Introduction

La Théorie des files d'attente est une technique de la Recherche opérationnelle qui permet de modéliser un système admettant un phénomène d'attente, de calculer ses performances et de déterminer ses caractéristiques pour aider les gestionnaires dans leurs prises de décisions. Des résultats et formulations théoriques sont bien établis pour les modèles de files d'attente avec arrivées poissonnières et durées de services exponentielles

Une file d'attente est constituée des clients qui demandent un service à un ou plusieurs serveurs et d'une salle d'attente. Le taux des clients qui arrivent et le taux de service par unité de temps sont respectivement notés λ et μ.
L'apparition d'une file d'attente résulte d'un processus similaire à ce qui conduit aux ruptures de stock. Dans les deux cas un certain nombre de demandes n'ont pu être satisfaites immédiatement et les conséquences qui en découlent sont également très semblables. Elles sont susceptibles de conduire à des coûts explicites pour l'organisation tels que des pénalités de retard appliqués lorsque les délais de livraison ne sont pas respectés elles conduisent le plus souvent à des coûts implicites qui s'expriment en termes de manque à gagner de perte de clientèle ou de détérioration de l'image de marque

Si l'apparition de file d'attente trop importante occasionne des coûts, c'est également le cas des moyens que l'organisation peut mettre en place pour les réduire de même que la diminution des risques de ruptures de stocks entraine très rapidement des coûts prohibitifs, l'élimination des risques d'apparition de files d'attente demanderait l'installation de capacités de production disproportionnées par rapport à l'activité normale du système
Un compromis doit donc être trouvé entre les coûts provoqués par la file d'attente et les coûts moyens mis en œuvre pour l'éliminer. Ce compromis est l'objet de la gestion des files d'attente

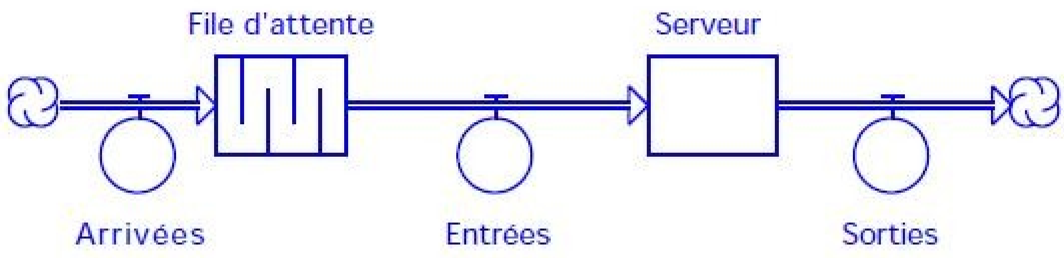
La gestion des files d'attentes passent par trois étapes

1. La formalisation
2. La résolution c'est-à-dire la détermination des principaux aspects de son comportement sous différentes politiques que l'organisation a le choix de mener à son égard
3. Optimisation

Chapitre 1 : formalisation des files d'attentes

Section 1 : typologie des files d'attente

Un des problèmes importants auxquels la théorie des files d'attente doit faire face, c'est d'analyser le nombre de clients n en attente ou en train d'être servis au temps t.



Les problèmes de file d'attente différent les uns des autres essentiellement par les caractéristiques des arrivées des demandes dans le système ainsi que par les façons de rendre le service demandé.

1. **Caractéristique des arrivés**

On distinguera les caractéristiques des arrivés dans la file d'attente selon

- **La nature de la population d'origine** c'est-à-dire l'ensemble des clients potentiels qui doit être fini ou infinie
- **Le degré de contrôle des arrivées par l'organisation** : c'est-à-dire le pouvoir ou non de contrôler dans une certaine mesure les arrivées, certaines arrivées sont complètement incontrôlable et d'autres sont partiellement modulables et enfin d'autres dont totalement maitrisables

- **La distribution des arrivées**, on désigne leur répartition au cours du temps ,la distribution des arrivés est :
    - Constante si elles se font toujours au même rythme, et variable dans le cas inverse
    - Statique si cette loi de probabilité est constante au cours du temps ou dynamique dans le cas inverse
- **Le comportement des individus concernés** doit être pris en considération :
  Il s’avère indépendant de la longueur de la file d’attente ou au contraire dépendant
- L’existence ou non de contraintes sur les arrivées

2. Caractéristiques de services

Lorsque les demandes sont prises en considération par l’organisation il devient nécessaire de faire plusieurs distinctions en fonction :

- **Da la capacité du système d’attente** qui soit limitée soit au contraire illimité, dans le premier cas le système d’attente ne peut excéder un certain nombre d’individus, dans le cas inverse il n’existe aucune contrainte autre que celle induit par le comportement des clients
- **Des règles de priorité de traitement** ont pour objet de préciser quel individu parmi ceux actuellement qui sera traité le premier, elles existent plusieurs règles on peut citer à titre d’exemple :
    - **La règle FIFO : (First in –first out)** les individus sont traités par l’ordre d’arrivée.
    - **La priorité au temps de traitement le plus court** qui se rencontre très fréquemment dans la distribution
    - **La priorité selon la nature de traitement** à réaliser
- **De l’organisation de service** : il comporte plusieurs aspects
    - Un poste de traitement ou plusieurs sont mis à la disposition des clients dans ce cas des files d’attente parallèles vont coexister avec la possibilité pour l’utilisation de choisir sa file d’attente et éventuellement d’en changer
    - Quand plusieurs postes de traitement sont offerts ils sont spécialisés ou non
    - Le traitement comporte une seule phase de service ou plusieurs files d’attente successives

- **Du temps de traitement** c'est-à-dire le duré de service au niveau de chaque poste de traitement est tout comme les intervalles entre les arrivés consécutives constante ou variable statique ou dynamique
- **Des conditions de sortie du système** c'est-à-dire la sortie du système est définitive si le client n'a pas une possibilité à redemander le même service au cours de la période considérée. Cette caractéristique est importante quand la population de clients potentiels est limitée

Section 2 : les lois statistiques utilisables

1 la loi de poisson

Les arrivés dans une file d'attente suivent une loi de poisson de paramètre λ si les conditions suivantes sont réunies :

- Les arrivées sont indépendantes les unes des autres
- La probabilité qu'une arrivée se produise pendant l'intervalle de temps Δt *est* $\lambda \Delta t$ la probabilité que deux arrivées se produisent est négligeable
- Le phénomène est stationnaire : il ne dépend pas de la date de début de l'intervalle de temps Δt

Supposons que n arrivés aient été enregistrées à la date t+Δt une telle situation ne peut provenir que dans les deux cas suivants où p_n (t) :

- n arrivées avaient été enregistré en t et aucune ne s'est produit pendant Δt
- n-1 avaient été enregistrées en t et une s'est produite pendant Δt

Dans ces conditions,

$$p_n(t+\Delta t) = p_n(t)\text{-}(1-\lambda\Delta t) + p_{n-1}(t)\ \lambda\Delta t$$

L'événement n-1 est impossible si n=0

pour n=0 la relation précédente devient

$$p_0(t+\Delta t) = p_0(t)(1-\ \lambda\Delta t)$$

La probabilité d'enregistré n événement pendant une période de durée t si en moyenne il se produit λt événement pendant une telle durée est représenté par l'expression générale de p_n (t)

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n\ e^{-\lambda t}}{n!}$$

2- La loi exponentielle négative

Si les arrivées dans un système quelconque s'effectuent selon une loi de poisson de moyenne λ les intervalles de temps θ séparant deux arrivées successives suivent une loi exponentielle négative de forme :

$$\mathrm{F}(\theta) = \lambda\ e^{-\lambda\theta} \quad \text{avec} \quad \bar{\theta} = \frac{1}{\lambda}$$

En effet la densité de probabilité d'un intervalle θ + $\Delta\theta$ entre deux arrivées est donnée par :

$$\mathrm{F}\ (\theta+\Delta\theta) = \mathrm{F}(\theta)[1-\lambda\theta]$$

De cette relation en déduit :

$\mathrm{F}(\theta) = C.e^{-\lambda\theta}$

La loi exponentielle négative est utilisée dans le cadre des files d'attente pour reproduire les temps de traitement. On pourra l'employer chaque fois qu'il sera empiriquement constaté que le temps moyen de traitement est égal à l'écart-type puisque pour la fonction exponentielle négative $\mathrm{E}(\theta) = \sigma_\theta = 1/\lambda$

3- autre loi statistiques utilisables

Les lois d'Erlang qui généralisent la loi exponentielle négative, sont couramment employées dans le cadre de l'étude des phénomènes d'attente elles sont de forme générale

$$\mathcal{F}(t) = \frac{K\lambda(K\lambda t)^{k-1}e^{-K\lambda t}}{(K-1)!}$$

Chapitre 2 : résolution analytique des files d'attente

La résolution analytique des files d'attente permet de déterminer leur caractéristique à travers le développement de formules obtenues par application du calcul de la probabilité

La situation qui sera analysé dans qui suit sera reposé sur :

- une population de clients potentiels infinie
- des arrivées dans le système suivant une loi de poisson de moyenne λ
- des temps de service suivant une loi exponentielle négative de moyenne 1/µ
- une seule étape de traitement
- une règle de service du type FIFO
- l'absence de contrainte de capacité
- des comportements indépendants de la longueur de la file d'attente, aussi bien en ce qui concerne les clients que les serveurs

Cette situation sera étudiée dans deux cas différents :

- un seule poste de traitement M/M/1
- Plusieurs postes de traitement M/M/S

Section 1 : résolution d'une file d'attente à un seul poste de traitement

La technique de résolution utilisée consiste dans une première étape à déterminer la probabilité p_n en fonction des informations concernant le taux d'arrivées et les temps de traitement, une fois cette probabilité déterminée il devient possible d'évaluer les caractéristiques de la file d'attente en termes de longueur et en termes de temps

Dans les développements qui suivent On supposera que λ est inférieur à µ

Dans un intervalle de temps Δt les arrivées suivent une loi de poisson de moyenne λ qu'il y'a une probabilité λ Δt qu'une arrivée se produise et que deux arrivées ou plus se produisent est négligeable

Le traitement suivent une loi exponentielle négative de moyenne 1/µ il y a une probabilité qu'un client traité quitte le système pour deux et plus cette probabilité est négligeable.

Dans ces conditions au cours de l'intervalle Δt il est possible d'enregistrer zero ou une arrivé ou zéro et une sortie si nous trouvons n individu à la fin de l'intervalle Δt ceci ne peut être le résultat que de l'une de quatre éventualités suivantes :

- Au début de Δt il y avait n-1 individus une entrée a été enregistrée et zero sortie
- Il y avait n individus et personne n'est entré ni sorti
- Il y avait n individus et une entré et une sortie se sont produites
- Il y avait n+1 individus aucune entrée n'a été constaté mais une sortie s'est réalisé

La somme de ces quartes probabilités est égale à la probabilité $p_n(t + \Delta t)$ qu'il y ait n individus dans le système à la fin de l'intervalle Δt

Pour n≠0 on trouve

$$p_n(t + \Delta t) = p_{n-1}(t)\, \lambda\Delta t + p_n(t)(1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t) + p_{n+1}(t).\, \mu\Delta t$$

Ce qui peut s'exprimer sous la forme

$$\frac{p_n(t+\Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = \lambda.\, p_{n-1}(t) - (\lambda + \mu)\, p_n(t) + \mu p_{n+1}(t)$$

Lorsque le système fonctionne en régime stationnaire, les probabilités ne dépendent plus du temps. Dans ces conditions p'_n = 0

Dans le cas où n = 0

Trois éventualités sont susceptibles d'amener à la présence de zéro individu à la fin de l'intervalle Δt

Dans ce cas on trouve - λp_0 + µ p_1 = 0

Soit encore $p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$

Cette valeur de p_0 peut être reporté dans la relation générale établie plus haut pour n=1 c'est-à-dire dans

$$\lambda p_0 + (\lambda + \mu)\ p_1 + \mu\, p_2 = 0$$

Cette relation devient alors

$$\lambda p_0 - (\lambda + \mu)\ (\lambda/\mu)\, p_0 + \mu\, p_2 = 0$$

Ceci permet d'exprimer p_2 en fonction de p_0 :

$$p_2 = (\frac{\lambda}{\mu})^2\, p_0$$

Alors il est possible d'exprimer chaque probabilité p_n en fonction de p_0 de façon générale

$$p_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n\, p_0$$

Si nous appelons $\psi = \lambda/\mu$ l'intensité du trafic alors

$$p_n = \psi \, p_0$$

Dans la mesure où les p_n sont des probabilités elles respectent la condition :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

Ce qui peut s'écrire :

$$p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \psi^n = 1$$

Puisque les termes de ψ^n forme une progression géométrique de raison inférieur à 1

$$p_0 \left(\frac{1}{1-\psi}\right) = 1$$

Ceci nous donne

$$p_0 = 1 - \psi$$

Et dans le cas général

$$p_n = \psi^n (1- \psi)$$

1.1 Description des caractéristiques de la file d'attente

Concrètement une file d'attente se traduit par un certain nombre d'individus qui perdent un temps plus ou moins long avant d'obtenir le service demandé

Il est important pour le gestionnaire de la file d'attente de déterminer en fonction de l'intensité de trafic

- Le nombre moyen d'individus présents dans le système $\overline{n}_s$
- Le temps moyen passé par un individu dans le système $\overline{t}_s$
- Le nombre moyen d'individus attendant un service $\overline{n}_f$

- Le temps moyen passé à attendre avant d'être servi $\bar{t}_f$

a- Nombre moyen d'individus dans le système

Le nombre moyen d'individus présents dans le système s'évalue comme l'espérance mathématique de n :

$$\bar{n}_s = E(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n.p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n.p_n$$

Cette espérance mathématique s'exprime en fonction de l'intensité du trafic

$$\bar{n}_s = \sum_{n=0}^{\infty} n(\psi)^n.(1-\psi)$$

Cette relation peut s'exprimer par

$$\bar{n}_s = \frac{\psi}{(1-\psi)^2}(\psi)(1-\psi)$$

On trouve après simplification

$$\bar{n}_s = \frac{\psi}{(1-\psi)} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

b- Le temps moyen passé dans le système

La file d'attente est alimenté par des arrivées qui se produisent au taux λ. Le fait qu'il y ait en moyen $\bar{n}_s$ dans le système implique que chacun y reste en moyenne un temps

$$\bar{t}_s = \bar{n}_s/\lambda$$

Qui s'exprimer par la forme

$$\bar{t}_s = \frac{\psi}{\lambda(1-\psi)}$$

c- ***Nombre moyen d’individus attendant un service***

Parmi les individus présents dans le système il convient de faire la distinction entre ceux qui sont en cours de traitement et ceux qui constituent la file d’attente

Lorsqu’un seul poste de traitement est ouvert un seul individu put être servi à la fois . sur n personnes séjournant dans le système il y en a ainsi n-1 qui attendent

Alors le nombre moyen qui attendent est donnée par

$$\bar{n}_f = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1).p_n$$

$$\bar{n}_f = \sum_{n=1}^{\infty} n.p_n - \sum_{n=1}^{\infty} p_n$$

$$\bar{n}_f = \bar{n}_s - \psi$$

d- Temps moyen d’attente

Le temps d’attente avant d’être servi est calculé de la même façon le temps de séjours dans le système .la file des individus en attente pure est alimenté par des arrivées au taux λ

$$\bar{t}_f = \bar{n}_f/\lambda$$

Exprimé en fonction de l’intensité du trafic $\bar{t}_f$ devient

$$\bar{t}_f = \frac{\psi^2}{\lambda(1-\psi)} = \frac{\psi}{\mu(1-\psi)}$$

Section 2 : résolution d'une file d'attente à plusieurs postes de traitement (M/M/S)

Toutes les données de la situation précédente sont conservées, à part celle qui concerne le nombre de postes de traitement qui est maintenant supposé égal à S

La condition qui imposait un taux d'arrivées inférieur au taux de service n'est plus nécessaire ; elle est remplacée par la condition $\lambda < \mu S$.

Pour résoudre cette nouvelle file d'attente, nous procèderons comme dans le cas précédent, en évaluant la probabilité qu'il y ait n personnes dans le système, puis les différentes caractéristiques de la file d'attente.

1-Evaluation de la probabilité P_n

Nous partons toujours du principe selon lequel, pendant un intervalle de temps Δt il ne peut se produire au maximum qu'une arrivée et qu'un traitement.

Dans le cas ou $n > S$, tous les poste de traitement sont occupés et la probabilité qu'un traitement s'achève pendant l'intervalle Δt est $S.\mu\Delta t$.

Si, n<S, certains postes vont rester inoccupés. La probabilité qu'une sortie soit enregistrée pendant Δt est $n.\mu\Delta t$. Le temps de traitement d'un client n'est pas accéléré du fait que plusieurs postes sont disponibles : il est toujours égal au moyenne à $\frac{1}{\mu}$.

La détermination de $P_n(t+\Delta t)$ dans chacune de cas deux situations :

Si $n \leq S$,

$$P_n(t+\Delta t) = P_{n-1}(t).\lambda\Delta t + P_n(t)(1-\lambda\Delta t - n\mu\Delta t) + P_{n+1}(t).(n+1).\mu\Delta t$$

Si $n \geq S$,

$$P_n(t+\Delta t) = P_{n-1}(t).\lambda\Delta t + P_n(t)(1-\lambda\Delta t - S\mu\Delta t) + P_{n+1}(t)S\mu\Delta t$$

En adoptant la même procédure que celle utilisée pour (M/M/1), il vient

Si n<S :

$$\lambda P_{n-1} - (\lambda + n\mu)P_n + (n+1)\mu P_{n+1} = 0$$

Soit pour n=1

$$\lambda P_0 - (\lambda + \mu)P_1 + 2\mu P_2 = 0$$

Puisque $P_1 = \psi P_0$

$$P_2 = \frac{1}{2}(\psi)^2 P_0$$

Pour n=2, la relation s'écrit

$$\lambda P_1 - (\lambda + 2\mu)P_2 + 3\mu P_3 = 0$$

Ce qui donne

$$P_3 = \frac{1}{6}(\psi)^n P_0$$

De façon générale, si $n \le S$,

$$P_n = \frac{1}{n!}(\psi)^n P_0$$

Dans le cas ou le nombre de postes de traitement est inférieur ou égal à n, l'équation générale relient P_{n-1} , P_n et P_{n+1} devient

$$\lambda P_{n-1} - (\lambda + S\mu)P_n + S\mu P_{n+1} = 0$$

De façon générale, pour $n \ge S$,

$$P_n = \frac{1}{S!S^{n-S}}(\psi)^n P_0$$

On remarque que si n=S, les deux expressions générales de P_n donnent le même résultat.

L'évaluation de P_n pour une file d'attente particulière caractérisée par une certaine intensité de trafic et un certain nombre de postes de service, demande à nouveau de calculer P_0 . La somme des probabilités P_n étant égale à un, il est possible d'écrire

$P_0 + \psi P_0 + \ldots + \frac{1}{n!}(\psi)^n P_0 + \ldots + \frac{1}{(S-1)!}(\psi)^{S-1} P_0 + \ldots + \frac{1}{S!S^k}(\psi)^{S+k} P_0 + \ldots = 1$ les éléments en $(\psi)^k / S^k$ forme une progression géométrique de raison < 1 dont la somme est $1/(1-\psi/S)$ .dans ces conditions,

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1} \frac{(\psi)^n}{n!} + \frac{(\psi)^S}{S!(1-\frac{\psi}{S})}}$$

2- Description des caractéristiques de la file d'attente (M/M/S).

Pour décrire les caractéristique de la file d'attente, le plus facile est de commencer par évaluer le nombre moyen de personnes qui attendent, $\bar{n}_f$.

Lorsque S stations de traitement sont ouverts, pour que quelqu'un attente, il faut que n soit supérieur à S ; ainsi le nombre moyen d'individus en attente est donné par l'espérance mathématique de n-S :

$$\bar{n}_f = E(n-S) = \sum_{n=S}^{\infty} (n-S) P_n$$

Nous écrivons :

$$\bar{n}_f = E(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k P_{s+k}$$

L'expression en $\sum$ est la dérivée de la somme d'une progression géométrique de raison (ψ/S), que l'on remplacera par $1/(1-\frac{\psi}{S})^2$ .Ainsi

$$\bar{n}_f = \frac{\psi^{S+1}}{S!S(1-\psi/S)^2} P_{0.}$$

Le temps moyen d’attente dans la file, avant tout traitement, est donné par $\bar{n}_f / \lambda$, soit

$$\bar{t}_f = \frac{\psi^S}{\mu S! S(1-\psi/s)^2} P_0$$

Chaque individu passant un temps moyen $\bar{t}_f$ à attendre et recevant un service dont la durés moyenne est $1/\mu$, le temps moyen de présence dans le système est

$$\bar{t}_S = \bar{t}_f + \frac{1}{\mu}$$

Soit

$$\bar{t}_s = \frac{\psi^S}{\mu S! S(1-\psi/S)^2} P_0 + \frac{1}{\mu}$$

Les arrivées d’effectuent au taux λ : le nombre de personnes présentes dans le système est alors

$$\bar{n}_S \left[\frac{\psi^S}{\mu S! S(1-\psi/S)^2} P_0 + \frac{1}{\mu} \right] . \lambda$$

Soit $\bar{n}_S = \bar{n}_f + \psi$

Il y a ainsi, en moyenne, ψ individus en cours de traitement. Dans la mesure où S points de traitement sont disponibles, S-ψ restent en moyenne inutilisés.

Tous ces modèles de files d’attente, bien que se présentant sous des aspests complexes, ne correspondent qu’à des situations très simples. Dans de nombreux cas il sera très difficile de développer des formules capables de représenter correctement la réalité.

CHAPITRE 3 : Gestion des files d’attente

Gérer une file d’attente consiste, pour l’organisation qui en est responsable, à déterminer les moyens à mettre en œuvre de telle sorte que les indicateurs d’attente du système demeurent dans les limites satisfaisantes.

Deux phases du processus de gestion d’une file d’attente seront appliquées au traitement d’un problème de maintenance.

1- Identification des caractéristiques de la file d’attente.

La société des applications mécaniques dispose dans les deux ateliers de son usine de province, d’un parc de machines-outils de haute précision dont le réglage est un élément essentiel de la qualité de travail. Dès qu’un dérèglement se produit, les opérations de production doivent être immédiatement arrêtées et le responsable de la machine fait appel à l’équipe de spécialistes qui procède aux rectifications nécessaires.

Les dérèglements sont relativement fréquents et les arrêts de production qui en découlent provoquent des retard non négligeables dans la réalisation des plannings de fabrication.

La direction a pour mission de proposer des solutions à ce problème.

Il s’agit d’un problème de file d’attente :

- ✓ La population de « clients » concernés est constituée par le parc de machines
- ✓ Il y a un poste de service qui correspond à l’équipe de maintenance
- ✓ La file d’attente est composée des machines déréglées qui attendent l’intervention de l’équipe de maintenance
- ✓ Le système d’attente est formé par l’ensemble des machines déréglées y compris celle qui en cours de réglage.

Pour identifier le modèle qui conviendrait le mieux pour représenter le fonctionnement du système d’attente, l’ingénieur procède à une étude statistique des pannes et des temps de réparation.

Cinquante périodes d'une heur ont été ainsi étudiées, pendant lesquelles 153 pannes se sont produites, soit 3,06 à l'heure en moyenne. Mais le nombre de dérèglement par heure est très variable :

Nombre de pannes	**Fréquences**
0	3
1	8
2	10
3	10
4	8
5	6
6	3
7	1
8 et plus	1
Total	50

Une loi de Poisson de moyenne 3 semble convenir pour représenter le phénomène.

Les temps de réglage sont également très variables

Temps de répartition supérieur à (heure)	**Fréquence cumulée**
0.05	122
0.1	90
0.15	75
0.2	57
0.25	40

0.3	30
0.35	28
0.4	22
0.45	12
0.5	8
0.55	0

La fonction de réparation des temps d'intervention de l'équipe de maintenance sur les 153 pannes étudiées.

Le temps moyen de réparation s'élevant à 0.2 heure.

Nous nous trouvons ainsi devant un problème de file d'attente caractérisé par

- Un taux d'arrivée $\lambda = 3$
- Un temps moyen de service $\frac{1}{\mu} = 0.2$
- Un seul poste de service.

L'application des formules du modèle M/M/1 donne :

- Une « intensité de trafic » $\psi = 0.6$
- La probabilité que toutes les machines fonctionnent $P_0 = 0.4$
- Le nombre moyen de machines dans le système d'attente :

$$n_s = \frac{\psi}{1-\psi} = \frac{0.6}{0.4} = 1.5$$

En moyenne, 1.5 machine reste inutilisée en permanence :

- Le nombre moyen de machines en attente d'un traitement :

$$n_f = \frac{\psi^2}{1-\psi} = \frac{0.36}{0.4} = 0.9$$

Si l'heure d'arrêt de la production entraîne un manque à gagner de 1000dh, la perte provoquée par l'ensemble des pannes sur 25 jours ouvrables à 8 heures de travail, s'élève à

$$C = 1.5*1000*25*8 = 300000dh$$

Dans la mesure ou les déréglages sont jugés inévitables, seul le coût associé à l'attente doit être imputé au service de maintenance. Ce coût C_f s'élève à

$$C_f = 0.9*200000 = 180000dh$$

2- Optimisation de la file d'attente

Plusieurs types d'actions sont concevables :

- ✓ Multiplication des postes de traitement,
- ✓ Spécialisation des postes de traitement,
- ✓ Contrôle des arrivées.

a- Multiplication des postes de traitement,

Dans ce problème, un poste de traitement est constitué par une équipe de spécialistes de maintenance. Chaque équipe devant obligatoirement comprendre deux personnes, l'entreprise a donc la possibilité, pour améliorer le fonctionnement du système, d'engager deux spécialistes supplémentaires, ce qui revient à créer un nouveaux poste de service.

Dans la mesure ou le responsables des machines en panne font appel indifféremment à l'un ou l'autre équipe et ou les autres paramètres du modèle n'ont pas été modifiés, la situation nouvelle s'analyse à l'aide du modèle M/M/2 :

- Intensité du trafic $\frac{\psi}{S} = 0.3$

- Probabilité que toutes les machines fonctionnent :

$$P_0 \frac{1}{1+0.6+\frac{0.36}{2(1-0.3)}} = 0.538$$

- Nombre moyen de machines dans la file d'attente :

$$\overline{n}_f = \frac{0.6^3 * 0.538}{2!2*(1-0.3)^2} = 0.06$$

- Nombre moyen de machines dans le système d'attente :

$$\overline{n}_s = 0.06 + 0.6 = 0.66$$

Si nous intéressons uniquement au coût associé à l'attente pure,

$$C_f(S=2) = 0.06 * 200000 = 12000.$$

L'économie réalisée par l'introduction d'un poste de traitement supplémentaire est donc

$$C_f(S=1) - C_f(S=2) = 180000 - 12000 = 168000.$$

Le coût d'une équipe de deux spécialistes étant évalué à 120000dh charges compris, l'opération s'avère rentable pour l'entreprise.

La question se pose même d'introduire une troisième équipe de maintenance.

Dans le cas ou S=3, l'application des formules du modèle M/M/3 donnerait $\overline{n}_f = 0.0062$, d'où un coût $C(S=3) = 1240.$ l'économies réalisée par rapport à la situation ou S=2 ne justifierait pas l'introduction d'une nouvelle équipe.

b- Spécialisation des postes de traitement.

Puisque deux équipes paraissent nécessaires, se pose la question de savoir si l'entreprise n'aurait pas intérêt à les spécialiser

Exemple, l'usine ayant deux ateliers, il serait concevable d'attribuer une équipe à chacun d'entre eux. Supposons que chaque atelier contribue en moyenne pour la moitié des pannes et que ces pannes soient du même genre, Nous aurons, dans ces conditions, deux files d'attente indépendantes caractérisées chacune par

- Un taux d'arrivées $\lambda = 1.5$
- Un temps de traitement moyen $1/\mu = 1/5$
- Un seul poste de traitement.

Le modèle M/M/1 appliqué à chaque atelier donnerait :

$\psi = 1.5/5 = 0.3$; $P_0 0.7$; $\overline{n}_f = 0.129$

Sur les deux ateliers, il y aurait ainsi en moyenne 2*0.129=0.258 machine en attente pure, c'est-à-dire beaucoup plus qu'avec le système à deux postes non spécialisés.

De façon générale, la spécialisation des postes a tendance à être moins efficace que le non-spécialisation. Elle peut cependant apporter un supplément d'efficacité si les temps de traitement sont réduits.

Supposons maintenant que le parc de machines comporte deux catégories d'équipement dont les fréquences des pannes sont identiques. Si une équipe de spécialistes est affecté à chacun des deux types de machines, nous nous retrouvons encore devant un système comprenant deux files d'attente autonomes caractéristiques :

- $\lambda = 1.5$
- S = 1
- Taux de service = $1/\mu$

Pour que ce nouveau système soit plus efficace que le système à deux postes non spécialisés, il faut que $\overline{n}_S < 0.33$

ce qui donne $\mu > 6.05$. Un système spécialisé ne se justifie qu'avec un supplément d'efficacité d'au moins 21% supérieur sur les temps de service.

c- Contrôle des arrivées

Dans de nombreux cas l’entreprise peut moduler les taux d’arrivées. En ce qui concerne le problème étudié ici, le contrôle des arrivées, donc des pannes, est réalisable à travers l’entretien préventif du matériel.

Si l’entretien préventif est susceptible de réduire le nombre d’arrêts de production, ce qui est vérifiable par expérimentation sur une partie du parc, les performances du système vont s’améliorer. Le choix d’une telle stratégie demanderait d’évaluer le coût du contrôle à priori et l’économie réalisée sur les temps d’attente avec le taux d’arrivées réduit

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages : Techniques quantitatives de gestion

Sites :

http://www-rst.int-evry.fr/~hebutern/IT21/Rappels/C2.html

http://www.douillet.info/~douillet/02cours/oprea/node4.html