

1) Hypothèses

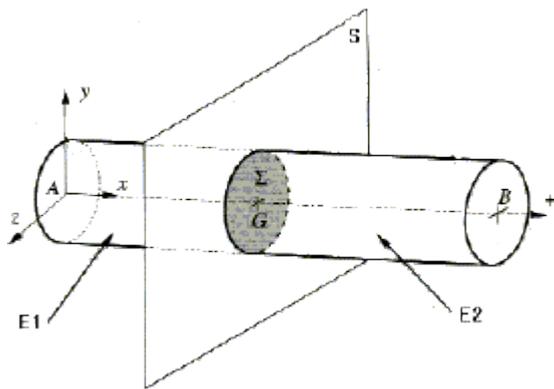
Pour faire une étude de résistance des matériaux, nous avons besoin de faire des hypothèses simplificatrices.

Une fois que ces hypothèses sont définies, nous pouvons nous lancer dans l'étude.

2) EFFORTS INTERIEURS ou Torseur de cohésion

Soit une poutre P, en équilibre sous l'effet d'actions mécaniques extérieures.

Pour mettre en évidence les efforts transmis par la matière au niveau de la section S, nous effectuons une coupure imaginaire dans le plan S. Il la sépare en deux tronçons E1 et E2.



On isole le tronçon E1.

-Les actions mécaniques que le tronçon E2 exerce sur le tronçon E1 à travers la section droite S sont des actions mécaniques intérieures à la poutre E.

Nous en ignorons à priori la nature, cependant la liaison entre E1 et E2 peut être modélisée par une liaison complète. On peut donc modéliser l'action mécanique E2 sur E1 par un

torseur appelé **torseur de cohésion** noté :

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(2/1) \\ \vec{m}_G(2/1) \end{Bmatrix}_R = - \begin{Bmatrix} \vec{R}(1/2) \\ \vec{m}_G(1/2) \end{Bmatrix}_R \text{ avec } G \in \text{ligne moyenne}$$

PAR CONVENTION on prendra toujours pour $\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}$ l'action mécanique de la partie droite sur la partie gauche $\Rightarrow \{\mathcal{T}_{\text{coh } 2/1}\}$

Détermination du torseur de cohésion :

On fait une étude statique de l'équilibre des tronçons E1 ou E2.

1. Equilibre de E1 (Somme des efforts à gauche) :

Système matériel isolé : Le tronçon E_1 .

Principe fondamental de la statique :

$$\{\overline{\pi(E/E_1)}\} = \vec{0} \Leftrightarrow \{\pi(\bar{E}/E_1)\} + \{\tau_{coh2/1}\} = \{0\} \Leftrightarrow \{\tau_{coh2/1}\} = -\{\pi(\bar{E}/E_1)\}$$

$$\{\tau_{coh2/1}\} = - \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{\bar{E} \rightarrow E_1} \\ \vec{M}_{G \bar{E} \rightarrow E_1} \end{array} \right\}_R$$

2. Equilibre de E2 (Somme des efforts à droite) :

Système matériel isolé : Le tronçon E_2 .

Principe fondamental de la statique :

$$\{\pi(\bar{E}/E_2)\} = \vec{0} \Leftrightarrow \{\pi(\bar{E}/E_2)\} + \{\tau_{coh1/2}\} = \{0\} \Leftrightarrow \{\tau_{coh1/2}\} = -\{\pi(\bar{E}/E_2)\}$$

$$\{\tau_{coh1/2}\} = - \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{\bar{E} \rightarrow E_2} \\ \vec{M}_{G \bar{E} \rightarrow E_2} \end{array} \right\}_R \Leftrightarrow \in \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{\bar{E} \rightarrow E_2} \\ \vec{M}_{G \bar{E} \rightarrow E_2} \end{array} \right\}_R$$

3. Conclusions :

Chaque tronçon est en équilibre et l'application du PFS, à l'un et à l'autre, permet de faire apparaître et de calculer les efforts intérieurs (torseur de cohésion) exercés au niveau de la coupure.

$$\{\tau_{coh}\} = \{\tau_{coh1/2}\}$$

torseur de cohésion = - Somme des torseurs d'action à gauche de la coupure

ou

torseur de cohésion = Somme des torseurs à droite de la coupure

Remarques :

Le torseur de cohésion (actions mécaniques intérieures) est modifié lorsque l'on déplace la coupure le long de la poutre :

- Si une discontinuité d'ordre géométrique (changement de direction de la ligne moyenne) apparaît (exemple : poutre en équerre).
- Si une discontinuité liée à une résultante nouvelle (ou un moment nouveau) apparaît.

Composantes du torseur de cohésion :

N : Effort normal sur (G, \vec{x})
 T_y : Effort tranchant sur (G, \vec{y})
 T_z : Effort tranchant sur (G, \vec{z})
 M_t : Moment (couple) de torsion sur (G, \vec{x})
 M_{fy} : Moment de flexion sur (G, \vec{y})
 M_{fz} : Moment de flexion sur (G, \vec{z})

$$\{F_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_R$$

3) SOLLICITATIONS SIMPLES ET COMPOSEES :

Sollicitations simples : Torseur de cohésion comprenant une seule sollicitation.

Sollicitations composées : Torseur de cohésion comprenant plusieurs sollicitations simples (Traction + flexion par exemple).

Tableau regroupant les sollicitations simples les plus courantes

Sollicitations	Effort normal	Effort tranchant	Moment de torsion	Moment de flexion	Ecriture du torseur de cohésion

Traction/compression	N	T = 0	M _t = 0	M _f = 0	$\{\chi_{coh}\} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$
Cisaillement (1)	N = 0	T	M _t = 0	M _f = 0	$\{\chi_{coh}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_Y & 0 \\ T_Z & 0 \end{Bmatrix}_R$
Torsion	N = 0	T	M_t	M _f = 0	$\{\chi_{coh}\} = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ T_Y & 0 \\ T_Z & 0 \end{Bmatrix}_R$
Flexion pure (2)	N	T = 0	M _t = 0	M_f	$\{\chi_{coh}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_R$

(1) Suivant l'orientation des sollicitations, l'effort T_y ou T_z peut être nul.

(2) Suivant l'orientation des sollicitations, le moment M_{fy} ou M_{fz} peut être nul.

[Retour au début du document](#)

4) NOTION de CONTRAINTE :

Notion de vecteur contrainte en un point.

Les actions mécaniques de cohésion sont les efforts que le tronçon (E2) exerce sur le tronçon (E1) à travers la section droite (S) de la coupure fictive. Ces actions mécaniques sont réparties en tous points de (S) suivant une loi a priori inconnue. Notons Δf l'action mécanique au point M

et ΔS l'élément de surface entourant ce point. Soit \vec{x} la normale issue de M au plan de la section (S), orientée vers l'extérieur de la matière du tronçon (E1).

On appelle vecteur contrainte au point M relativement à l'élément de surface ΔS orienté par sa normale extérieure \vec{x} , le vecteur noté $\vec{C}(M, \vec{x})$ tel que:

$$\vec{C}(M, \vec{x}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta S} = \frac{df}{dS}$$

On définit ensuite les contraintes normales et tangentielles respectivement la projection de $\vec{C}(M, \vec{x})$ sur la normale \vec{x} , et la projection de $\vec{C}(M, \vec{x})$ sur le plan de l'élément de surface ΔS .

τ : contrainte tangentielle (ou " de glissement ") si elle est dans la direction de la section (cisaillement, torsion).

σ : contrainte normale, si elle est perpendiculaire à la section (extension, compression, flexion).

Comme la charge limite d'élasticité à laquelle elle doit rester inférieure, la contrainte s'évalue dans le système légal en N/mm².

Pour une raison évidente d'économie de métal, on a intérêt à déterminer la forme d'une pièce de manière que la contrainte en chacun de ses points soit égale à la contrainte maximale admissible, mais la réalisation est parfois exagérément coûteuse

Ce qu'il faut savoir :

□ La contrainte est un vecteur. On utilise la plupart du temps ses projections appelées contraintes normale et tangentielle. L'unité de la contrainte est le rapport d'une force par une unité de surface (N/mm², MPa).

□ On peut dire en simplifiant, qu'une contrainte est une force intérieure appliquée à l'unité de surface au point donné de la section donnée. On pourra parler de densité de force par unité de surface.

□ La contrainte est définie pour un solide idéal (Hypothèses de la RdM). En réalité, les matériaux ne sont pas parfaitement homogènes. Les joints de

grains présents dans tous les alliages industriels créent des hétérogénéités de structure et de composition. Néanmoins, les calculs réalisés avec un milieu supposé continu donnent des résultats proches de la réalité.

Pour en savoir plus.

A quoi sert le calcul des contraintes ?

Expérimentalement, on a défini pour chaque matériau une contrainte limite admissible au-delà de laquelle la pièce subit des détériorations de ses caractéristiques mécaniques, dimensionnelles, voire une rupture. Le calcul de résistance des matériaux consiste à vérifier que les contraintes engendrées par les sollicitations extérieures ne dépassent pas la contrainte limite admissible par le matériau. Le calcul des contraintes sert à évaluer la *tension* dans la matière.

Peut-on observer une contrainte ?

Une contrainte est un outil de calcul, on ne peut pas l'observer directement, par contre on peut observer ses effets : études des déformations, études de la cassure, photoélasticité. A l'aide des trois méthodes précédentes, on peut évaluer les contraintes dans un matériau mais cela reste moins précis qu'un calcul de RdM à l'aide d'un logiciel de calcul par éléments finis.

Quels sont les paramètres qui influencent les contraintes ?

Nous avons vu précédemment que la contrainte est le rapport d'une force par une surface. Les paramètres qui influencent directement une contrainte sont : les sollicitations, la section de la poutre.