Dans toute cette fiche, si f est une fonction, on notera F l'une de ses primitives. La lettre c désignera une constante.
On rappelle que F est une primitive de f sur un **intervalle** I si : $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.
On rappelle également qu'une primitive de $f + kg$ ($k \in \mathbb{R}$) est $F + kG$. (Linéarité)

Cas des fonctions polynômes

Une seule formule à connaître : si $f(x) = x^n$ alors $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$)

Exemple 1 :

Déterminer une primitive F de la fonction f définie, sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 7x - 1$

SOLUTION :

$$F(x) = 3 \times \frac{x^4}{4} - 4 \times \frac{x^3}{3} + 7 \times \frac{x^2}{2} - x + c = \frac{3}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - x + c$$

Cas des fonctions usuelles

Une lecture "réciproque" des formules de dérivation des fonctions usuelles est suffisante pour déterminer une primitive. Rappelons ces formules :

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ (Condition : $x \neq 0$) $\qquad$ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ (Condition : $x > 0$)

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (Condition : $x > 0$) $\qquad$ $(\mathbf{e}^x)' = \mathbf{e}^x$

Exemple 2 :

Déterminer une primitive F de la fonction f définie, pour $x \in]0\,;+\infty[$, par : $f(x) = \dfrac{5}{x} - \dfrac{3}{x^2} + 6\,\mathbf{e}^x$

SOLUTION :

$$F(x) = 5 \times \ln x + 3 \times \frac{1}{x} + 6\,\mathbf{e}^x + c = 5\ln x + \frac{3}{x} + 6\,\mathbf{e}^x + c$$

La notion de primitive n'est valable que sur un **intervalle**. Même si l'ensemble de définition d'une fonction f est $\mathbb{R}^*$, on ne cherche ses primitives que sur un intervalle (ici $]0\,;+\infty[$)

Cas des fonctions composées

Une bonne connaissance des formules de dérivation est, en générale, suffisante pour déterminer une primitive.
On rappelle ces formules : (valables lorsque u est une fonction dérivable)

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ (Condition : $u > 0$) $\qquad$ Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est donc $\ln u$

$\mathbf{e}^u = u'\,\mathbf{e}^u$ $\qquad$ Une primitive de $u'\,\mathbf{e}^u$ est donc $\mathbf{e}^u$

$(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$ (Conditions : $u > 0$ ou $n \in \mathbb{N}$) $\qquad$ Une primitive de $u'u^n$ est donc $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$

$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ (Condition : $u > 0$) $\qquad$ Une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est donc $2\sqrt{u}$

Exemple 3 :

Déterminer une primitive des fonctions f et g définies par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ et $g(x) = 3x\mathbf{e}^{x^2}$

SOLUTIONS :

- Écrivons : $f(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{x^2+1}$. Ainsi, f est de la forme : $f = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$.

  Une primitive F de f est donc : $F = \dfrac{1}{2}\ln u + c$. Ce qui donne : $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + c$

- Écrivons : $g(x) = \dfrac{3}{2} \times 2x\mathbf{e}^{x^2}$. Ainsi, g est de la forme : $g = \dfrac{3}{2} \times u'\mathbf{e}^u$ avec $u(x) = x^2$.

  Une primitive G de g est donc : $G = \dfrac{3}{2} \times \mathbf{e}^u + c$. Ce qui donne : $G(x) = \dfrac{3}{2}\,\mathbf{e}^{x^2} + c$

Cas où l'on dérive une certaine fonction proposée dans l'énoncé

C'est un grand classique. On cherche une primitive d'une certaine fonction f. Pour cela, l'énoncé introduit une certaine fonction F et nous demande de la dériver. On constate alors que $F' = f$. On en déduit que F est une primitive de f.

Exemple 4 :

Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(2x - 2)$

On considère la fonction F définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$F(x) = (x-1)\ln(2x-2) - x$$

Dériver F. En déduire que F est une primitive de la fonction f sur $]1\,;+\infty[$.

SOLUTION :

Dérivons la fonction F qui est de la forme : $F = uv - w$ avec $\begin{cases} u(x) = x - 1 \\ v(x) = \ln(2x-2) \\ w(x) = x \end{cases}$

On a donc : $F' = u'v + uv' - w'$

On obtient, pour tout $x \in\ ]1\,;+\infty[$: $F'(x) = \ln(2x-2) + (x-1) \times \dfrac{2}{2x-2} - 1$

$$F'(x) = \ln(2x-2) + (x-1) \times \frac{2}{2(x-1)} - 1$$

$$F'(x) = \ln(2x-2) + 1 - 1 = \ln(2x-2) = f(x)$$

Comme $F' = f$, on en déduit bien : F est une primitive de f sur $]1\,;+\infty[$

Primitive d'une fonction définie par une "condition initiale"

C'est un fait : si une fonction f admet une primitive F, alors elle en admet une infinité (il suffit de modifier la constante c). Cependant, si on impose une certaine condition (du type $y_0 = F(x_0)$ où x_0 et y_0 sont donnés), alors la primitive F est unique. (Et il faut déterminer la "bonne" constante c)

Exemple 5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$.

Déterminer *la* primitive F de f telle que $F(-1) = 2$.

SOLUTION :

Les primitives F de f sont de la forme : $F(x) = x^3 + x^2 - 4x + c$

La condition $F(-1) = 2$ s'écrit : $2 = -1 + 1 + 4 + c$

D'où : $c = -2$

La primitive F recherchée est donc la fonction F définie par : $F(x) = x^3 + x^2 - 4x - 2$

Exercices proposés :

1)Trouver une primitive des fonctions f et g définies par : $f(x) = (3x^2 + 2)\mathbf{e}^{(x^3+2x)}$ et $g(x) = \mathbf{e}^{-2x} + \dfrac{3x}{x^2+1}$

2)On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 8\ln x - 4x + 4$.

Montrer que la fonction H définie sur $]0\,;+\infty[$ par $H(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction ln.

En déduire *la* primitive F de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$ telle que $F(1) = -4$.

Réponses : 1) $F(x) = \mathbf{e}^{(x^3+2x)} + c$ et $G(x) = -\dfrac{1}{2}\mathbf{e}^{-2x} + \dfrac{3}{2}\ln(x^2+1) + c$ 2) $F(x) = 8x\ln x - 2x^2 - 4x + 2$