Mathématiques Financières : l'essentiel

Les 10 formules incontournables
(Fin de période)

Rappels d'algèbre

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

Taux proportionnel – Taux équivalent

Taux Proportionnel

$$\boxed{t = \frac{i}{n}}$$

> *Exemple : taux mensuel **t** proportionnel à un taux annuel de 12%*
>
> $$t = \frac{12\%}{12 mois} = 1\%$$

Taux équivalent

$$\boxed{\begin{aligned}(1+t)^m &= (1+i)^n \\ &\Rightarrow (1+t) = \sqrt[m]{(1+i)^n} \\ &\Rightarrow (1+t) = (1+i)^{\frac{n}{m}}\end{aligned}}$$

> *Exemple : taux **t** mensuel équivalent à un taux **i** annuel de 12%*
>
> $$(1+t) = (1+0{,}12)^{\frac{1}{12}} = 1{,}00948$$ *(ou 0.9488%)*

Capitalisation – Actualisation

Valeur acquise *Vn* par un capital *Vo* placé pendant *n* périodes à un taux *i*

$$\boxed{V_n = V_0(1+i)^n} \quad \textbf{(1)}$$

Valeur acquise par un capital de 10.000 F placé pendant 5 ans au taux annuel de 7 % :

$$V_n = 10000(1{,}07)^5 = 14025{,}52$$

Même calcul, mais intérêts composés trimestriellement.

Etape 1 : Détermination du taux trimestriel équivalent à 7% annuel

$$1+t = 1{,}07^{\frac{1}{4}} = 1{,}01706 \Rightarrow t = 1{,}706\%$$

Etape 2 : calcul de la valeur acquise d'un capital de 10000 F placé pendant 20 périodes (5 années de 4 trimestres) au taux de 1.706%

$$V_n = 10000(1{,}01706)^{20} = 14025{,}52$$

On constate que, les taux étant équivalents, les valeurs futures sont strictement identiques, quelle que soit la période de composition choisie.

Valeur actuelle *Vo* (actualisation) d'une valeur future *Vn* actualisée sur *n* périodes à un taux *i*

$$\boxed{V_0 = V_n(1+i)^{-n}} \quad \textbf{(2)}$$

Combien faudrait-il placer aujourd'hui, sur un livret de Caisse d'Epargne à 4% par an, pour disposer de 100.000 F dans 8 ans ?

$$V_0 = 100000(1{,}04)^{-8} = 73.069{,}02$$

Emprunts indivis – Annuités (fin de période)

Valeur future *Vn* d'une suite d'annuités *a* placées au taux *i* pendant *n* périodes

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad \textbf{(3)}$$

Quelle sera la valeur totale d'une série de versements de 500 F par mois, versés en fin de période pendant 8 ans au taux de 5,15% par an ?

Etape 1 : taux mensuel équivalent à 5,15% annuel

$$1 + t = 1{,}0515^{\frac{1}{12}} = 1{,}00419 \Rightarrow t = 0{,}419\%$$

Etape 2 : calcul de la valeur future

$$V_n = 500\frac{1{,}00419^{96} - 1}{0{,}00419} = 58939{,}64$$

Problème corollaire : montant de l'annuité a pour constituer un capital Vn

De la formule ci-dessus, on peut facilement déduire *a* en supposant *Vn* connu :

$$a = V_n\frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad \textbf{(4)}$$

Avec les mêmes données que l'exemple précédent (taux et durée), combien aurait-il fallu verser mensuellement pour obtenir un capital de 100.000 F au terme des 8 années ?

Le calcul est direct (nous connaissons déjà le taux mensuel équivalent).

$$a = 100000\frac{0{,}00419}{1{,}00419^{96} - 1} = 848{,}33$$

Valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de fin de période

$$\boxed{V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \qquad \textbf{(5)}$$

Une assurance vie propose deux formules en cas de décès :

- *Versement d'un capital unique de 500.000 F*
- *Versement d'une rente annuelle de 50.000 F pendant 12 ans*

En considérant un indice du coût de la vie de 2 % par an, laquelle des deux formules est la plus intéressante ?

Il faut calculer la valeur actuelle des 12 versements annuels de 50.000 F. en appliquant la formule d'actualisation des annuités constantes :

$$V_0 = 50000\frac{1-(1+0,02)^{-12}}{0,02} = 528767,06$$

Il est donc beaucoup plus intéressant de choisir la rente annuelle pendant 12 ans (à condition que le bénéficiaire survive, lui).

Prenons le même problème, mais avec un taux d'inflation de 8 %. Le calcul d'actualisation donne dans ce cas une Vo de 376.803,90 F. On aura donc intérêt à préférer le versement immédiat.

Problème corollaire : montant de l'annuité a connaissant Vo, le taux et la durée (problème de l'annuité de remboursement de crédit).

$$\boxed{a = V_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}} \qquad \textbf{(6)}$$

Un ami vous demande de lui prêter 10.000 F, qu'il se propose de vous rembourser en 12 mensualités. Quel montant de mensualité devez-vous lui demander pour vous assurer un taux de 5 % ?

Calcul du taux proportionnel mensuel à 5 % annuel :

$$(1+0,05)^{\frac{1}{12}} = 1,00407$$

Calcul de l'annuité :

$$a = 10000\frac{0,00407}{1-(1+0,00407)^{-12}} = 855,54$$

Ce n'est pas encore de l'usure !

Calcul du premier amortissement d'un emprunt

Rappel : une annuité de remboursement (a) comprend une partie d'amortissement du capital emprunté (A) et une partie d'intérêts sur le capital.

$$\boxed{A_1 = V_0 \frac{i}{(1+i)^n - 1}} \quad \textbf{(7)}$$

Soit un emprunt de 100.000 F remboursable en 10 annuités à 5 %, Calculez :

1. *Le montant de l'annuité constante **a***
2. *Le montant de l'amortissement **A_1** compris dans la première annuité*
3. *Vérifiez que **a – A_1** (autrement dit, la part des intérêts compris dans la première annuité) est égal à 5 % du capital emprunté.*

*Calcul de l'annuité constante **a***

$$a = V_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \qquad \textit{soit}$$

$$a = 100000 \frac{0{,}05}{1-(1+0{,}05)^{-10}} = 12950{,}46$$

Calcul de la part en capital de la première annuité :

$$A_1 = 100000 \frac{i}{(1+0{,}05)^{10} - 1} = 7.950{,}46$$

Part des intérêts : $12.950{,}46 - 7.950{,}46 = 5.000{,}0$ *soit très exactement 5 % du capital emprunté, ce qui est normal : dans la première annuité, la totalité du capital produit des intérêts pendant toute la première période.*

Calcul d'un amortissement connaissant le précédent ou le suivant

$$\boxed{A_{p+1} = A_p(1+i) \quad \Leftrightarrow \quad A_p = \frac{A_{p+1}}{(1+i)}} \quad \textbf{(8)}$$

Dans le même exemple que ci-dessus, quel est la répartition entre capital et intérêt des 2ème, 3ème et 4ème annuités ?

Connaissant A_1, on applique la formule : $A_2=A_1(1+0{,}05)$, etc. Le montant des intérêts se déduit simplement en retranchant du montant de l'annuité l'amortissement du capital.

Annuité	***Part en Capital***	***Intérêts***
A2	*8.347,98*	*4.602,48*
A3	*8.765,38*	*4.184,64*
A4	*9.203,65*	*3.748,81*

Calcul du capital remboursé R_p après paiement de la $p^{ème}$ annuité

$$\boxed{R_p = A_1 \frac{(1+i)^p - 1}{i}} \qquad \textbf{(9)}$$

Connaissant le calcul de A1 en fonction de Vo, il est possible de remplacer A1 par :

$$R_p = V_0 \frac{i}{(1+i)^n - 1} \, x \, \frac{(1+i)^p - 1}{i}$$

Cette formule peut être simplifiée, en éliminant i, et devient :

$$\boxed{R_p = V_0 \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}} \qquad \textbf{(9bis)}$$

Toujours dans l'exemple ci-dessus, calculez le montant du capital remboursé après paiement de la 3ème échéance.

$$R_3 = 100000 \frac{(1+i)^3 - 1}{(1+i)^{10} - 1} = 25.063{,}83$$

Vérification : Nous avons calculé tout à l'heure le montant des amortissements en capital des 4 premières échéances. On peut donc vérifier que la somme des amortissements des trois premières échéances est bien égale au montant calculé :

7.950,46 + 8.347,98 + 8.765,38 =25.063,82.

Compte tenu des arrondis successifs, l'écart d'1 centime n'est pas significatif.

Calcul du capital V_p restant à rembourser après paiement de la $p^{ème}$ annuité

$$\boxed{V_p = a\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}} \qquad \textbf{(10)}$$

Toujours sur le même exemple, quel est le capital restant à rembourser après paiement de la $3^{ème}$ échéance ?

$$V_3 = 12950{,}46\frac{1-(1+0{,}05)^{-(10-3)}}{0{,}05} = 74.936{,}20$$

Vérification : Nous avons calculé le capital remboursé et le capital restant à rembourser après la troisième échéance. La somme de ces deux chiffres doit logiquement être égale au capital initial :

74.936,20 + 25063,83 = 100.000,03

Les centimes d'écart sont dus aux arrondis. Ils se régularisent normalement sur la dernière échéance de l'emprunt.