

Université CADI AYYAD
Faculté des sciences juridique économique et sociales

Le MEDAF
Et choix d'investissement

IGBIDA Issam
FAOUZI Ismail

Master FA/TETQ
Année universitaire 2008/2009

Sommaire

1-Le MEDAF

2-Choix d'investissement

3-L'application du MEDAF au choix d'investissement

Introduction

Développé essentiellement par WILLIAM Sharp (1964) le modèle de MEDAF (modèle d'évaluation des actifs financiers) est un modèle qui explique les taux de rentabilité des actifs en fonction de leur risque.

Dans ce travail nous intéresserons aux problèmes de décision d'investissement aux projets dont le risque doit être pris en considération.

Nous représentant l'application de MEDAF à savoir la détermination du taux d'actualisation employé pour calculer la VAN

Le MEDAF permet de déterminer le taux d'actualisation employé pour calculer la VAN dans les problèmes de décision d'investissement et dans celui d'évaluation de certains actifs financiers.

1-MEDAF

Le MEDAF repose sur un certain nombre d'hypothèses dont certaines semblent difficilement acceptables; il ne faut pas cependant oublier que la validité d'un modèle ne dépend pas du réalisme de ses hypothèses mais bien de la conformité de ses implications avec la réalité. Dans tout ce qui suit nous supposons que:

- Les investisseurs composent leurs portefeuilles en se préoccupant exclusivement de l'espérance et de la variance de rendement de ces derniers.
- Les investisseurs sont averses au risque: ils n'aiment pas le risque.
- Il n'y a pas de coût de transaction et les actifs sont parfaitement divisibles.
- Ni les dividendes, ni les gains en capitaux ne sont taxés.

- De nombreux acheteurs et vendeurs interviennent sur le marché et aucun d'entre eux ne peut avoir d'influence sur les prix.
- Tous les investisseurs peuvent prêter ou emprunter le montant qu'ils souhaitent au taux sans risque.
- Les anticipations des différents investisseurs sont homogènes.
- La période d'investissement est la même pour tous les investisseurs.

Le MEDAF stipule que le rendement espéré d'un actif est une fonction de son risque systématique. En effet, il est possible de décomposer le risque total d'un actif en deux parties:

Risque total = risque systématique (ou encore risque marché) + risque non systématique
(risque spécifique à l'actif)

Le risque systématique est attribuable aux mouvements généraux du marché et de l'économie: inflation, changement de gouvernement. Comme ce risque influence tous les actifs transigés sur le marché, il est impossible de l'éliminer par la diversification. Le risque systématique peut être mesuré par le bêta qui nous informe donc sur le degré de dépendance entre la volatilité des rendements sur le marché et la volatilité de rendement de l'actif considéré. Le bêta peut être calculé comme suit:

$$\beta_i = \frac{COV(R_m, R_i)}{Var(R_m)}$$

Le MEDAF nous donne la relation à l'équilibre entre le rendement espéré d'un actif ou d'un portefeuille imparfaitement diversifié et son risque. Ce modèle nous donne la relation suivante:

$$E(R_i) = r_f + [E(R_m) - r_f] \times \beta_i$$

R_i Rentabilité de titre

R_m Rentabilité de marché

r_f taux sans risque

Le MEDAF stipule donc que le taux de rendement espéré (ou que devrait exiger un investisseur rationnel averse au risque) d'un actif risqué doit être égal au taux de rendement de l'actif sans risque, plus une prime de risque. Dans ce cas, la relation entre le risque systématique et le rendement espéré demeure linéaire et seul le risque systématique doit être rémunéré par le marché puisque le risque spécifique peut être éliminé grâce à la diversification.

2-Choix d'investissement

La Valeur Actuelle Nette (VAN)

La valeur actuelle nette d'un projet correspond à la valeur actuelle de tous les flux monétaires anticipés du projet. Elle se détermine comme suit:

$$VAN = -I + \sum \frac{CFN}{(1+i)}$$

Un projet sera jugé rentable lorsque sa VAN est supérieur à 0, et non rentable quand sa VAN est négative.

Règle de décision :

- Pour les projets indépendants, on accepte les projets dont la VAN est supérieure à zéro.
- Pour les projets mutuellement exclusifs, on retient le projet dont la VAN est la plus élevée à condition qu'elle soit supérieure à zéro.

Remarque :

Dans le cas particulier où les cash-flows nets sont uniformes d'une année à une autre, l'équation de la VAN peut s'écrire comme suit:

$$VAN = I_0 + CFN \frac{1-(1+i)^n}{i}$$

Exemple

X et Y sont deux projets mutuellement exclusifs dont les caractéristiques apparaissent ci-après. Sachant que le taux d'actualisation est de 10%, calculer la VAN de chaque projet et dire quel projet doit-on retenir

Projet	Io	CFN ₁	CFN ₂	CFN ₃	CFN ₄
X	100000	50000	40000	30000	10000
Y	100000	35000	35000	35000	35000

$$VAN(x) = 7881,975$$

$$VAN(y) = 10945,291$$

On choisit le projet B

L'indice de rentabilité (IR)

L'indice de rentabilité appelé aussi indice de profitabilité se définit comme étant le résultat de la division de la valeur actualisée des flux monétaires à venir par l'investissement initial. En conséquence, il constitue une mesure de la rentabilité d'un projet par unité monétaire initialement investi. L'indice de rentabilité se définit comme suit:

$$IR = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{CFN_t}{(1+t)^t}}{I_o}$$

Un projet sera jugé rentable lorsque son indice de rentabilité est supérieur à 1. Ainsi, la valeur actualisée des flux monétaires à venir est supérieure à l'investissement initial. Le projet a donc une VAN positive.

Lorsqu'un indice de rentabilité est inférieur à 1, la VAN du projet est négative, ce dernier est jugé non rentable.

Règle de décision :

- Pour les projets indépendants, on accepte les projets dont l'IR est supérieure à 1.
- Pour les projets mutuellement exclusifs, on retient le projet dont l'IR est supérieure à 1 et le plus élevé.

Exemple

Mêmes données que l'exercice précédent mais calculons l'indice de rentabilité

$$IR(A) = 1,0788$$

$$IR(B) = 1,1094$$

On choisit le projet B

Le Taux de Rentabilité Interne (TRI)

Le TRI est le taux d'actualisation pour lequel la VAN est nulle. Autrement dit c'est le taux pour lequel la somme des cash-flows actualisées est égale à la dépense initiale.

Règle de décision :

- Pour les projets indépendants, on accepte les projets dont le TRI est supérieur au taux de rendement requis par les dirigeants de l'entreprise.
- Pour les projets mutuellement exclusifs: on retient le projet ayant le TRI le plus élevé à condition qu'il soit supérieur au taux de rendement requis par les dirigeants de l'entreprise.

Exemple

Une entreprise envisage 2 projets mutuellement exclusifs X et Y exigeant un investissement de 50000 TND et 30000 TND respectivement. Les flux anticipés relatifs à chacun des projets sont :

Année	X	Y
1	0	20000
2	0	12000
3	90000	10000

En se basant sur le critère TRI quel projet doit-on choisir si le taux de rendement minimum requis est de 10 %.

$$TRI(X) = 21,64 \%$$

$$TRI(Y) = 21,91 \%$$

Choisir le projet Y

3-L'application du MEDAF au choix d'investissement

Lors de l'analyse d'un projet, la connaissance du taux d'actualisation permet de savoir si ce projet sera lancé ou non car une valeur actuelle nette positive correspond a un projet rentable .le taux a prendre en considération correspond au cout du capitale est parfois

spécifique au projet. Le MEDAF nous indique le cout à utiliser si l'on connaît la classe de risque du projet. Classe de risque qui est donné par le niveau de la beta. La dimension risque sera ainsi incorporé dans le taux d'actualisation. Plus un projet sera risqué, plus il aura une beta élevé, et plus son taux d'actualisation sera important.

Méthode de taux d'actualisation ajusté au risque

Cette méthode repose sur la prise en compte du risque au niveau du taux d'actualisation

Proposition

Lorsque le MEDAF est valide, le taux d'actualisation utilisé pour sélectionner les projets est donné par

$$k = r_f + \beta(E(r_m) - r_f)$$

K cout du fond propre de l'entreprise

r_f taux sans risque

r_m taux de marché

$$\beta \text{ mesure de risque} = \frac{\text{cov}(r_e, r_m)}{\text{var}(r_m)}$$

Exemple

Le taux sans risque égale a 3 tandis que le prime de risque du marché s'élève a 8,5 les flux du projet sont de 8M sur 4 ans , le montant d'investissement et de 20M

Déterminant la VAN du projet si sont Beta égale 1,3

$$k = r_f + \beta(E(r_m) - r_f)$$

$$k = 3\% + 1,3(8,5\%) = 14,05\%$$

Nous déterminant la VAN

$$VAN = -20M + \sum_{t=1}^4 \frac{8M}{(1,1405)^t} = 3,2858M$$

Le lancement du projet va générer une valeur nette de 3,2858 million.

L'entreprise ne choisira que les projet ayant leur taux de rendement $\geq k$

Remarque :

* Ce modèle ne devrait être utilisé que pour des projets dont la durée de vie est d'une seule période car l'une des hypothèses de base du MEDAF est que l'horizon de planification est d'une période.

* En outre, l'équation ne devrait être utilisée pour déterminer le taux de rendement minimal à exiger sur un projet d'investissement que dans les deux cas suivants :

1- l'entreprise est financée à 100% par des fonds propres ou

2- la structure de capital n'a aucune influence sur le coût du capital.

Si cette ces conditions ne sont pas vérifier il convient d'ajuster le taux de rendement minimal pour tenir compte de l'impact du financement par dette.

EXERCICE 1

Une personne examine ses projets d'investissement pour l'année à venir. Elle vous communique les informations suivantes :

- Le taux sans risque est de 6% ;
- La rentabilité du portefeuille du marché est de 13 %.
- Le β de l'ensemble des projets de l'entreprise est de 1,3.

Quatre projets sont plus particulièrement étudiés, leurs caractéristiques sont les suivantes :

Projet	β	Rentabilité attendue
A	0,3	10 %
B	1,1	12 %
C	2,0	18 %
D	1,5	17 %

Quels sont, parmi ces projets, ceux qui sont acceptables, si l'on ne retient que ceux qui présentent une rentabilité supérieure à celle proposée par le marché pour un risque systématique équivalent ?

Placez les projets sur la figure précédente.

Corrigé

$$1) E(R_a) = r + \beta_a [E(R_m) - r] = 15,1\%$$

Le coût moyen du capital de la firme est égal à 15,1%. Les dirigeants doivent normalement retenir les projets offrant une rentabilité supérieure à 15,1%. Il convient toutefois de prendre en compte le risque systématique de chacun des projets.

2)

Projet	β	Rentabilité exigée (MEDAF)	Rentabilité attendue	Décision
A	0.3	8.1%	10%	Accepter
B	1.1	13.7%	12%	Rejeter
C	2.0	20%	18%	Rejeter
D	1.5	16.5%	17%	Accepter

EXERCICE 2

On considère deux projets V et N qui requièrent un investissement initial de 1 000 TND et qui ont une durée de vie de 6 ans. Ils sont caractérisés par le flux du tableau suivant en milliers de TND

Années	1	2	3	4	5	6
V	100	200	300	400	500	800
N	350	350	350	350	350	350

Ces deux projets sont risqués. L'entreprise envisage plusieurs manières de traiter le risque dans l'appréciation des projets.

Vous disposez des informations suivantes :

- Le taux sans risque est de 7%

- La rentabilité du portefeuille de marché est de 15%
- Le β du projet V est 2 tandis que celui du projet N est 1,3
- Une première estimation des coefficients équivalents certains pour les deux projets donne 0,8 pour le projet V et 0,9 pour le projet N

1/ Quel projet convient-il de sélectionner dans un environnement sans risque en retenant les critères suivants :

- valeur actuelle nette
- taux interne de rentabilité
- taux d'indifférence entre les deux projets

2/ Si l'on se situe dans un environnement risqué :

a/ Quels sont les taux d'actualisation à retenir pour ces deux projets si l'on se réfère au MEDAF ? On retient les projets pour lesquels le TIR est supérieur au taux d'actualisation précédent ; quel projet est acceptable ?

b/ Calculez les valeurs actuelles nettes des projets V et N dans ce contexte ; quel projet faut-il entreprendre ?

3/ a/ Si l'ajustement de la VAN est fait à l'aide des coefficients équivalents certains, quel projet doit-on privilégier ?

b/ Déterminez le coefficient équivalent certain moyen à appliquer aux flux de V et N pour que leurs VAN soient égales à celles trouvées en 2.b .

c/ Déterminez les coefficients équivalents certains à appliquer à chacun des flux.

Corrigé

1-a- Calcul de la VAN

$$VAN_V = 707,76$$

$$VAN_N = 668,28$$

b- Calcul du TRI

$$TRI_V = 21,69 \%$$

$$TRI_N = 26,44\%$$

Selon le critère VAN on doit choisir le projet V mais Selon le critère TRI on doit choisir le projet N \Rightarrow **Conflit de critère**

c- Détermination du taux d'indifférence taux d'indifférence = 9,52 %

Si le taux d'actualisation est inférieur à 9,52% \Rightarrow choix de V.

2-a-

$$E(R_V) = 23\%$$

$$E(R_N) = 17,4\%$$

$TRI_N > E(R_N) \Rightarrow$ Choix du projet N.

b-

$$VAN_V = -41,902$$

$$VAN_N = 243,230$$

$VAN_N > 0 \Rightarrow$ projet acceptable.

3-a-

$$VAN_V = 366.208$$

$$VAN_N = 501,452$$

\Rightarrow Choisir le projet N

b-

$$VAN_V = -1000 + \sum_{t=1}^6 \alpha_V CFN_t (1+i)^{-t} = -1000 + \sum CFN_t (1 + (E(R_V)))^{-t}$$

$$\Rightarrow \alpha_V = \left[\frac{\sum_{t=1}^6 \frac{CFN_t}{(1 + E(R_V))^t}}{\sum_{t=1}^6 \frac{CFN_t}{(1+i)^t}} \right] = \left[\frac{\sum_{t=1}^6 \frac{CFN_t}{(1 + 0,23)^t}}{\sum_{t=1}^6 \frac{CFN_t}{(1 + 0,07)^t}} \right] = \frac{1000 + (-41,90)}{1000 + 707,76} = 0,561$$

$$VAN_N = -1000 + \sum_{t=1}^6 \alpha_N \times \frac{CFN_t}{(1+i)^t} = -1000 + \sum_{t=1}^6 \frac{CFN_t}{(1 + E(R_N))^t}$$

$$\Rightarrow \alpha_N = \left[\frac{\sum_{t=1}^6 \frac{CFN_t}{(1 + E(R_V))^t}}{\sum_{t=1}^6 \frac{CFN_t}{(1+i)^t}} \right] = \left[\frac{\sum_{t=1}^6 \frac{CFN_t}{(1 + 0,174)^t}}{\sum_{t=1}^6 \frac{CFN_t}{(1 + 0,07)^t}} \right] = \frac{1000 + (243,230)}{1000 + 668,28} = 0,745$$

c-

$$\alpha_t \times CFN_t(1+i)^{-t} = CFN_t(1+E(R))^{-t} \Rightarrow \alpha_t = \frac{CFN_t(1+E(R))^{-t}}{CFN_t(1+i)^{-t}} = \left(\frac{1+E(R)}{1+i} \right)^{-t}$$

$$\Rightarrow \alpha_{Vt} = \left(\frac{1+0,23}{1+0,07} \right)^{-t} \quad \text{et} \quad \alpha_{Nt} = \left(\frac{1+0,174}{1+0,07} \right)^{-t}$$

t	1	2	3	4	5	6
V	0.87	0.76	0.66	0.57	0.5	0.43
N	0.91	0.83	0.76	0.69	0.63	0.57

Exercice 3

Une entreprise étudie trois projets d'investissement (durée de vie 8 ans) dont les caractéristiques vous sont données dans les tableaux I et II. Les flux d'investissement (date 0) et les flux de trésorerie ultérieurs (égaux des années 1 à 8) sont incertains.

Tableau I : Flux d'investissement à la date 0.

Etats de la nature	1	2	3	4
Projet X Probabilité = p	100000 p = 0,05	120000 p = 0,1	130000 p = 0,70	140000 p = 0,15
Projet Y Probabilité = p	90000 p = 0,15	115000 p = 0,25	135000 p = 0,40	145000 p = 0,20
Projet Z Probabilité = p	85000 p = 0,20	120000 p = 0,30	140000 p = 0,30	150000 p = 0,20

Tableau II : Flux de trésorerie nets annuels de l'année 1 à l'année 8.

Etats de la nature	1	2	3	4	5
Probabilité	0,08	0,18	0,35	0,24	0,15
Projet X	50000	35000	30000	20000	15000

Projet Y	60000	45000	40000	15000	3000
Projet Z	100000	70000	50000	10000	- 25000

a/ Calculer l'espérance des flux de l'investissement et des flux de la trésorerie, leur écart type et leur coefficient de variation.

b/ Calculer l'espérance de valeur actuelle nette de chacun des projets pour un taux d'actualisation de 13 %, ainsi que les taux internes de rentabilité des trois projets .

c/ Tracer les courbes des VAN en fonction des taux d'actualisation.

La comparaison de trois projets de risques différents à l'aide d'un même taux d'actualisation n'est pas pertinente ; le taux sans risque étant de 6%, on estime les primes de risque à 5 % pour le projet X, à 10 % pour le projet Y et à 15 % pour le projet Z.

d/ Que deviennent les valeurs actuelles nettes des trois projets ? Quel projet faut-il accepter.

Le directeur de l'entreprise n'est pas très sûr des primes de risque de la question précédente.

e/ A quels taux faudrait-il actualiser les flux des projets Y et Z pour que leurs E(VAN) soient égales à celle de X dans la question précédente ?

Pour préciser l'appréciation de la rentabilité et du risque des projets, les dirigeants de la firme font effectuer une nouvelle étude qui fournit les prévisions de la rentabilité de marché R_m et des rentabilités des trois projets pour les cinq états de la nature précédents (voir tableau III)

Tableau III : Rentabilités des projets.

Etats de la nature	R_m	R_x	R_y	R_z
1	0,28	0,2	0,24	0,4
2	0,22	0,2	0,25	0,2
3	0,17	0,15	0,16	0,22
4	0,15	0,16	0,14	0,12
5	0,12	0,12	0,12	0

f/ Calculer les β des trios projets et déterminer le taux de rentabilité exigé à partir de la relation du MEDAF. Quels sont les projets acceptables si l'on retient ceux dont l'espérance de rentabilité est supérieure au taux exigé par le MEDAF ? Quel classement des trois projets peut-on proposer.

Une société d'études financières consultée par les dirigeants de la firme estime que les prévisions précédentes de la rentabilité de marché doivent être révisées comme suit :

Etat de la nature	1	2	3	4	5
Rm	0,09	0,12	0,18	0,24	0,29

g/ Déterminer les nouveaux β des projets, les taux de rentabilité proposés et exigés.

Comment peut-on classer les projets dans ce cas ? Expliquer ces résultats

h/ Quel avis pouvez-vous donner aux dirigeants de la firme.

Corrigé

-a-

	Projet X	Projet Y	Projet Z
$E(I_0) = \sum_j I_{0j} \times P_j$	$E(I_0) = 129000$	$E(I_0) = 125250$	$E(I_0) = 125000$
$\sigma(I_0) = \sqrt{\sum_j (I_{0j} - E(I_0))^2 \times P_j}$	$\sigma(I_0) = 8306,6239$	$\sigma(I_0) = 18129,741$	$\sigma(I_0) = 22803,509$
$CV(I_0) = \frac{\sigma(I_0)}{E(I_0)}$	$CV(I_0) = 0,064$	$CV(I_0) = 0,1448$	$CV(I_0) = 0,1824$
$E(CFN_t) = \sum_j CFN_{ij} \times P_j$	$E(CFN_x) = 27850$	$E(CFN_y) = 30950$	$E(CFN_z) = 36750$
$\sigma(CFN_t)$	$\sigma(CFN_x) = 9467,1802$	$\sigma(CFN_y) = 17605,326$	$\sigma(CFN_z) = 36839,387$
$CV(CFN_t) = \frac{\sigma(CFN_t)}{E(CFN_t)}$	$CV(CFN_x) = 0,3399$	$CV(CFN_y) = 0,5688$	$CV(FN_z) = 0,9902$

b-

$$E(VAN_x) = 4645,527$$

$$TRI_x = 14,07\%$$

$$E(VAN_y) = 23271,941$$

$$TRI_y = 18,26\%$$

$$E(VAN_z) = 51354,941$$

$$TRI_z = 24,25\%$$

d-

$$E(R_x) = r + \beta_x [E(R_m) - r] = 0,06 + 0,05 = 11\%$$

$$E(R_y) = r + \beta_y [E(R_m) - r] = 0,06 + 0,1 = 16\%$$

$$E(R_z) = r + \beta_z [E(R_m) - r] = 0,06 + 0,15 = 21\%$$

$$E(VAN_x) = -129000 + 27850 \frac{1 - 1,11^{-8}}{0,11} = 14319,519$$

$$E(VAN_y) = -125250 + 30950 \frac{1 - 1,16^{-8}}{0,16} = 9184,1382$$

$$E(VAN_z) = -125000 + 36750 \frac{1 - 1,21^{-8}}{0,21} = 14319,519$$

X est préféré à Z qui est préféré à Y.

e-

$$i^*_y = 14,85\%$$

$$i^*_z = 20,42\%$$

f-

Le risque systématique d'un projet i est mesuré par son coefficient bêta :

$$\beta = \frac{\text{cov}(R_i, R_m)}{\text{Var}(R_m)}$$

$$\text{Cov}(R_i, R_m) = \sum_j (R_{ij} - E(R_i)) \times (R_{mj} - E(R_m)) P_j$$

$$\text{Var}(R_m) = \sum_j (R_{mj} - E(R_m))^2 P_j$$

A partir de la relation du MEDAF on peut déduire la rentabilité minimale exigée du projet :

$$E(R_i) = r + \beta_i [E(R_m) - r]$$

	Marché	Projet X	Projet Y	Projet Z
Cov (R _i , R _m)	0.001859	0.0010071	0.001845	0.003788
Var (R _m)	0.001859	0.001859	0.001859	0.001859
β _i	1	0.5418	0.9927	2.0380
E(R _i) offert par le projet	0.1755	0.1609	0.1718	0.1738
E(R _i) selon le MEDAF	0.1755	0.1226	0.1747	0.2954

⇒ Les projets Y et Z ne peuvent être acceptés car l'espérance de taux offert est inférieure au taux requis. Seul le projet X peut être retenu.

g-

	Marché	Projet X	Projet Y	Projet Z
Cov (R _i , R _m)	0.003809	-0.001392	-0.002648	-0.005554
Var (R _m)	0.003809	0.003809	0.003809	0.003809
β _i	1	-0.3654	-0.6953	-1,4583
E(R _i) offert par le projet	0.1929	0.1609	0.1718	0.1738
E(R _i) selon le MEDAF	0.1929	0.01144	-0.03241	-0.13381

Les rentabilités offertes par les 3 projets sont supérieures aux taux exigés

Le projet le moins risqué est Z suivi de Y puis de X.

Le projet Z est le plus rentable (17,38%) et le moins risqué, c'est le projet Z qui devrait être adopté.

h- Conclusion générale :

En adoptant un taux d'actualisation égal au coût du capital de l'entreprise, le projet le plus rentable est Z, suivi par Y puis par X. Cette approche ne tient pas en compte des

différences de risque entre les projets. Toute la difficulté réside dans l'appréciation de la prime de risque à retenir.

Si les primes de risque sont de 5% (X), 10% (Y) et 15%(Z), c'est le projet X qui doit être privilégié, suivi de Z puis de Y. L'estimation des primes de risque à partir de la relation du MEDAF et d'autres informations sur la rentabilité des projets conduit à préférer X puis Y tandis que Z dégage une VAN <0 et ne peut pas être adopté. Au contraire, si l'évolution de la rentabilité du marché est inversée, alors c'est le projet Z qui est préférables, suivi par Y puis par X.

Bibliographie

Michel ALBOUY Décisions financières et création de valeur ÉCONOMICA

Walid KHOUFI MEDAF et décisions d'investissement Flexibilité et choix des investissements Université de Sfax