L'AVARE.

HARPAGON.

Il faut vivre pour manger et non pas manger pour vi.
Non, ce n'est pas cela. *Acte III, sc. V.*

<u>Harpagon</u>* : « C'est fort mal fait. Si vous êtes heureux au jeu, vous en devriez profiter et mettre à <u>honnête intérêt</u> l'argent que vous gagnez afin de le trouver un jour. Je voudrais bien savoir, sans parler du reste, à quoi servent tous ces rubans dont vous voilà lardé depuis les pieds jusqu'à la tête, et si une demi-douzaine d'aiguillettes ne suffit pas pour attacher un haut-de-chausses ? Il est bien nécessaire d'employer de l'argent à des perruques, lorsque l'on peut porter des cheveux de son cru qui ne coûtent rien. Je vais gager qu'en perruques et rubans il y a du moins vingt pistoles ; <u>et vingt pistoles rapportent par année dix-huit livres six sols huit deniers, à ne les placer qu'au denier douze. »</u> **(Molière - L'Avare – I.4 – 1668)**

Au denier douze signifie 1 denier d'intérêt pour 12 prêtés, … c'est-à-dire 8,33% !

INTÉRÊTS SIMPLES - INTÉRÊTS COMPOSÉS

I L'intérêt

Définition (« Petit Robert ») :

Somme due par l'emprunteur au prêteur ou reçue de l'emprunteur par le prêteur en plus du capital prêté.

Exemple 1 : Monsieur CLIO emprunte 12 000 € à sa banque pour l'achat d'une automobile. Il rembourse ce prêt en faisant 36 paiements mensuels de 365 €.

Donc l'intérêt versé est 36 × 365 − 12 000 = 1 140 €.

Exemple 2 : Madame JANVIER place 4 500 € pour 3 ans.

Au bout des 3 années, son capital est de 5 445 €. L'intérêt versé à Madame JANVIER est donc :

5 445 – 4 500 = 945 €.

Taux d'intérêt :

Le **taux d'intérêt** mesure la rémunération du banquier qui prête une unité monétaire ou de vous même pour une unité monétaire vous placez, pendant une période. Il s'exprime en général sous forme de pourcentage des sommes prêtées ou placées pour un an.

<u>Exemple :</u> un taux annuel de 6% signifie que pour 1 € emprunté, il sera remboursé 1,06 € au bout d'un an.

2 grandes catégories de taux :

- **taux fixe** : taux d'intérêt fixé lors de la signature du contrat. Il ne variera pas, quoi qu'il arrive.
- **taux variable** : taux non définitivement fixé, qui évolue à la hausse comme à la baisse en fonction de l'évolution d'un indice de référence (exemple, taux du livret A). Peut être dangereux !

Dans la détermination du **taux** dit **taux d'intérêt** servant à calculer l'intérêt, intervention des **deux rôles de l'intérêt** :

\- **rémunération du prêteur - ou créancier -** (agent économique) **par l'emprunteur - ou débiteur -** (autre agent économique)**,** en compensation de la mise à disposition d'une somme d'argent, appelée **capital** (principal au Québec).

\- **protection du prêteur** contre le risque (érosion monétaire au cours du temps, risque de non remboursement).

II. Deux façons différentes de calculer les intérêts

- Intérêt **proportionnel** à la durée de placement n : **intérêts simples.**
- Intérêt acquis à la fin de chaque période (généralement l'année) incorporé au capital pour porter à son tour intérêt : **intérêts composés**.

Les notations les plus fréquentes :

C_0 : le **capital initial** placé (ou emprunté),

C_k ou C(k) : capital à la date k

I : le **montant de l'Intérêt**

i : le **taux d'intérêt de la période** (exprimé en général en intérêt annuel pour 1 unité monétaire, euro par exemple),

t : l'**intérêt de la période exprimé en pourcentage**, avec

t = 100 * i

n : la **durée de placement ou d'emprunt** exprimée en nombre de périodes (années ou fractions d'années).

j : le **nombre de jours de placement ou d'emprunt**

m :le **nombre de mois de placement ou d'emprunt**

N : le **nombre de jours de l'année** (soit 365 ou 366 pour l'année civile et 360 pour l'année dite « commerciale » ou bancaire en France)

a) Intérêts simples : expression mathématique

- durée en années

$$\boxed{I = C_0\, i\, n}$$

- durée en jours

$$I = C_0\, i \times j / N$$

- durée en mois :

$$I = C_0\, i \times m / 12$$

Remarque : l'intérêt est en fait ***proportionnel au capital initial, à la durée et au taux***.

Utilisation de l'intérêt simple : généralement pour des **prêts de courte durée** (inférieur ou égal à 1 an).

Us et coutumes : on utilise une année de :

- 360 jours pour les opérations du marché monétaire (exemple : escompte commercial)
- 365 jours pour les opérations du marché obligataire (ex : coupon couru pour les obligations).

Exemple II. 1

Calculer le montant des intérêts obtenus lors du placement d'un capital de 16 000 € pendant 28 jours à 6,5% l'an.

Année commerciale

I = C i j /360 = 16 000 * 0,065 * 28 / 360

= 80,89

Année réelle

I ' = C i x j / 365 = 16 000 * 0,065 * 28 / 365

= 79,78

On voit donc une **différence de 1,11 €** dans le montant des intérêts calculés.

b) intérêts composés : expression mathématique

On a vu lors du cours sur l'exponentielle que, au bout de n périodes de placement, le capital acquis est:

$$\boxed{C_n = C_0 (1+i)^n}$$

Remarque: d'une période à l'autre, le nouveau capital s'obtient en multipliant l'ancien capital par (1 + i).

point de vue mathématique : **suite géométrique de premier terme C_0 et de raison (1 + i).**

Le **montant des intérêts** s'exprime ainsi:

$$\boxed{\mathbf{I_n = C_0\,(1+i)^n - C_0 = C_0\,[\,(1+i)^n - 1\,]}}$$

Utilisation de l'intérêt composé: en général, pour des durées supérieures à un an.

Exemple II. 2: On place à intérêts composés pendant 4 ans une somme de 7 500 € au taux annuel de 4,25%. Quel est le montant des intérêts après 7 ans de placement?

Le **capital acquis** (ou valeur acquise) à la fin de la durée de placement - à intérêts composés – est : $\mathbf{C(n) = C\,(1+i)^n}$ **,** où n désigne la durée de placement, i le taux (pour un euro) et C le capital initial.

Le montant des intérêts I(n) est : $\mathbf{I(n) = C(n) - C}$.

Pour résoudre le problème posé, il suffit donc de calculer

$$C(7) = 7\,500\,(1+ 0{,}0425)^{7} = 7\,500\,(1{,}0425)^{7}$$

$$C(7) = 10\,036{,}76\ €$$

D'où I (7) = 10 036,76 – 7 500 = 2 536,76

Cela représente 2 536,76 / 10 036,76 = 33,82% de la somme initiale !

<u>Remarque</u>: un <u>problème de recherche de capital</u>.

III. Valeur acquise - Valeur actuelle

III. 1 Définition de la valeur acquise

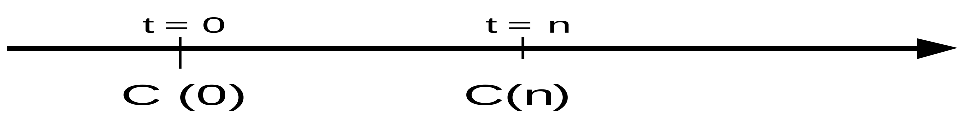
En mathématiques financières, le **capital à la date finale n** s'appelle **capital acquis ou valeur acquise.**

Capital acquis = **montant du placement** (capital à la date initiale ou date 0) + **intérêts** (à la fin de la période de placement).

Données : le capital initial (ou la suite des capitaux), le taux d'intérêt et sa période, la durée de placement.

Inconnue : le montant du capital que l'on touchera dans **l'avenir**.

Représentation graphique, appelée **diagramme des flux**



III. 2 Définition de la valeur actuelle

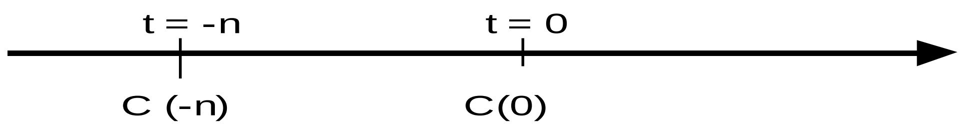
Il s'agit de **rechercher la valeur aujourd'hui** d'un capital dont nous connaissons la valeur **n** années **plus tard.**

Cette valeur porte le nom de **valeur actuelle**.

données : un capital final (ou une suite de capitaux), un taux et une durée.

Inconnue : capital initial, à la date 0.

Diagramme des flux :



III. 3. Expressions mathématiques à intérêts simples

valeur acquise V:

$$C_j = C_0 (1 + i * j / N)$$

où C_0 désigne le capital initial, i le taux d'intérêt, j le nombre de jours de placement et N le nombre de jours de l'année.

valeurs actuelles :

1) valeur actuelle commerciale (celle utilisée dans de nombreux calculs et appelée simplement valeur actuelle):

$$V = C (1 - i \times j / N)$$

où C désigne le capital final, i le taux d'intérêt appelé taux **d'actualisation** et j le nombre de jours.

Remarque : on peut considérer, en donnant au temps un statut algébrique, que « valeur acquise » et « valeur actuelle commerciale » s'expriment algébriquement à l'aide de la même expression :

$$\mathbf{V = C\,(1 + i \times j / N)}$$

où j désigne le **nombre algébrique de jours** séparant la date 0 de la date j, C et V peuvent désigner tour à tour les capitaux aux dates 0 et j.

2) **valeur actuelle rationnelle** (en général peu utilisée dans les calculs financiers pratiques):

$$\mathbf{C_0 = C_j / (1 + i \times j / N)}$$

où C_0 désigne la valeur à la date 0 et C_j la valeur à la date j. Elle se déduit directement de la valeur acquise.

Exemple III. 1 : Calculer la valeur acquise par un capital de 16 000 € placé pendant 28 jours à 6,5 % l’an ?

Année commerciale :

$C = 16\ 000\ (1 + 0{,}065 * 28 / 360) = 16\ 080{,}89$ €

Année civile :

$C = 16\ 000\ (1 + 0{,}065 * 28 / 365) = 16\ 079{,}78$ €

Exemple III. 2 :

Quelle somme placer aujourd'hui, à intérêts simples, au taux annuel de 6,40 %, pour disposer de 1 000 € dans 9 mois?

durée de placement inférieure à un an ⇒ intérêts simples.

montant des intérêts accumulés pendant m mois :

$\mathbf{I = C_0 * i * m / 12}$

capital acquis obtenu à la fin de la période de placement :

$C(m) = C_0\ (1 + i*m / 12)$,

D’où: $\mathbf{C_0 = C(m) / (1 + i*m/12)}$

soit, en utilisant les données:

$C_0 = 1\ 000 / (1 + 0{,}0640*9/12)$

soit $C_0 = 954{,}20$ € (arrondi usuel)

<u>Remarque</u>: il s’agit d’un <u>problème de recherche de capital</u>

Exemple III. 3

Anatole GAGNEUR fait l'achat de mobilier pour son appartement au montant total de 3 000 €, toutes taxes incluses.

Le vendeur lui fait deux offres: soit il paie 3 000 € dans un an, soit il paie immédiatement et dans ce cas, il obtient un rabais de 15%. Si le taux d'intérêt dit taux d'actualisation est de 12%, laquelle des deux options est la plus avantageuse pour Anatole? `A quel taux d'intérêt, les deux offres options sont-elles équivalentes?

Pour résoudre ce problème, on va comparer les deux offres à la même date, celle d'aujourd'hui. Pour cela, nous allons écrire la valeur actuelle VA à la date d'aujourd'hui de la somme de 3 000 € dans un an et on la comparera à la valeur VR réellement payée avec le rabais ;

VA = 3000/(1+ 0,12) = 3000 / (1,12) = 2 678,57 €

VR = 3000 (1-0,15) = 2 550 €.

Il est donc plus avantageux pour Anatole de payer de suite, avec le rabais.

Soit i le taux d'actualisation. Pour que les deux solutions soient équivalentes, il faut :

3000 / (1+i) = 3000 (1 – 0,15)

Soit 1 / (1+i) = 0,85

1+i = 1/0,85

Et i = 1/0,85 – 1 = 0,1767 soit 17,67 %.

III. 4. Expressions à intérêts composés:

valeur acquise **:**

$$\boxed{C_n = C_0 (1 + i)^n}$$

où C_0 désigne le capital initial, i le taux d'intérêt et n le nombre de périodes.

exponentielle sur IN, de base 1 plus le taux d'intérêt.

valeur actuelle

Son expression se déduit de la précédente grâce au calcul:

$$\boxed{C_0 = C_n / (1 + i)^n = C_n (1 + i)^{-n}}$$

où C_n désigne la valeur finale, i le taux d'intérêt et n le nombre de périodes.

Il s'agit d'une **exponentielle sur les entiers négatifs**.

Remarque : On peut donc considérer, en comptant le temps algébriquement, que ***« valeur actuelle » et « valeur acquise » ont même expression algébrique***:

$$\mathbf{V = C\ (1 + i)^{n}}$$

où n désigne la **durée algébrique,** C et V désignent tour à tour les capitaux aux dates 0 et n.

Exemple III 4 :

On place un capital pendant 15 ans au taux annuel de 6,35%. Le capital touché au bout des 15 années s'élève à 12 590 € (somme arrondie à l'euro le plus proche). Quel était le montant du capital placé ?

mode de calcul des intérêts non précisé et durée supérieure à un an $\Rightarrow$ placement à intérêts composés.

A l'aide de la notion de valeur acquise, si C_0 désigne le capital initial placé, le problème se traduit par:

$$C(15) = C_0\ (1{,}0635)^{\mathbf{15}} = 12\ 590$$

soit encore $C_0 = 12\ 590 / (1{,}0635)^{\mathbf{15}} = 12\ 590\ (1{,}0635)^{\mathbf{-15}}$

D'où C_0 = 5 000 € en arrondissant à l'euro le plus proche.

Ce problème est une recherche de **valeur actuelle**.

IV. A propos de quelques questions financières à intérêts simples

<u>IV. 1. Paiement des intérêts</u>

Selon les modalités du contrat (de placement ou de prêt), intérêts simples versés à des moments différents :

- **paiement à terme échu**, c'est-à-dire en fin de période : **intérêts post-comptés**
- **paiement à terme à échoir**, c'est-à-dire en début de période : **intérêts précomptés**.

<u>À intérêts simples</u>, <u>taux à terme échu</u> généralement utilisé.

Exemple IV 1 :

Lorsque les intérêts I sont **précomptés**, la somme disponible au début de période est $C_0 – I$. Soit i ' le taux d'intérêt auquel il faudrait placer $C_0 – I$ pour obtenir un capital total (capital initial + intérêts) C_0 en fin de période de placement . Alors :

$$(C_0 – I) + (C_0 – I)\, n\, i' = C_0$$

soit en factorisant (C_0 - I)

$$(C_0 – I)\,(1 + n*i') = C_0$$

$$C_0(1 – i*n)\,(1 + n*i') = C_0$$

D’où (1 – i*n) (1 + n*i ’) = 1

Et donc **i ’ = i / (1 – I * n).**

On peut dire que le taux d’intérêt i ’ à terme échu est équivalent au taux d’intérêt i à terme à échoir.

<u>IV. 2 Le découvert</u>

Le **découvert** accordé par les banques aux entreprises ou aux particuliers comporte un coût, comprenant les **intérêts** résultant de l’application du taux de découvert aux comptes débiteurs, ainsi que des **commissions supplémentaires** (commission du plus fort découvert, commission de confirmation).

<u>IV. 3. L’escompte</u>

L’**escompte** est une **forme particulière de prêt** pour laquelle une organisation (banque) anticipe le versement d’un moyen de paiement (traite) de date ultérieure, déduction faite d’une retenue appelée aussi escompte.

montant de cet escompte : calculé non sur la valeur aujourd’hui de la traite, mais sur sa valeur future à la date d’échéance, dite **valeur nominale**.

deux types de calcul de l’escompte:

- **escompte commercial** (le plus utilisé en France)

- **escompte rationnel**.

expressions mathématiques:

V: la **valeur nominale** de l'effet

i: le taux d'intérêt de la période

n: le nombre de périodes

W: la valeur de l'effet après escompte

escompte commercial

$\mathbf{E_c = V \times i \times n}$

alors $W = V - E_c = V\,(1 - i\,n)$

escompte rationnel

$E_R = W\,i\,n$

alors $\mathbf{E_R = V - W = V - V/(1 + i\,n) = V\,i\,n\,/\,(1 + i\,n)}$

Exemple IV. 2:

Un fournisseur escompte le 18 mai une traite tirée sur son client, pour un montant de 8 200 €. La date d'échéance portée sur l'effet est le 31 juillet. Les conditions habituelles de l'escompte sont les suivantes:

* taux annuel d'escompte: 15%

* agios hors taxes: 7,63 € augmentés de la TVA au taux normal de 20,6%

Quelle est la somme encaissée?

Quel est le taux effectif ou taux réel, hors agios ?

situation réelle (ou proche du réel) utiliser l'**escompte commercial**.

manière de compter les jours non explicitée utiliser la **pratique habituelle des banques**:

1) on compte le dernier jour, mais pas le premier, ou encore on compte le nombre exact de jours de date à date, diminué du "jour de banque".
2) année supposée comporter 360 jours.

Ainsi, du 18 Mai au 31 juillet, nous comptons 74 jours.

somme encaissée : **valeur nominale de la traite** (c'est-à-dire sa valeur future) **diminuée de l'escompte commercial et des agios TTC**:

$$V = 8\ 200\ (1 - 0,15 * 74/360) – 7,63 * 1,206$$

soit

V = 7 937,96 €, en arrondissant selon les conventions usuelles.

IV. 4 Taux effectifs

Les **taux dits effectifs** sont des taux d'intérêt qui permettent de prendre en compte les frais, les modalités de paiement, etc.

A intérêts simples, pour une opération d'escompte, le **taux d'intérêt effectif ou réel** est le taux d'intérêt i qu'il faudrait appliquer à la somme encaissée V pour que le capital acquis par cette somme V soit égal à la valeur nominale C à la date d'échéance .

On a donc, si i est le taux effectif :

$$V(1 + i\, j / N) = C$$

Par ailleurs, si e est le taux d'escompte,

$$V = C\,(1 - e\, j / N)$$

D'où $V(1 + i\, j/ N) = C\,(1 - e\, j / N)\,(1 + i\, j / N) = C$

On en déduit donc:

$$\left(1-\frac{e\,j}{N}\right)\left(1+\frac{i\;j}{N}\right)=1$$

$$1+\frac{i\;j}{N}=\frac{1}{1-\dfrac{e\,j}{N}}$$

$$\frac{i\ j}{N} = \frac{1}{1-\dfrac{e\ j}{N}} - 1 = \frac{1-1+\dfrac{e\ j}{N}}{1-\dfrac{e\ j}{N}} = \frac{e\ j}{N} * \frac{1}{1-\dfrac{e\ j}{N}}$$

$$i = \frac{e}{1-\dfrac{e\ j}{N}}$$

Exemple IV.2 suite : escompte et taux effectif

Ainsi donc, en appliquant le résultat précédent, puisque N = 360

i = 0,15 /(1 – 0,15*74/360)

i = 0,1548 soit 15,48 %.

Remarque :

outils de résolution des problèmes à intérêts simples : les quatre opérations et la proportionnalité.

V. À propos de quelques questions financières à intérêts composés

Les taux d'intérêt sont généralement exprimés annuellement. Lorsqu'on considère une période inférieure à l'année, il faudra donc **calculer le taux de la période**. On distingue deux taux: le **taux proportionnel** et le **taux équivalent**.

V. 1 taux proportionnel:

Si le taux de la période est i, et si la période est divisée en k sous-périodes, le taux proportionnel pour une sous période est

$$i_k = i / k$$

Ainsi, le taux mensuel proportionnel est i / 12 (car il y a 12 mois dans l'année), le taux proportionnel semestriel i / 2 et le taux proportionnel trimestriel i / 4.

V. 2 taux équivalent

Si le taux de la période est i, et si la période est divisée en k sous-périodes, le taux équivalent pour une sous période est celui qui assure l'égalité des capitaux acquis au bout de la période.

L'équivalence est valeurs acquises signifie:

$$C_0\,(1+i_k)^k = C_0\,(1+i)$$

ou encore

$$(1+i_k)^k = 1 + i$$

d'où

$$1 + i_k = (1 + i)^{1/k}$$

$$\boxed{i_k = (1+i)^{1/k} - 1}$$

Exemple V. 1.

Soit un taux annuel d'intérêt de 12%. Quels sont les taux mensuel et trimestriel équivalents ?

Le taux mensuel i_m vérifie :

$(1 + i_m)^{12} = 1,12$

soit $1+i_m = (1,12)^{1/12}$.

et donc $i_m = (1,12)^{1/12} – 1$ 0,0095 soit 0,95 %.

Le taux trimestriel i_t vérifie :

$(1 + i_t)^4 = 1,12$

soit $1+i_t = (1,12)^{1/4}$.

et donc $i_t = (1,12)^{1/4} – 1$ 1,0287 soit 2,87 %

<u>Propriété</u>: le taux équivalent est toujours inférieur au taux proportionnel.

Remarque : cela signifie que pour la banque, il est plus intéressant de faire les calculs avec le taux équivalent, si elle vous paie des intérêts ...

Montrons le pour le taux semestriel équivalent i_s.

$$(1 + i_s)^2 = 1 + i$$

soit, en développant le carré à l'aide des identités remarquables,

$$1 + 2\, i_s + (i_s)^2 = 1 + i$$

soit, en simplifiant,

$$2\, i_s + (i_s)^2 = i$$

Divisons par 2 pour faire apparaître à droite le taux semestriel proportionnel i/2. Il vient:

$$i_s + (i_s)^2/2 = i\,/2$$

Comme $i_s + (i_s)^2/2$ est la somme de deux nombres positifs, elle est supérieure à chacun de ces nombres. D'où:

$$i\,/2 > i_s$$

V. 3 Les taux effectifs

A *intérêts composés*, les **taux effectifs** sont aussi des taux qui permettent de prendre en compte des frais et dont nous donnerons une définition précise dans le cas des emprunts.

V.4 Exemple de résolution de problème de durée

Pour acheter une maison, un particulier place, à intérêts composés, 20 000 € pendant une certaine durée pour se constituer un apport personnel. Si le taux de placement est de 3,75%, quelle a été la durée de placement si le capital se monte à 24 042 € ?

La valeur acquise d'une somme placée C, n années après :

$$\mathbf{C (n) = C (1 + i)^n}$$

Si n est la durée de placement, on a donc:

$C (n) = 20\,000 (1,0375)^n = 24\,042$.

L'inconnue est en exposant, les quantités positives, donc on va utiliser les logarithmes, après avoir transformé l'équation.

$(1,0375)^n = 24\,042/20\,000$

$\ln (1,0375)^n = \ln [24\,042/20\,000]$

d'où en utilisant $\ln u^n = n \ln u$

on obtient $n \ln (1,0375) = \ln [24\,042/20\,000]$

d'où $$n = \frac{\ln \left(\frac{24\,042}{20\,000}\right)}{\ln (1,0375)} = 5$$

Remarque :

outils de résolution des problèmes simples à intérêts composés : les calculs de puissances, les exponentielles et les logarithmes