fig. 3.10).

N.B. : lorsque la solution est affectée par la diffusion numérique, les termes de dispersion sont également présents. Cependant, ils sont « cachés » par les effets de la diffusion numérique. En effet, le coefficient des termes en $\partial^2 U / \partial x^2$ est un terme en Δx , alors que celui des termes $\partial^3 U / \partial x^3$ est en Δx^2 . Lorsque Δx est « petit », les termes de dispersion sont donc plus petits que ceux de diffusion.

Chapitre 4

Méthodes aux éléments finis et aux volumes finis

Les méthodes numériques pour la résolution des EDPs de l'ingénieur continuent de faire l'objet de nombreux développements. Un certain nombre de logiciels du commerce apparus récemment (en particulier pour le calcul des écoulements 2D et 3D souterrains ou à surface libre) n'utilisent plus les différences finies, mais les *éléments finis* ou les *volumes finis*. Ce chapitre a pour but d'expliquer brièvement le concept de ces méthodes.

4.1 Éléments finis

Les méthodes aux éléments finis se distinguent des différences finies par trois points principaux :

- le maillage est dans la quasi-totalité des cas non structuré.
- l'équation résolue n'est pas l'équation originale elle-même mais une forme intégrale de cette équation. On cherche à résoudre l'équation « en moyenne » sur le domaine de calcul ;
- la solution est exprimée comme la somme de fonctions élémentaires dont la forme est connue à l'avance (elle est en fait choisie par le développeur de la méthode numérique).

Le principe des éléments finis est expliqué pour des EDPs en deux dimensions d'espace ; il est exactement le même pour une ou trois dimensions (cependant, peu d'applications unidimensionnelles existent). On considère une EDP de la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + LU = 0 \quad (4.1)$$

où L est une « forme différentielle », c.à.d. un ensemble d'opérateurs différentiels appliqués à la solution U . Par exemple, l'équation (3.41)

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

peut s'écrire sous la forme (4.1) en posant

$$L = -\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (4.2)$$

Dans les méthodes aux éléments finis, on ne résout pas (4.1), mais l'intégrale

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + LU \right) w \, dx \, dy = 0 \quad (4.3)$$

où w est une fonction déterminée à l'avance et Ω est le domaine de calcul. w est appelée une *fonction de pondération*. (4.3) est équivalente à (4.1) si elle est vérifiée quelle que soit la forme de w .

On exprime en outre la solution U sous la forme d'une somme de fonctions élémentaires ε_i (i est le numéro du point de calcul dans le maillage non structuré) :

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^N U_i \varepsilon_i(x, y) \quad (4.4)$$

où U_i est un coefficient attaché au point (aussi appelé « nœud ») i . Les fonctions ε_i sont appelées des « fonctions de forme ». Dans la plupart des cas, on les choisit de telle façon que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\varepsilon_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 0 & \text{pour } j \neq i \\ 1 & \text{pour } j = i \end{cases} \quad (4.5)$$

où (x_j, y_j) sont les coordonnées du nœud j . Autrement dit, la fonction ε_i est égale à 1 au nœud i et à 0 à tous les autres nœuds. Alors, la valeur de la solution U au nœud i est égale à U_i . La figure 4.1 présente un exemple de fonction de forme (en l'occurrence, linéaire par morceaux). Pour déterminer la solution numérique, il suffit de déterminer tous les coefficients U_i .

En substituant (4.4) dans (4.3), on obtient :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N U_i \varepsilon_i + L \sum_{i=1}^N U_i \varepsilon_i \right) w \, dx \, dy = 0 \quad (4.6)$$

En faisant l'hypothèse que l'opérateur L est linéaire, on obtient :

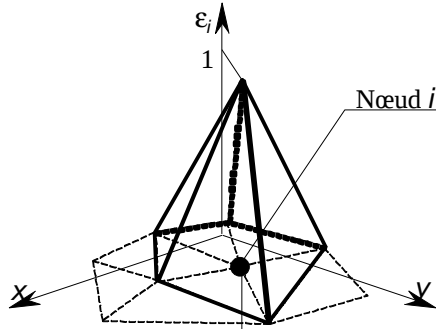


Fig. 4.1. Exemple de fonction de forme en deux dimensions d'espace.

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i \frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^N U_i L(\theta_i) \right) w dx dy = 0 \quad (4.7)$$

Ce qui se récrit :

$$\sum_{i=1}^N \left[\int_{\Omega} \varepsilon_i w dx dy \right] \frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left[\int_{\Omega} L(\theta_i) w dx dy \right] U_i = 0 \quad (4.8)$$

Comme les fonctions de forme sont connues, les quantités $\int_{\Omega} \varepsilon_i w dx dy$ et

$\int_{\Omega} L(\theta_i) w dx dy$ peuvent être calculées à l'avance et deviennent de simples

coefficients. L'équation (4.8) prend donc la forme

$$\sum_{i=1}^N a_i w \frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^N b_i w U_i = 0 \quad (4.9)$$

où les coefficients a et b sont bien sûr fonction de la fonction de pondération w . Le terme $\partial/\partial t$ est discrétisé en utilisant les différences finies :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} \approx U_i^{n+1} - U_i^n \quad (4.10)$$

Les termes en U_i sont discrétisés en utilisant la valeur au pas de temps n pour une méthode explicite

$$U_i \approx U_i^n \quad (4.11)$$

et au pas de temps $n + 1$ pour une méthode implicite :

$$U_i \approx U_i^{n+1} \quad (4.12)$$

L'équation (4.8) devient donc, pour une méthode explicite :

$$\sum_{i=1}^M a_i w_i \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \sum_{i=1}^M b_i w_i U_i^n = 0 \quad (4.13)$$

Soit encore :

$$\sum_{i=1}^M a_i w_i U_i^{n+1} = \sum_{i=1}^M a_i w_i U_i^n - \Delta t \sum_{i=1}^M b_i w_i U_i^n \quad (4.14)$$

Pour une méthode implicite, on obtient :

$$\sum_{i=1}^M [a_i w_i + b_i w_i \Delta t] U_i^{n+1} = \sum_{i=1}^M a_i w_i U_i^n \quad (4.15)$$

En définissant N fonctions de pondération w différentes, on peut écrire N équations de la forme (4.15). Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle (3.43) :

$$\mathbf{A} \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{B}$$

Qui peut être résolue en utilisant des techniques standard d'inversion de matrice.

N.B. : dans de nombreux cas, on prend les fonctions de pondération égales aux fonctions de forme (méthode de Galerkin).

4.2 Volumes finis

Bien que développées dès la fin des années 1950, les méthodes aux volumes finis sont restées méconnues des développeurs de logiciels commerciaux jusqu'aux années 1990. Le développement de ces méthodes a été par la nécessité de mettre au point des méthodes conservatives (c.à.d. des méthodes numériques qui conservent la quantité totale de matière, ou de quantité de mouvement, dans le domaine de calcul). De telles méthodes sont en effet nécessaires pour simuler des écoulements discontinus ? on sait en effet (Cf. cours d'hydraulique à surface libre) que seule la formulation conservative permet d'obtenir la solution correcte en présence par exemple d'un ressaut mobile et que des formulations alternatives comme les invariants de Riemann ne sont pas valides au franchissement d'une discontinuité hydraulique.

4.2.1 EDPs conservatives

Définitions Les méthodes aux volumes finis sont valides pour les EDPs dites conservatives, c.à.d. des équations qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (4.16)$$

où U est la variable conservée et F est le flux. Un système d'EDPs est dit conservatif s'il peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (4.17)$$

où \mathbf{U} et \mathbf{F} sont les vecteurs variable et flux respectivement. L'équation vectorielle (4.17) est une forme condensée du système suivant :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F_p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial U_m}{\partial t} + \frac{\partial F_m}{\partial x} = 0 \end{array} \right\} \quad (4.18)$$

où l'indice p ($p = 1, \dots, m$) indique la composante du vecteur \mathbf{U} ou \mathbf{F} .

Exemples Équation de Richards

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.19)$$

où h est la charge, K est la conductivité hydraulique verticale et θ la teneur en eau volumique, est une EDP conservative car elle peut être écrite sous la forme (4.16) en définissant U et F comme suit :

$$\left. \begin{array}{l} U = \theta \\ F = -K \frac{\partial h}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (4.20)$$

De même, les équations des écoulements à surface libre en canal rectangulaire sans frottement ni pente de fond

$$\left. \begin{aligned} - \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} (4.21)$$

où g est l'accélération de la pesanteur, h est la hauteur d'eau et q le débit unitaire, forment un système d'EDPs conservatives car elles peuvent s'écrire sous la forme vectorielle conservative (4.17) en posant :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

4.2.2 Principe des volumes finis en une dimension d'espace

Le principe des volumes finis est expliqué pour une dimension d'espace. Plutôt que de résoudre les équations (4.16) ou (4.17) en approchant les dérivées par des différences finies, les méthodes aux volumes finis résolvent leur forme intégrale sur des domaines (appelés « volumes ») Ω :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} d\Omega = 0 \quad (4.23)$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, (4.23) devient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} n_x d\Gamma = 0 \quad (4.24)$$

où Γ est la frontière de Ω et n_x est le vecteur unitaire normal à la frontière (orienté vers l'extérieur). En une dimension d'espace, on définit les volumes comme des segments (d'indice i) contigus. La frontière de chacun de ces segments est composée de ses deux extrémités (Fig. 4.2). A la frontière gauche (interface $i - 1/2$ entre les volumes $i - 1$ et i), la normale est donnée par $n_x = -1$; à la frontière droite (interface $i + 1/2$) la normale est $n_x = +1$. L'équation (4.24) devient donc :

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} d\Omega - F_{i-1/2} + F_{i+1/2} = 0 \quad (4.25)$$

En intégrant (4.25) par rapport au temps entre les pas de temps n et $n + 1$, on obtient :

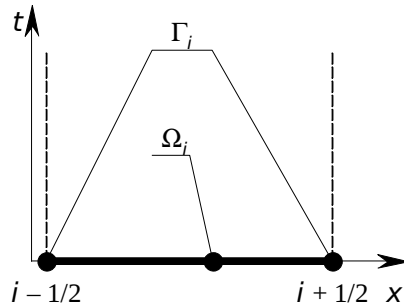


Fig. 4.2. Définition d'un volume pour une dimension d'espace.

$$U_i^{n+1} - U_i^n \Delta x + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (F_{i-1/2} - F_{i+1/2}) dt = 0 \quad (4.26)$$

où U_i^n est la valeur moyenne de U sur le volume i au pas de temps n . (4.26) peut s'écrire sous la forme :

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{1}{\Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (F_{i-1/2} - F_{i+1/2}) dt \quad (4.27)$$

Cette équation n'est qu'une autre expression de la conservation : l'accroissement de U au cours d'une durée Δt est égal au cumul, au cours de cette durée, de la différence entre les flux entrants et sortants. La différence entre cette formulation et la formulation (4.16) est que (4.27) est valide même si U et F sont discontinus. En revanche, (4.16) fait l'hypothèse de la continuité de U et F par rapport aux temps et à l'espace (sans quoi il est impossible de calculer les dérivées partielles $\partial/\partial t$ et $\partial/\partial x$).

On notera d'ailleurs que (4.16) est un cas particulier de (4.27), obtenu en appliquant (4.27) sur un volume infinitésimal de largeur δx sur une durée infinitésimale δt .

Remarque importante. Dans la formulation aux volumes finis, la quantité U_i n'est pas une valeur en un point, c'est la valeur moyenne de U sur le volume i . Dans les méthodes aux volumes finis, la notion de point de calcul n'a pas de sens. Il est fréquent de voir apparaître dans la littérature des méthodes dites « volumes finis » qui utilisent des points de calcul : il s'agit en fait de méthodes aux différences finies dites « avec volume de contrôle ».

4.2.3 Application: l'équation de convection conservative

La forme conservative de l'équation de convection est la suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial (uC)}{\partial x} = 0 \quad (4.28)$$

où le flux F est défini comme $F = uC$. Le flux à l'interface $i + 1/2$ peut être approché comme :

$$F_{i+1/2} = \begin{cases} uC_i & \text{si } u \geq 0 \\ uC_{i+1} & \text{si } u \leq 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

En substituant dans (4.27), il vient :

$$C_i^{n+1} = \begin{cases} C_i^n + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} (C_{i-1}^n - C_i^n) & \text{si } u \geq 0 \\ C_i^n + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} (C_i^n - C_{i+1}^n) & \text{si } u \leq 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

Chapitre 5

Conseils pratiques

5.1 Prise en main d'un logiciel de simulation

Lors de la prise en main d'un logiciel de modélisation il est fortement conseillé de procéder aux vérifications suivantes :

- a. La nature des EDOs/EDPs résolues par le logiciel (phénomènes pris en compte, forme conservative/non conservative, *etc.*) Ceci permet de se faire une idée *a priori* du comportement des solutions calculées par le logiciel et de déceler d'éventuelles déficiences. Par exemple, il ne faut pas s'attendre à observer un ressaut hydraulique dans une solution calculée par un logiciel résolvant l'équation de l'onde diffusive ou utilisant la méthode des caractéristiques.
- b. La nature des méthodes numériques utilisées par le logiciel: explicite/implicite, avec limitation automatique du pas de temps ou possibilité de laisser prescrire ce dernier par l'utilisateur, etc.
- c. Le degré de maîtrise laissé à l'utilisateur sur la résolution des équations : lorsque les équations non-linéaires, a-t-on la possibilité de spécifier le nombre maximum d'itérations, le critère de convergence de ces itérations, ou ceux-ci sont-ils déterminés automatiquement par le logiciel ? (*N.B.* : la question est aussi valable pour les directions alternées).
- d. La documentation comprend-elle des cas-test élémentaires (*Ex.* comparaison avec des solutions analytiques) permettant de se faire une idée de la précision du logiciel ? Si non, il peut être utile (et instructif) de procéder soi-même à de tels tests.

5.2 En cas de problème

En cas de problème (instabilité, mauvaise qualité de la solution), la réponse aux

questions suivantes permet souvent de se faire une idée de la nature du problème :

- a. Lorsque les équations à résoudre sont hyperboliques, le paramètre numérique important est le nombre de Courant. Une valeur du nombre de Courant trop éloignée de 1 entraîne la dégradation de la qualité de la solution numérique, et parfois son instabilité.
- b. Lorsque les équations à résoudre sont paraboliques, le nombre de Fourier devrait être maintenu aussi proche que possible de 1/2 afin de préserver la qualité de la solution.
- c. Si la méthode numérique est implicite (cas de la majorité des logiciels du commerce), le nombre maximum d'itérations est-il suffisant ? Le critère de convergence des itérations est-il suffisamment fin ?
- d. Pour des applications 2D ou 3D : Le maillage n'est-il pas trop « étiré » dans une direction de l'espace ou trop « comprimé » dans une autre ? La présence de mailles excessivement « plates » ou « allongées » peut induire des problèmes (polarisation artificielle des champs de vitesse le long du maillage, *etc.*)
- e. De manière générale, le maillage est-il suffisamment fin dans toutes les directions de l'espace pour permettre une prise en compte précise des variations de la géométrie, de l'écoulement, *etc.* ?

Annexe A

Lexique mathématique Français/Anglais

Cette annexe a pour but d'aider le lecteur dans ses premières lectures (et rédactions, ou présentations !) de documents mathématiques en langue Anglaise.

Français Anglais

Vocabulaire

Amont Upstream

Aval Downstream

Bief Reach

Centre

Centre (English), Center (American)

Condition initiale

Initial condition

Condition à la limite (aux limites)

Boundary condition(s)

Consistence Consistency

Convergence Convergence

Courbe de remous

Backwater curve

Débit Discharge

Décentré amont

Upstream-centred, Upwind

Dérivée differential,

derivative

Dériver (une fonction)

Differentiate (to)

Domaine de calcul

Computational domain

Écoulement permanent

Steady (state) flow

Écoulement transitoire

Unsteady (state) flow

Équation Différentielle Ordinaire (EDO)

Ordinary Differential Equation (ODE)

Équation aux Dérivées Partielles (EDP)

Partial Differential Equation (PDE)

Exposant (dans une notation)

Superscript

Exposant (dans un calcul)

Exponent

Indice (dans une notation)

Subscript

Indice (d'un point)

Index

Instabilité Instability

Instable Unstable

Limite droite

Right-hand boundary

Limite gauche	Left-hand boundary
Maillage adaptatif	Adaptive grid
Maillage structuré	Structured mesh (or grid)
Maillage non structuré	Unstructured mesh (or grid)
Maillage curviligne	Curvilinear grid
Mal posé (problème)	Ill-posed (problem)
Onde Wave	
Pas de temps	Time step
Pas d'espace	Space step
Passer par (en) un point (pour une courbe)	to pass <i>at</i> a point
du premier ordre	first-order (note the hyphen)
Pente (du fond, du terrain)	Slope
Point de calcul	Computational point
Polynôme polynomial	
Profondeur Depth	
Propriété Property	
Rayon hydraulique	Hydraulic radius
Rapport entre <i>a</i> et <i>b</i> (au sens <i>a/b</i>)	Ratio of (from) <i>a</i> to <i>b</i>
Section en travers	Cross-section
Schéma numérique	Numerical scheme
Sous-critique Subcritical	
Stabilité Stability	
Supercritique Supercritical	
<i>Expressions</i>	
c.à.d. (c'est-à-dire)	i.e. (du latin <i>id est</i>)
'ceci est fonction de cela'	'this is <i>a</i> function <i>of</i> that'
'en fonction de'	'as a function of', or 'depending on', or 'according to' (context dependent)
3 fois plus que	Three times as much as
Plus grand que (supérieur à)	Larger than
Plus petit que (inférieur à)	Smaller than
<i>Fonctions</i>	
10^5	'ten to the power of five' (also shortened as 'ten to the five')
x^2	'x squared'
x^3	'x cubed'
x^n	<i>x</i> to the power of <i>n</i>
x/y	<i>x</i> over <i>y</i>

xy (multiplication)	x times y (also 'multiplied by')
$x - y$	x minus y
tg (fonction tangente)	tan (tangent function)
cos (fonction cosinus)	cos (cosine function)
sin (fonction sinus)	sin (sine function)
arctg (fonction arc tangente)	atan (inverse tangent function)
e^x (exponentielle)	exp(x) ('exponential x ')

Annexe B

L'équation de convection (advection)

Cette annexe démontre l'équivalence de l'équation de convection (1.31)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

et de l'équation (3.1) qui fait intervenir la dérivée totale D/Dt :

$$\frac{DU}{Dt} = 0 \quad \text{pour} \quad \frac{dx}{dt} = \lambda$$

La dérivée totale d'une quantité U est la dérivée par rapport au temps de la quantité U , vue par un observateur se déplaçant à une certaine vitesse, notée λ . Pendant une durée infinitésimale δt , l'observateur se déplace d'une distance δx donnée par :

$$\delta x = \lambda \delta t \quad (\text{B.1})$$

L'accroissement total de la variable U constaté par cet observateur est donné par :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t} \delta t + \frac{\partial U}{\partial x} \delta x \quad (\text{B.2})$$

En remplaçant (B.1) dans (B.2), il vient :

$$\begin{aligned} dU &= \frac{\partial U}{\partial t} \delta t + \frac{\partial U}{\partial x} \lambda \delta t \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x} \right) \delta t \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

La dérivée totale est égale au quotient de l'accroissement total δU et de la durée δt au cours de laquelle il a été constaté :

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{\delta U}{\delta t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x} \quad (\text{B.4})$$

Or, d'après (1.31), $\partial U / \partial t + \lambda \partial U / \partial x = 0$. Donc (3.1) est bien vérifiée.