MASTER MANAGEMENT LOGISTIQUE

Problème de flot, d’affectation et de transport

Réalisé par : OMARI Redouane & DACHRY Abdelfattah

Encadré par : Mr. LOUMANI

Année universitaire 2008 /2009

Sommaire

Problème de flot, d’affectation, et de transport

Introduction

Toute entreprise qu’elle que soit sa taille, son domaine d’activité est amenée à faire face à des problèmes de gestion au quotidien.

Parmi ces problèmes, on cite les problèmes de flot, d’affectation et de transport qui nécessitent la mise en œuvre d’un procédé de prise de décision rationnel, notamment la recherche opérationnelle, à cause de leur niveau de complexité particulièrement élevé et à cause des coûts supplémentaires qu’ils génèrent s’ils sont mal gérés.

Ce qui souligne l’importance qu’occupe ce type de problème dans la gestion quotidienne de l’entreprise.

C’est pour cette raison que le but de notre travail est de présenter des méthodes faciles de formulation et de résolution de ce genre de problème.

Et pour cela, nous avons divisé notre travail en trois parties, où nous allons aborder dans un premier temps le problème de flot et plus précisément le problème de flot maximal à coût minimal, et ensuite nous allons présenter le problème de transport ainsi que des algorithmes de résolution appropriés. Et enfin nous allons traiter les problèmes d’affectation.

Problème de flot de valeur maximale à coût minimal

Notion de base :

Réseau de transport :

Le réseau de transport est un graphe fini, sans boucle comportant une entrée X_1(source) et une sortie X_P (puits), telles que : depuis X_1 il existe un chemin vers tout autre sommet X_k et de tout sommet X_k il existe un chemin vers X_p. Tout arc u est valué par un entier positif C(u), nommé capacité de l'arc u, qui présente une capacité de transport associée à la liaison figurée par cet arc (Ex. tonnages disponibles sur des bateaux, des camions, ...)

Flux :

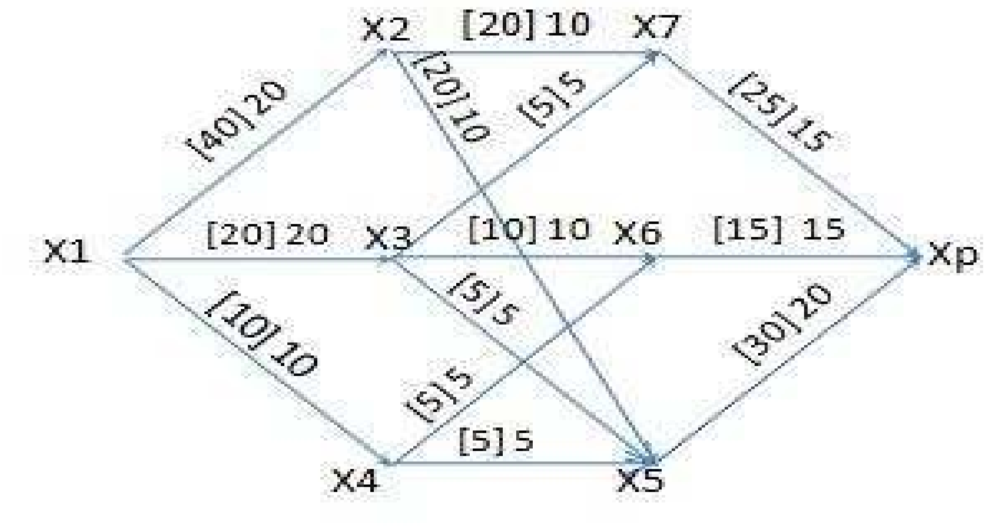
Un flux est la quantité φ (u) transportée sur chaque arc u

Flot :

Un flot ϕ est déterminé par la donnée du flux pour tout arc du réseau de transport.

La valeur d'un flot $V(\phi)$ est par définition, la somme des flux partant de la source X1 ($V(\phi)$ est aussi égale à la somme des flux des arcs arrivant sur le puits Xp)

Exemple de flot sur un réseau de transport :



Problème de flot de valeur maximale à coût minimal :

Présentation :

Connaissant les capacités des arcs d'un réseau de transport et les coûts unitaires de transport sur chaque arc, le problème du flot maximum consiste à trouver la quantité maximale de flot qui peut circuler de la source à la destination au moindre coût. L'algorithme le plus connu pour résoudre ce problème est celui de B. Roy. Nous verrons l'approche par cette méthode qui consiste à construire un graphe "d'écart" dans lequel on recherche un chemin de coût minimum.

Formulation :

- R est un réseau de transport où s et p désignent respectivement la source et le puits.
- A chaque arc (i, j) sont associées deux valeurs positives [c_{ij}, p_{ij}] où c_{ij} est la capacité et p_{ij} est le coût unitaire associé à l'arc.
- Le coût d'un flot : Est la somme des coûts sur tous les arcs du réseau.

$$\sum_{(i,j)} \varphi_{ij} \cdot p_{ij}$$

Problème à résoudre :

$$\begin{cases} Min \sum_{(i,j)} \varphi_{ij} \cdot p_{ij} \\ \varphi_{ij} \leq c_{ij} \; ; \quad \forall (i, j) \in R \\ \sum_{(i,j)} \varphi_{ij} = \sum_{(j,i)} \varphi_{ji} \; ; \quad \forall i, j \in N, \quad i, j \neq s, p. \\ \sum_{(s,j)} \varphi_{sj} = \sum_{(j,p)} \varphi_{jp} = V(\phi) \end{cases}$$

Méthode de résolution :

Définition graphe d'écart G_ϕ^e :

Il s'agit d'un graphe qui traduit les augmentations ou diminutions possibles du flot dans le réseau R.

Théorème d'optimalité :

Un flot ϕ est de coût minimal parmi les flots de valeur $V(\phi)$, si et seulement si il n'existe pas de chemin de s à p et de circuit de coût strictement négatif dans G_ϕ^e

Construction du graphe d'écart :

- Le graphe d'écart et le réseau de transport ont les mêmes sommets.
- Pour tout arc de (i, j) de R, les arcs et leur valuation sont obtenus de la façon suivante:

  1 – si $0 < \varphi_{ij} < c_{ij}, G_\phi^e$ comporte un arc (i, j) de valuation $\nu_{ij} = c_{ij} - \varphi_{ij}$

  et un arc (j, i) de valuation $\nu_{ij} = \varphi_{ij}$

  2 – si $\varphi_{ij} = 0, G_\phi^e$ comporte un arc (i, j) de valuation $\nu_{ij} = c_{ij}$

  mais pas d'arc (j, i)

  3 – si $\varphi_{ij} = c_{ij}, G_\phi^e$ comporte un arc (j, i) de valuation $\nu_{ij} = \varphi_{ij}$

mais pas d'arc (i, j)

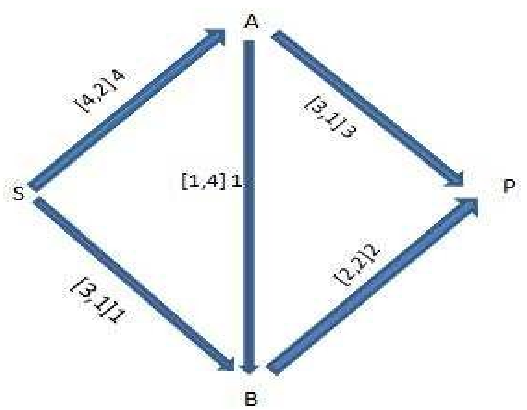
~~Remarque~~

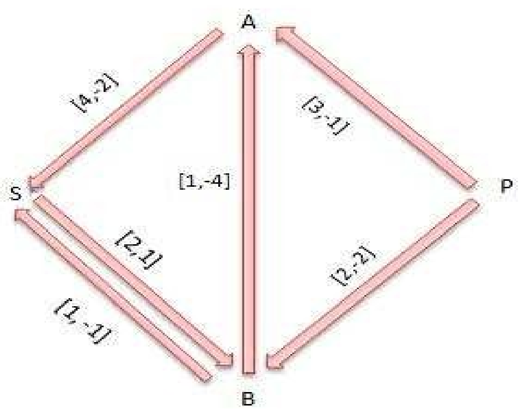
Pour le flot nul (ϕ = (0,…,0)), le graphe d'écart et le réseau de transport coïncident.

Lorsque le coût pij est associé à l'arc (i, j) du réseau de transport, dans le graphe d'écart le coût de l'arc (i, j) est pij et celui de l'arc (j, i) est – pij

Exemple :

Soit un réseau de transport schématisé comme suit :





Réseau de transport

de flot de valeur 5 et de coût 20

Graphe d'écart

le circuit (A, S, B, A) est de coût -5

Algorithme calculant un flot maximal de coût minimal :

1- initialement ϕ= (0,…,0); $G_\phi^e \equiv R$

2- tant qu'il existe un chemin de s à p dans G_ϕ^e faire

3- déterminer µ, un chemin de coût minimal de s à p

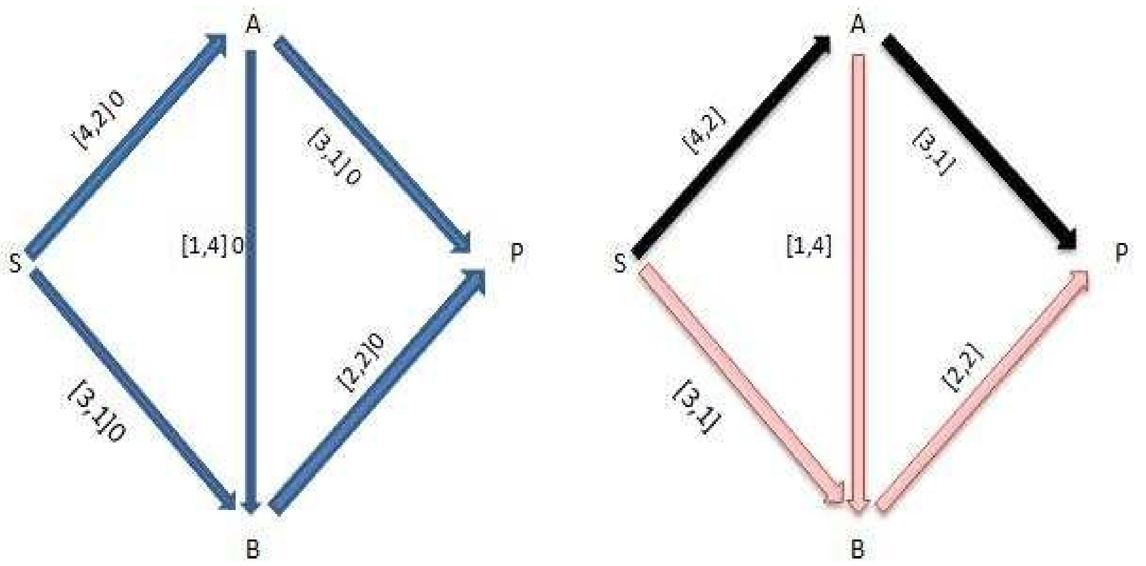
4- chercher dans µ, ∂ = $\min \nu_{ij}$

5- Augmenter le flux de tout arc appartenant à µ de ∂ dans le réseau de transport

6- tracer le graphe d'écart ainsi modifier.

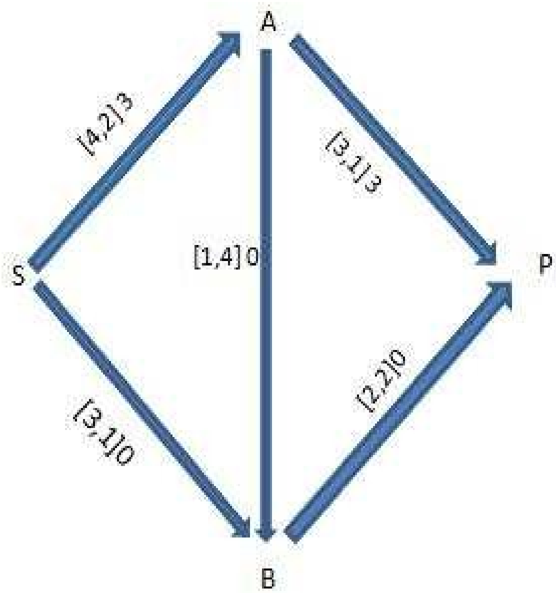
Déroulement de l’algorithme :

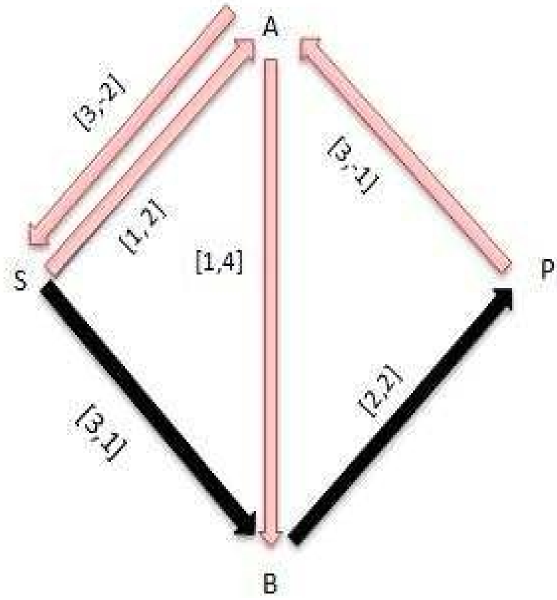
Première étape :



- On part d'un flot compatible (ϕ = (0,…0)).
- Ensuite, on construit un graphe d'écart à partir de ce flot.
- Ensuite, dans ce graphe d'écart, on cherchera un chemin de S à P de coût minimum en utilisant entre autre l’algorithme de Ford. Dans notre exemple, le chemin de coût minimum de s à p est {S, A, P} de coût 3=ℸ .
- Enfin, on cherche dans ce chemin {S, A, P} l’arc de capacité minimale ∂, dans notre exemple ∂ = 3, capacité de l’arc (A, P).

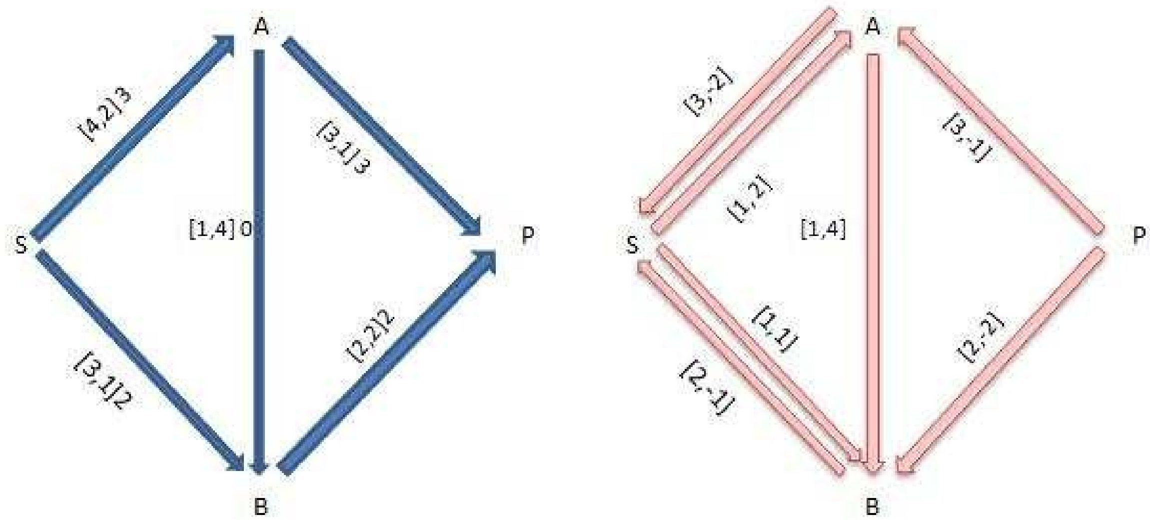
Deuxième étape :





- On augmente le flux sur tous les arcs du chemin {S, A, P} dans R de ∂ = 3
- On trace un graphe d'écart pour le réseau de transport ainsi modifié ;
- On cherche dans le graphe d'écart un chemin de coût minimum de S à P, dans notre exemple, il existe encore un chemin de S à P de coût 3=ך , il s'agit de {S, B, P} ;
- On cherche dans ce chemin{S, B, P} l'arc de capacité minimale ∂' , dans notre exemple, ∂' = 2 , capacité de l'arc (B, P).

Troisième étape :



- On augmente le flux dans le réseau de transport de ∂' = 2, pour tous les arcs du chemin{S, B, P}
- On trace le graphe d'écart pour le réseau de transport ainsi modifié ;
- On cherche dans le graphe d'écart un chemin de S à P, dans notre exemple, il n'existe plus de chemin de S à P, et tous les coûts des circuits du graphe d'écart sont positifs ;
- Donc, ce dernier flot est optimal. ($V(\phi)$= 5, et son coût est de (3*2+2*1+0*4+3*1+2*2= 15)).

Problème de transport

Présentation

Un problème de transport peut être défini comme l'action de transporter depuis "m origines" vers "n destinations" des matériaux, au moindre coût.

Donc, la résolution d'un problème de transport consiste à organiser le transport de façon à minimiser son coût.

Formulation :

a_i = production ou offre

b_j = demande

X_{ij} = quantité transportée

$$
\begin{cases}
a_i \in N & \forall i \in [1,\dots,m] \\
b_j \in N & \forall j \in [1,\dots,n] \\
X_{ij} \in N & \forall i \in [1,\dots,m]; \quad \forall j \in [1,\dots,n] \\
\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j & \forall i \in [1,\dots,m]; \quad \forall j \in [1,\dots,n]; \quad (1) \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & \forall i \in [1,\dots,m]; \quad (2) \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & \forall j \in [1,\dots,n]; \quad (3) \\
\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}
\end{cases}
$$

Exemple :

Soit, la société Alpha possédant quatre dépôts A_1, A_2, A_3 et A_4 dans lesquels existent des quantités respectives de 896, 782, 943, 928 unités d'une matière première, et cinq usines D_1, D_2, D_3 , D_4 et D_5 demandant respectivement 800, 439, 50, 790 et 1470 unités de celles-ci. Les coûts de transport, C_{ij}, sont donnés par le tableau ci-dessous.

Comment organiser le transport au moindre coût total?

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
A_1	21	11	84	49	13	896
A_2	27	52	43	29	42	782
A_3	11	47	14	80	93	943
A_4	52	94	76	74	54	928
b_j	800	439	50	790	1470	3549

Méthode de résolution: recherche d’une solution de base réalisable :

Solution de base

On appelle solution de base d'un programme de transport, une solution admissible comportant M= (m+n-1) x_{ij}>0, c’est-à-dire qu’une solution de base comporte (m.n – M) zéros.

Le graphe d’une solution de base est un graphe connexe sans cycle, c’est-à-dire un arbre comportant N=m+n sommets soit M=N-1 arcs. (Un graphe est connexe s’il existe au moins une chaîne entre toute paire de sommets. Une chaine qui se ferme sur elle-même est un cycle.)

Méthode du COIN NORD-OUEST :

Présentation :

La méthode du coin nord-ouest est une méthode facile mais elle n’a pas de sens économique. Puisqu’elle consiste à affecter au coin nord-ouest de chaque grille la quantité maximale possible sans se préoccuper de l’importance du coût.

Principe :

On considère à chaque étape, le Nord-Ouest de la grille. On part donc de la route (i_1, j_1) ; on sature soit la ligne i_1 soit la colonne j_1. Puis on recommence sur la sous-grille formée des lignes et des colonnes non saturées.

Cette procédure aboutit en général à une solution de base. Si à chaque choix d'une relation, on a épuisé une demande ou une disponibilité mais non les deux, (sauf pour la dernière), donc on a sélectionné (m + n – 1) liaisons et obtenu (m -1)(n – 1) zéros.

Application de la méthode du coin nord-ouest

Première étape :

A_1-D_1 est le coin Nord-Ouest, on lui affecte min (800;896) soit 800 unités demandées par D_1 et fournies en A_1.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
A_1	X					896
A_2						782
A_3						943
A_4						928
b_j	800	439	50	790	1470	3549

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1	800				
A_2					
A_3					
A_4					

On sature ainsi la demande D_1 dont la colonne disparaît et on obtient le tableau 2 pour lequel le coin N-O est A_1-D_2.

	D2	D3	D4	D5	ai
A1	X				96
A2					782
A3					943
A4					928
bj	439	50	790	1470	2749

Deuxième étape :

A_1-D_2 est le coin N-O, on lui affecte 96 unités demandées par D_2 et fournies en A_1.

	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
A_1	X				96
A_2					782
A_3					943
A_4					928
b_j	439	50	790	1470	2749

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1	800	96			
A_2					
A_3					
A_4					

On sature ainsi l'offre en A_1, qui disparaît. On obtient le tableau 3 pour lequel le coin N-O est A_2-D_2.

	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
A_2	X				782
A_3					943
A_4					928
b_j	439	50	790	1470	2653

Troisième étape :

A_2-D_2 est le coin N-O, on lui affecte 343 unités demandées par D_2 et offert par A_2.

	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
A_2	X				782
A_3					943
A_4					928
b_j	439	50	790	1470	2653

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1	800	96			
A_2		343			
A_3					
A_4					

On satisfait ainsi la demande D_2, qui disparaît. On obtient le tableau 4 pour lequel le coin N-O est A_2-D_3.

	D_3	D_4	D_5	a_i
A_2	X			439
A_3				943
A_4				928
b_j	50	790	1470	2310

Quatrième étape :

A_2-D_3 est le coin N-O, on lui affecte 50 unités fournies par A_2 et demandée en D_3

.

	D_3	D_4	D_5	a_i
A_2	X			439
A_3				943
A_4				928
b_j	50	790	1470	2310

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1	800	96			
A_2		343	50		
A_3					
A_4					

On sature la demande D_3, qui disparaît. On obtient le tableau 5 pour lequel le coin N-O est A_2-D_4.

	D_4	D_5	a_i
A_2	X		389
A_3			943
A_4			928
b_j	790	1470	2260

Cinquième étape :

A_2-D_4 est le coin N-O, on lui affecte 389 unités fournies par A_2 et demandée par D_4.

	D_4	D_5	a_i
A_2	X		389
A_3			943
A_4			928
b_j	790	1470	2260

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1	800	96			
A_2		343	50	389	
A_3					
A_4					

On sature l'offre A_2, qui disparaît. On obtient le tableau 5 pour lequel le coin N-O est A_3-D_4.

	D_4	D_5	a_i
A_3	X		943
A_4			928
b_j	401	1470	1871

Sixième étape :

A_3-D_4 est le coin N-O, on lui affecte 401 unités fournies par A_3 et demandée par D_4.

	D_4	D_5	a_i
A_3	X		943
A_4			928
b_j	401	1470	1871

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1	800	96			
A_2		343	50	389	
A_3				401	
A_4					

On sature la demande D_4, qui disparaît. On obtient le tableau 5 pour lequel le coin N-O est A_3-D_5.

	D_5	a_i
A_3	X	943
A_4		928
b_j	1470	1871

Dernière étape :

Il ne reste qu'une colonne D_5 on affecte aux liaisons existantes le transport de façon évidente.

	D_5	a_i
A_3	X	943
A_4		928
b_j	1470	1871

Nous avons ainsi obtenu une solution de base réalisable puisque la condition d’avoir (n -1)(m -1) variables nulles dans la solution est satisfaite (12 cases vides dans le dernier tableau)

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1	800	96			
A_2		343	50	389	
A_3				401	542
A_4					928

Le coût de cette solution de base est de :

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1	21	11	84	49	13
A_2	27	52	43	29	42
A_3	11	47	14	80	93
A_4	52	94	76	74	54

800* 21+ 96*11+ 343* 52 + 50* 43 + 389* 29 + 401* 80 + 542*93 + 928*54

= 181 721 UM

Méthode de BALAS – HAMMER :

Présentation :

Cette méthode est basée sur le calcul des regrets. Le regret associé à une ligne ou à une colonne est la différence entre le coût minimum et le coût immédiatement supérieur dans cette ligne ou dans cette colonne. C’est une mesure de la priorité à accorder aux transports de cette ligne ou de cette colonne, car un regret important correspond à une pénalisation importante si on n’utilise pas la route de coût minimum.

La méthode de Balas-Hammer fournit, en général, une solution très proche de l’optimum; le nombre de changements de base nécessaires pour arriver à une solution optimale est peu élevé (il arrive même assez fréquemment que la solution donnée par cette règle soit optimale).

Principe :

D’abord, on calcule pour chaque rangée, ligne ou colonne, la différence entre le coût le plus petit avec celui qui lui est immédiatement supérieur.

Ensuite on affecte à la relation de coût le plus petit correspondant à la rangée présentant la différence maximale la quantité la plus élevée possible. Ce qui sature une ligne ou une colonne.

Et on reprendre le processus jusqu'à ce que toutes les rangées soient saturées.

L’algorithme de Balas-Hammer:

Δl représente la différence entre le coût minimum et celui immédiatement supérieur sur une ligne.

Δc représente la différence entre le coût minimum et celui immédiatement supérieur sur une colonne.

1- Calculer les différences Δl et Δc pour chaque ligne et colonne.

2- Sélectionner la ligne ou la colonne ayant le Δl ou Δc maximum.

3- Choisir dans cette ligne ou colonne le coût le plus faible.

4- Attribuer à la relation (i, j) correspondante le maximum possible de matière transportable de façon à saturer soit la destination soit la disponibilité.

5- calculer la quantité résiduelle soit demande soit en disponibilité.

6- Eliminer la ligne ou la colonne ayant sa disponibilité ou demande satisfaite.

7- SI nombre de lignes ou colonnes> 2 retour en 2. SINON affecter les quantités restantes aux liaisons.

Application de l’algorithme de Balas-Hammer

Reprenons l’exemple précédant, et cherchons une solution de base par l’algorithme de Balas-Hammer.

Première étape :

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i	ΔI
A_1	21	11	84	49	13	896	2
A_2	27	52	43	29	42	782	2
A_3	11	47	14	80	93	943	3
A_4	52	94	76	74	54	928	2
b_j	800	439	50	790	1470	3549	
Δc	10	36	29	20	29		

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1		439			
A_2					
A_3					
A_4					

Deuxième étape :

	D_1	D_3	D_4	D_5	a_i	Δl
A_1	21	84	49	13	457	8
A_2	27	43	29	42	782	2
A_3	11	14	80	93	943	3
A_4	52	76	74	54	928	2
b_j	800	50	790	1470	3110	
Δc	10	29	20	29		

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1		439			457
A_2					
A_3					
A_4					

Troisième étape :

	D_1	D_3	D_4	D_5	a_i	ΔI
A_2	27	43	29	42	782	2
A_3	11	14	80	93	943	3
A_4	52	76	74	54	928	2
b_j	800	50	790	1013	2653	
Δc	16	29	45	12		

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1		439			457
A_2				782	
A_3					
A_4					

Quatrième étape :

	D_1	D_3	D_4	D_5	a_i	ΔI
A_3	11	14	80	93	943	3
A_4	52	76	74	54	928	2
b_j	800	50	8	1013	1871	
Δc	41	62	6	39		

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1		439			457
A_2				782	
A_3			50		
A_4					

Cinquième étape :

	D_1	D_4	D_5	a_i	ΔI
A_3	11	80	93	893	69
A_4	52	74	54	928	2
b_j	800	8	1013	1821	
Δc	41	6	39		

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1		439			457
A_2				782	
A_3	800		50		
A_4					

Sixième étape :

	D_4	D_5	a_i	Δl
A_3	80	93	93	13
A_4	74	54	928	20
b_j	8	1013	1021	
Δc	6	39		

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1		439			457
A_2				782	
A_3	800		50		
A_4					928

Septième étape :

	D_4	D_5	a_i	Δl
A_3	80	93	93	13
b_j	8	85	93	
Δc	0	0		

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1		439			457
A_2				782	
A_3	800		50	8	
A_4					928

Dernière étape :

Il nous reste qu'une source non épuisée A_3, on l'affecte à D_5 qui demande exactement 85 unités.

Enfin, la solution de base est :

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1		439			457
A_2				782	
A_3	800		50	8	85
A_4					928

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1	21	11	84	49	13
A_2	27	52	43	29	42
A_3	11	47	14	80	93
A_4	52	94	76	74	54

Son coût est :

439*11+457*13+782*29+800*11+50*14+8*80+85*93+928*54

= 101.605 UM

Optimisation d'une solution de base : Algorithme du STEPPING-STONE.

Tout d'abord, on va montrer que l'on peut améliorer la solution de base trouvée par la méthode de Balas-Hammer :

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1		- 439			+ 457
A_2				782	
A_3	800	+	50	8	- 85
A_4					928

Supposons que l'on veuille transporter sur la liaison A_3-D_2, de coût 47, une unité. Calculons donc le coût marginal $\partial 32$ de cette opération:

∂_{32} = + 47 + 13 – 11 – 93 =-44

Nous gagnons de cette façon 44 unités monétaires.

Et au lieu de substituer une unité on peut en substituer 85. Dans ce cas la liaison A_3-D_5 disparaît au profit de la liaison A_3-D_2. Et le gain marginal est de 3740.

Le coût total devient alors 97 865 UM (101.605 – 3740)

Présentation de l'algorithme :

A partir d'une solution de base,

1- Calculer les ∂_{ij} (coût marginal de la liaison (i, j)) pour chaque liaison non affectée, en utilisant les potentiels de l'arbre associé.

- SI tous les $\partial_{ij} \geq 0$ l'optimum est atteint.

2- Sinon, rechercher le cycle de substitution associé au ∂_{ij} <0 le plus petit.

3- Ensuite, rechercher la quantité minimum q parmi les cases marquées ''–'', et substituer la quantité q le long du cycle pour obtenir une nouvelle solution,

4- Revenir à 1

Calcul des couts marginaux à l'aide des potentiels :

On peut définir un ensemble de potentiels (edp) sur un graphe représentant la solution de base (qui est un arbre) si on connaît un potentiel initial, les relations entres sommets et leurs coûts, on peut calculer de proche en proche les autres potentiels. Cette propriété résulte du fait que dans un arbre il existe une chaîne unique entre deux sommets quelconques.

On crée pour la solution de base un edp en attribuant un potentiel zéro à un sommet quelconque, en pratique on prendra le sommet de plus fort degré. De proche en proche on attribue à chaque sommet un potentiel u_i et v_j.

On appelle:

u_i: potentiel origine.

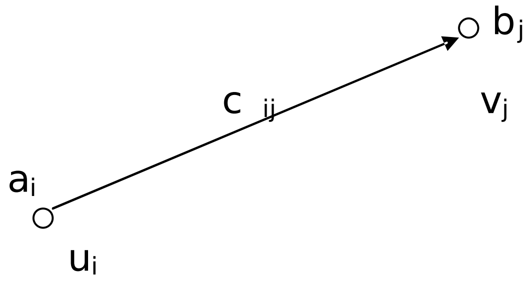
v_j: potentiel destination.

∂_{ij}: coût marginal de la liaison (x_i, x_j).

On a les relations :

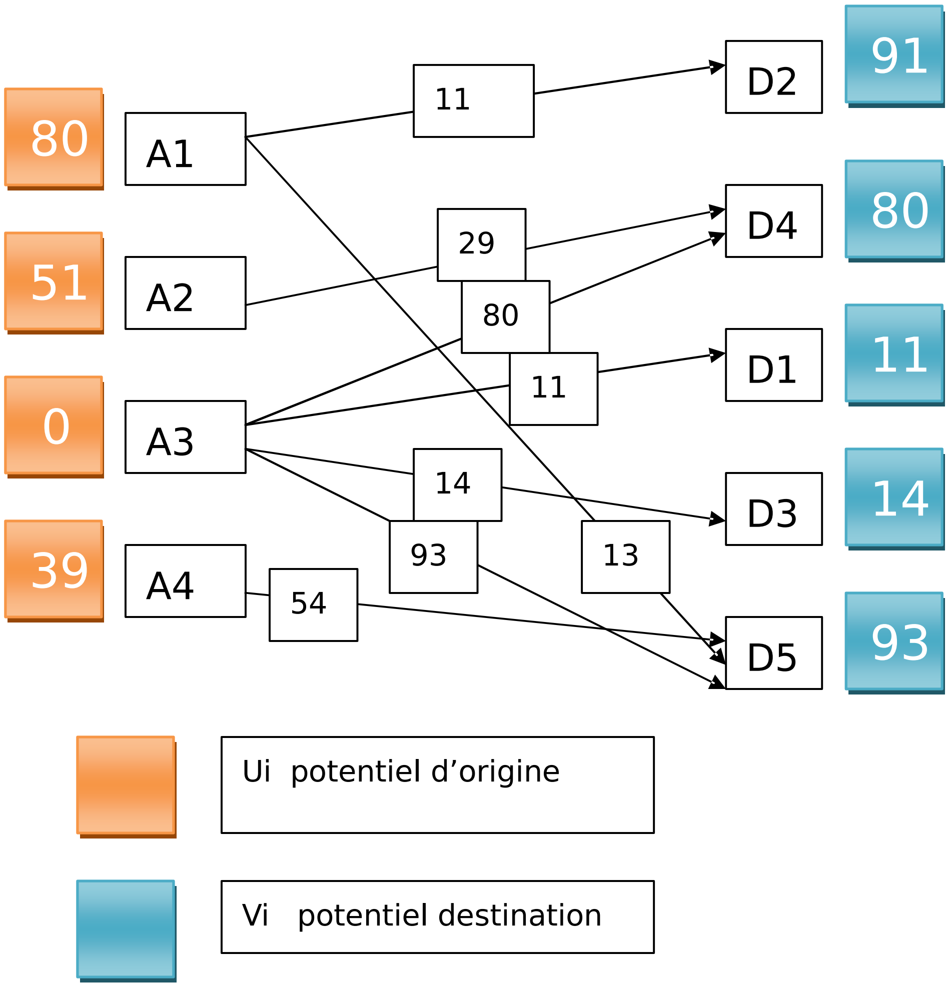
$c_{ij} = v_j - u_i$.

$\partial_{ij} = c_{ij} - (v_j - u_i)$.



Calcul des gains marginaux de la solution de base donnée par l'algorithme de Balas-Hammer.

1- Calcul des potentiels: mettons arbitrairement le potentiel zéro au sommet A_3.



2- Les gains marginaux ∂ij sont représentés dans le tableau suivant :

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	U_i
A_1	90 / 21		150 / 84	49 / 49		80
A_2	67 / 27	12 / 52	80 / 43		0 / 42	51
A_3		-44 / 47				0
A_4	80 / 52	42 / 94	101 / 76	33 / 74		39
V_j	11	91	14	80	93	

On remarque qu'il existe un coût marginal négatif en (A_3-D_2), qui est de – 44, donc, il y a possibilité d'améliorer la solution de base.

Ensuite, il faut rechercher le cycle de substitution permettant de réaliser le transport auquel correspond $\partial < 0$

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1		- 439			+ 457
A_2				782	
A_3	800	+	50	8	- 85
A_4					928

On contrôle d'ailleurs que : $\partial_{32} = C_{32} + C_{15} - C_{35} - C_{12}$

$$\partial_{32} = 47 + 13 - 11 - 93 = -44$$

Après, il faut chercher la quantité maximale déplaçable parmi les cases 'marquées –', Min (85 ; 439) = 85

Le résultat de cette substitution sera de 85*(- 44) = - 3740, c'est-à-dire un gain total de 3740 UM. La solution obtenue alors à pour coût 97 865 UM.

La nouvelle solution est donnée ci-dessous :

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1		354			542
A_2				782	
A_3	800	85	50	8	
A_4					928

Maintenant, on va chercher pour cette solution les coûts marginaux.

Les gains marginaux ∂ij sont représentés dans le tableau ci-dessous :

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	U_i
A_1	46 / 21		106 / 84	5 / 49		41
A_2	67 / 27	56 / 52	80 / 43		43 / 42	56
A_3					44 / 93	5
A_4	36 / 52	42 / 94	57 / 76	-11 / 74		0
V_j	16	52	19	85	54	

Il existe encore un coût marginal négatif en A_4-D_4 (-11). Il y a donc possibilité d'améliorer cette solution.

Effectuons les permutations correspondant au ∂_{ij} négatif, soit (A_4-D_4). Le maximum qu'on peut affecter à la liaison (A_4-D_4) est de 8 unités, on a alors:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1		- 354			+ 542
A_2				782	
A_3	800	+ 85	50	- 8	
A_4				+	- 928

La nouvelle solution est donnée ci-dessous, son coût est de 97 777 UM.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1		346			550
A_2				782	
A_3	800	93	50		
A_4				8	820

Nous allons évaluer pour cette nouvelle solution les coûts marginaux.

Les gains marginaux ∂ij sont représentés dans le tableau ci-dessous :

	D1	D2	D3	D4	D5	Ui
A1	46 / 21		106 / 84	16 / 49		41
A2	56 / 27	45 / 52	69 / 43		33 / 42	45
A3				11 / 80	44 / 93	5
A4	36 / 52	42 / 94	57 / 76			0
Vj	16	52	19	74	54	

On constate que tous les coûts marginaux ∂ij≥0, donc cette solution est une solution optimale.

L'optimum est unique si aucun des ∂ij n'est nul, sinon on peut déduire des solutions équivalentes par des substitutions correspondant aux ∂ij =0.

Pour notre exemple, la solution optimale est unique et elle est atteinte après la deuxième itération et elle a pour coût 97 777 UM

Vérification du résultat par le logiciel Solveur d’Excel

```
VC  =B9*B2+B10*B3+B11*B4+B5*B12+C2*C9+C3*C10+C4*C11+C5*C12+D2*D9+D3*D10+D4*D11+D5*D12+E2*E9+E3*E10+E4*E11+E12*E5+F2*F9+
```

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1	21	11	84	49	13
A_2	27	52	43	29	42
A_3	11	47	14	80	93
A_4	52	94	76	74	54

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
A_1	0	346	0	0	550	896
A_2	0	0	0	782	0	782
A_3	800	93	50	0	0	943
A_4	0	0	0	8	920	928
b_j	800	439	50	790	1470	3549

FE

```
=B9*B2+B10*B3+B11*B4+B5*B12+C2*C9+C3*C10+C4*C11+C5*C12+D2*D9+D3*D10+D4*D11+D5*D12+E2*E9+E3*E10+E4*E11+E12*E5+F2*F9+F3*F10+F4*F11+F5*F12
```

contraites			
1	896	=	896
2	782	=	782
3	943	=	943
4	928	=	928
5	800	=	800
6	439	=	439
7	50	=	50
8	790	=	790
9	1470	=	1470

B14 =B8*B2+B9*B3+B10*B4+B5*B11+C2*C8+C3*C9+C4*C10+C5*C11+D2*D8+D3*D9+D4*D10+D5*D11+E2*E8+E3*E9+E4*E10+E11*E5+F2*F8+F3*F9+F4*F10+F5*F11

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1	21	11	84	49	13
A_2	27	52	43	29	42
A_3	11	47	14	80	93
A_4	52	94	76	74	54

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
A_1	0	346	0	0	550	896
A_2	0	0	0	782	0	782
A_3	800	93	50	0	0	943
A_4	0	0	0	8	920	928
b_j	800	439	50	790	1470	3549

FE	97777		
contraintes	1	896 =	896
	2	782 =	782
	3	943 =	943
	4	928 =	928
	5	800 =	800
	6	439 =	439
	7	50 =	50
	8	790 =	790
	9	1470 =	1470

Problème d’affectation

Présentation :

Il s’agit d’un cas particuliers du problème de transport avec n entrepôts et n magasins, et où la demande associée à chaque destination égale à 1.

Le problème consiste à affecter les éléments d’un ensemble à ceux d’un autre ensemble de sorte que la somme des coûts des affectations soit minimale.

Formalisation :

Le programme à résoudre est :

x_{ij} =1 si i est affecté à j.

x_{ij} =0 si i n'est pas affecté à j.

C_{ij} = coût d’affectation de i à j.

$$\begin{cases} Min \quad z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \{1,2,\ldots,n\} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \\ x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \ et \ \forall j \in \{1,2,\ldots,n\} \end{cases}$$

La méthode Hongroise :

Présentation

Cet algorithme repose essentiellement sur la constatation suivante. On ne change pas la ou les solutions optimales en augmentant ou en diminuant d'une même quantité ך tous les éléments d'une même ligne (ou d'une même colonne) de la matrice des Cij.

Après une telle opération, la valeur totale est augmentée ou diminuée de ך . Par conséquent, si l'on fait apparaître, par des transformations de ce type, suffisamment de zéros dans le tableau, mais pas de coûts négatifs, et qu'il existe n zéros "indépendants" (c'est-à-dire un seul zéro dans chaque ligne et dans chaque colonne), on aura alors trouvé l'affectation optimale.

Résolution d’un problème d’affectation par l’algorithme hongrois :

Afin d'expliquer la démarche suivie, considérons l'exemple suivant :

Soit La société Beta possédant quatre ateliers : fonte, moulage, laminage et traitement thermique, qu’on va nommer respectivement F, M, L et T, pour lesquels elle veut affecter quatre chef de service polyvalents, monsieur A, B, C et D.

Les coûts d’affectation pour chaque liaison sont donnés par le tableau ci-dessous.

Comment organiser l’affectation de façon à en minimiser le coût?

	F	M	L	T
A	60	170	330	360
B	130	200	200	400
C	50	300	170	180
D	120	90	250	200

Première étape :

Réduction des lignes : on crée une nouvelle matrice des coûts en choisissant le coût minimal sur chaque ligne et en le soustrayant de chaque coût sur la ligne.

	F	M	L	T	Réduit de
A	0	110	270	300	60
B	0	70	70	270	130
C	0	250	120	130	50
D	30	0	160	110	90

Exemple : pour la première ligne (A) :

- Relation (A, F) : 60 -60 = 0
- Relation (A, M) : 170-60=110
- Relation (A, L) : 330-60=270
- Relation (A, T) : 360-60=300

Deuxième étape :

Réduction des colonnes : on crée une nouvelle matrice des coûts en choisissant le coût minimal dans chaque colonne et en le soustrayant de chaque coût dans la colonne.

	F	M	L	T
A	0	110	200	190
B	0	70	0	160
C	0	250	50	20
D	30	0	90	0
Réduit de :	0	0	70	110

Troisième étape :

Maintenant, il faut déterminer le nombre minimal de lignes nécessaires sur les lignes et les colonnes pour couvrir tous les zéros.

Si ce nombre est égal au nombre de lignes (ou colonnes), la matrice est réduite; aller à l’étape 5. Si ce nombre est inférieur au nombre de lignes (ou colonnes), aller à l’étape 4.

	F	M	L	T
A	0	110	200	190
B	0	70	0	160
C	0	250	50	20
D	30	0	90	0

Dans ce cas, le nombre minimal de lignes est de 3 qui est inférieur au nombre de ligne ou colonne (4), alors on passe à l'étape 4.

Quatrième étape :

Premièrement, il faut trouver la cellule de valeur minimum non couverte par une ligne, puis, soustraire cette valeur de toutes les cellules non couvertes.

Ensuite, ajouter cette valeur aux cellules situées à l'intersection de deux lignes.

Et enfin, retourner à l'étape 3.

	F	M	L	T
A	0	110	200	190
B	0	70	0	160
C	0	250	50	20
D	30	0	90	0

La valeur minimum des cellules non couvertes est 20.

On soustrait 20 des cellules non couvertes et on l'ajoute aux cellules qui se trouvent à l'intersection des lignes, ceci nous donne le tableau suivant :

	F	M	L	T
A	0	90	180	170
B	20	70	0	160
C	0	230	30	0
D	50	0	90	0

+20

-20

Maintenant, le nombre minimal de ligne est égale à 4.

	F	M	L	T
A	0	90	180	170
B	20	70	0	160
C	0	230	30	0
D	50	0	90	0

La solution optimale est donc la suivante :

	F	M	L	T
A	0	90	180	170
B	20	70	0	160
C	0	230	30	0
D	50	0	90	0

Résultat donné par la méthode Hongroise :

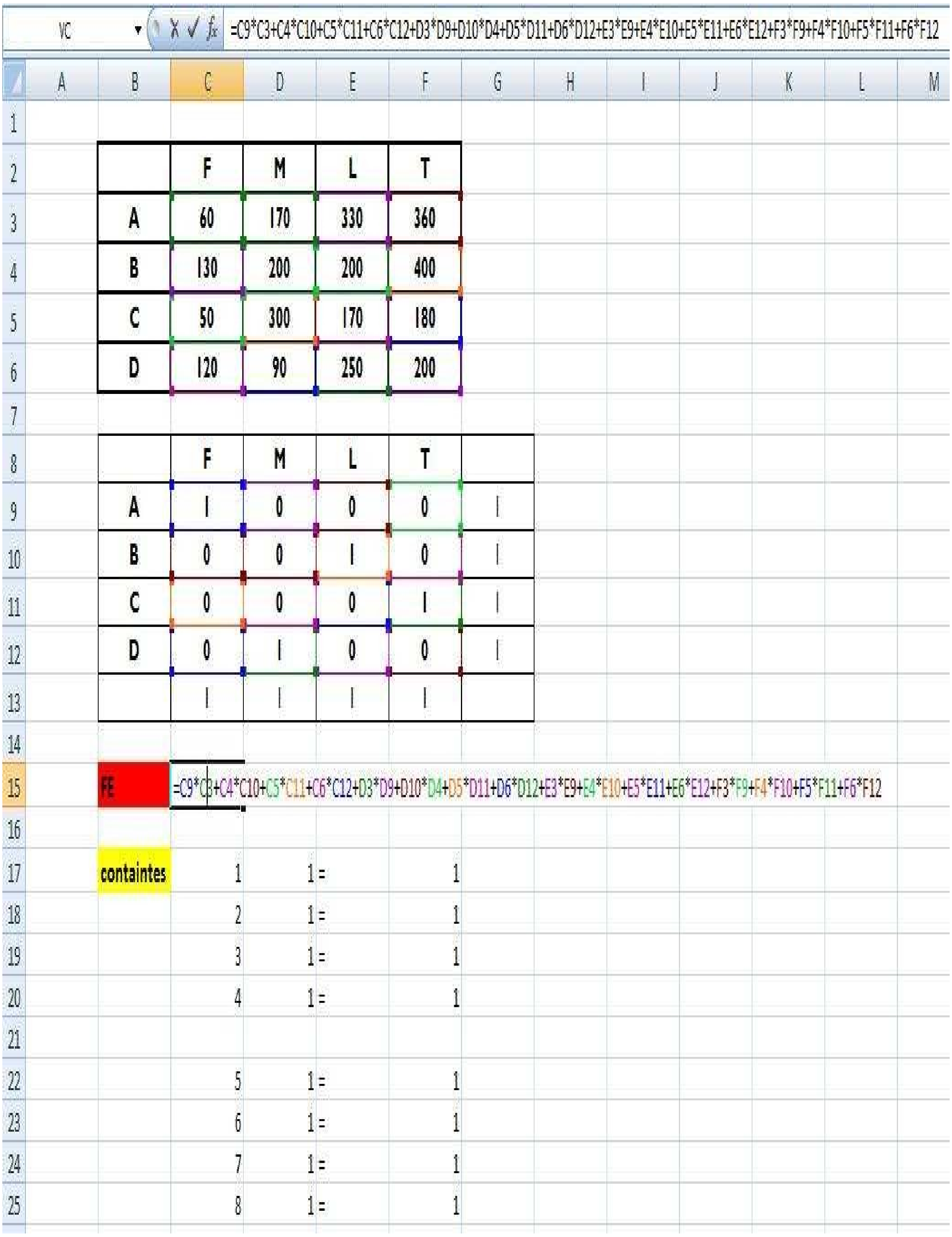
	F	M	L	T
A	1			
B			1	
C				1
D		1		

La solution à pour coût :

	F	M	L	T
A	60	170	330	360
B	130	200	200	400
C	50	300	170	180
D	120	90	250	200

60 + 200 + 180 + 90 = 530 UM

Vérification par le logiciel Solveur d’Excel :



VC =C9*C3+C4*C10+C5*C11+C6*C12+D3*D9+D10*D4+D5*D11+D6*D12+E3*E9+E4*E10+E5*E11+E6*E12+F3*F9+F4*F10+F5*F11+F6*F12

	F	M	L	T
A	60	170	330	360
B	130	200	200	400
C	50	300	170	180
D	120	90	250	200

	F	M	L	T	
A	1	0	0	0	1
B	0	0	1	0	1
C	0	0	0	1	1
D	0	1	0	0	1
	1	1	1	1	

FE =C9*C3+C4*C10+C5*C11+C6*C12+D3*D9+D10*D4+D5*D11+D6*D12+E3*E9+E4*E10+E5*E11+E6*E12+F3*F9+F4*F10+F5*F11+F6*F12

containtes	1	1 =	1
	2	1 =	1
	3	1 =	1
	4	1 =	1
	5	1 =	1
	6	1 =	1
	7	1 =	1
	8	1 =	1

C15 =C9*C3+C4*C10+C5*C11+C6*C12+D3*D9+D10*D4+D5*D11+D6*D12+E3*E9+E4*E10+E5*E11+E6*E12+F3*F9+F4*F10+F5*F11+F6*F12

	F	M	L	T
A	60	170	330	360
B	130	200	200	400
C	50	300	170	180
D	120	90	250	200

	F	M	L	T	
A	1	0	0	0	1
B	0	0	1	0	1
C	0	0	0	1	1
D	0	1	0	0	1
	1	1	1	1	

FE	530

containtes	1	1 =	1
	2	1 =	1
	3	1 =	1
	4	1 =	1
	5	1 =	1
	6	1 =	1
	7	1 =	1
	8	1 =	1

Bibliographie :

R. Faure, B Lemaire, C Picouleau : Précis de recherche Opérationnelle - 5ème édition Dunod –

Gérard Desbazeille : Exercices et problèmes de recherche opérationnelle - 2éme édition Dunod-

http://www.wearegeaks.info

http://el.poweng.pub.ro/Loc/PL/html/transport.htm

http://www.iut-info.univ-lille1.fr/~afm/old/ro/transport/transport.html