Chapitre 3 : Le circuit RLC série

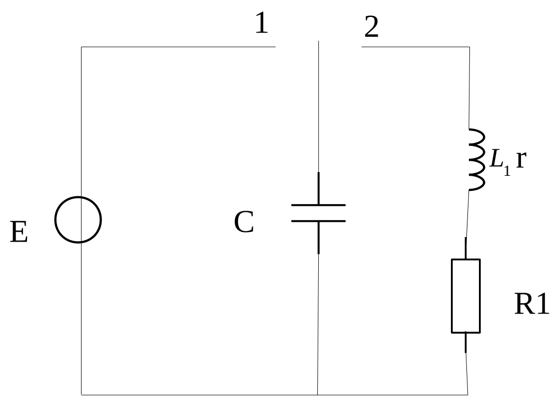
Un condensateur est capable de stocker de l'énergie électrique puis de la restituer sa charge et sa décharge sont caractérisées par une constante de temps τ . Il en est de même pour la bobine. Que se passe-t-il lorsqu'on associe en série un condensateur et une bobine.

I- Décharge d'un condensateur dans une bobine.

1- Dispositif expérimental

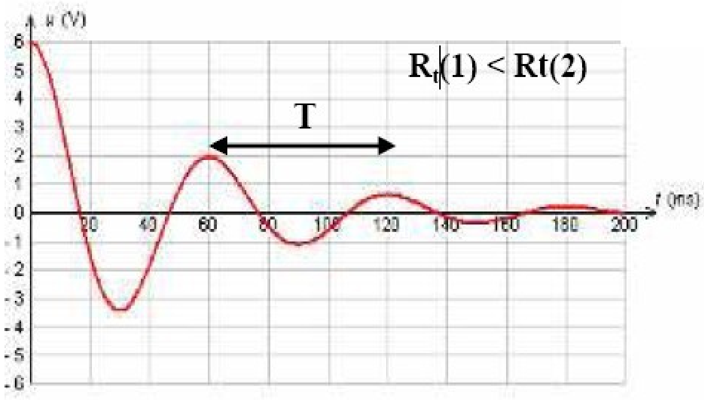
Le montage permet l'étude de la décharge du condensateur dans une bobine.
En position 1, le condensateur se charge.
En position 2, le condensateur se décharge dans le dipôle RL branché à ses bornes.

Le circuit ainsi constitué est un circuit RLC série où R représente la résistance électrique globale du circuit.



On visualise la tension aux bornes du condensateur .

Schéma:



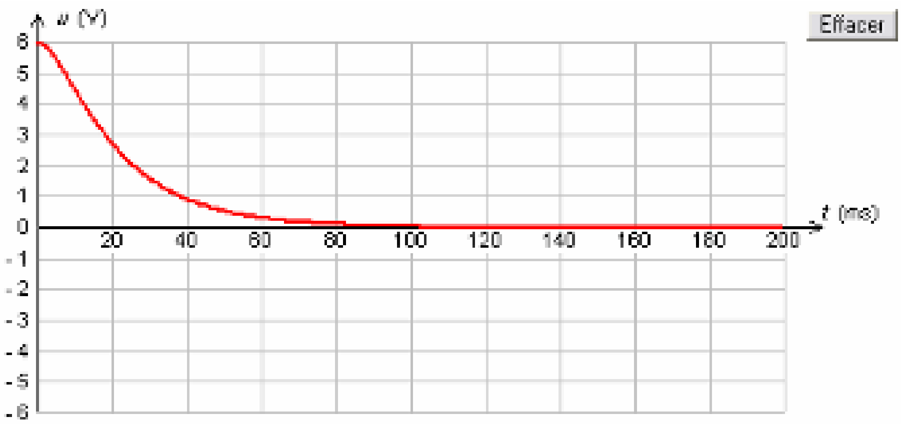
2 – Les régimes de fonctionnement

a – Régime pseudo-périodique

Celui-ci est observé quand l'amortissement est faible c'est à dire quand la valeur de Rt est petite.
On observe un signal périodique dont l'amplitude des oscillations décroît au cours du temps.
Par analogie avec la période d'un signal périodique, on appelle pseudo-période T du signal amorti la durée qui sépare deux maxima successifs.
En effet, pseudo-période et non période car le phénomène n'est pas réellement périodique (pour ça il faudrait que les amplitudes des oscillations soient constantes).

b – Régime apériodique

Quand l'amortissement est trop fort (valeur de R trop grande) alors il n'y a plus d'oscillations, le régime est dit apériodique.



c – Régime critique

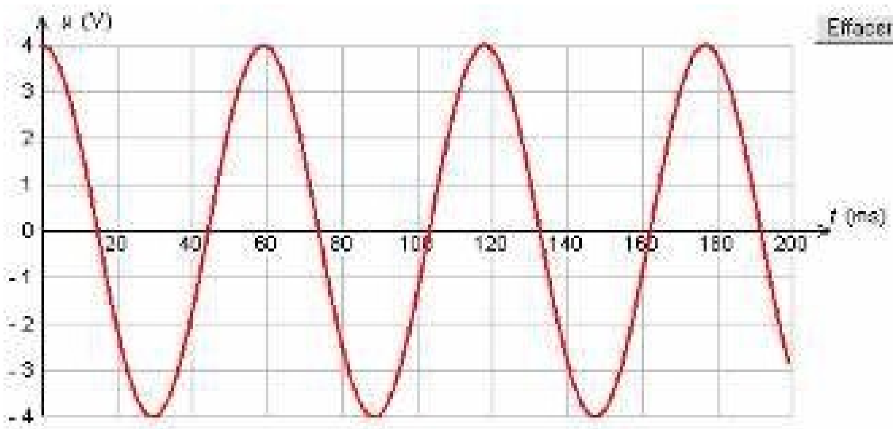
Il existe une valeur de R pour laquelle on passe du régime pseudo-périodique au régime apériodique. Cette valeur de résistance est nommée résistance critique et le régime correspondant s'appelle également le régime critique.

$$R_C = 2 \, (L/C)^{½}$$

La valeur de R dans un circuit RLC détermine le régime de fonctionnement de celui-ci: pseudo-périodique ou apériodique.

d- Régime périodique

Si l'amortissement est négligeable (ce qui ne peut exister en pratique pour un circuit libre), le système est le siège d'oscillations non amorties, le régime est alors périodique. Les oscillations sont de périodes T_0.

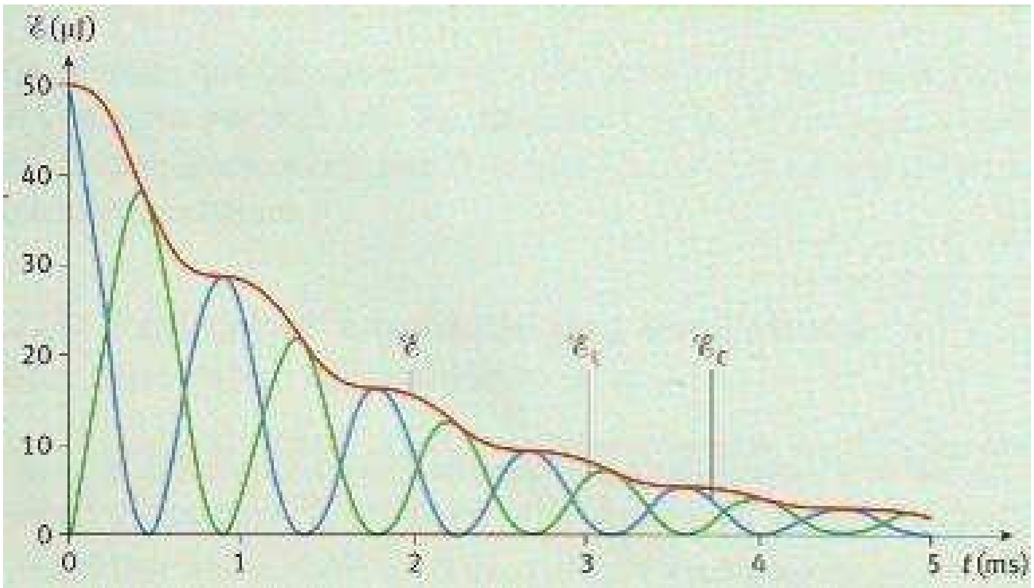


II- Etude énergétique

En enregistrant la tension u_C et u_R, on accède à l'énergie emmagasinée dans le condensateur ($1/2 \times C \times u_C^2$) et à l'énergie emmagasinée dans la bobine ($1/2 \times L \times (u_R/R)^2$).

1- Régime pseudo – périodique

L'énergie totale (EC+EL) décroît au cours du temps, cette énergie étant progressivement dissipée par effet joules dans la résistance.
Il s'effectue un transfert d'énergie du condensateur dans la bobine puis de la bobine dans le condensateur et ainsi de suite.
Quand EC est max alors EL est nulle et quand EC est nulle EL est max.



Au sein d'un circuit RLC en régime libre, condensateur et bobine échangent de l'énergie. La quantité d'énergie transférée d'un dipôle à l'autre diminue du fait de sa dissipation par effet Joule dans la résistance R du circuit.

2 – Régime apériodique

Il y a uniquement un transfert d'énergie du condensateur dans la bobine et dissipation de celle-ci dans le conducteur ohmique par effet Joule. E_C décroît au cours du temps.

3 – Régime périodique

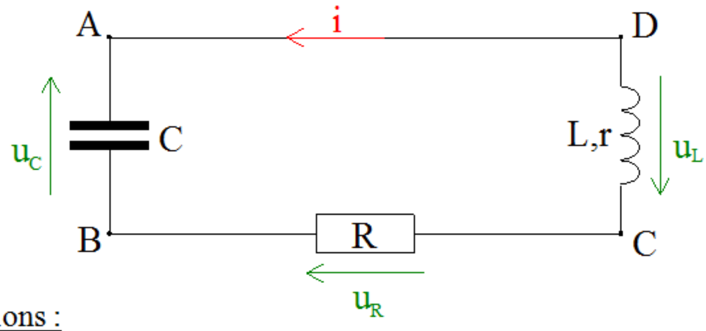
Dans ce cas l'énergie totale est constante, bobine et condensateur s'échangent continuellement de l'énergie.

Schéma

III – Oscillations libres dans un dipôle LC

1- Décharge d'un condensateur

Un circuit RLC est modélisé par trois composants idéaux branchés en série : un condensateur de capacité C, une bobine d'inductance L et un conducteur ohmique de résistance R (incluant éventuellement la résistance interne de la bobine).



Le circuit est orienté tel que $i = dq_A / dt$ et on note $q_A = q$.

On peut appliquer à ce circuit la loi d'additivité des tensions :

$U_{AB} + u_{BC} + u_{CD} + u_{DA} = 0$
Soit $u_C + u_R + u_L = 0$

$u_C = q / C$; $u_R = R \,.\, i = R\, dq / dt = R \dot{q}$; $u_L = L\, di / dt = L\, d^2q / dt^2 = L \ddot{q}$

On obtient $L \,.\, \ddot{q} + (R) \,.\, \dot{q} + 1 / C \,.\, q = 0$

Ou en fonction de u_c : $\dfrac{d^2 u_C}{dt^2} + \dfrac{R}{L} \dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{LC} u_C = 0$

Le second terme est le terme d'amortissement, L et C étant fixés, le régime dépendra de la valeur de R.
La résolution mathématique de ce type d'équation n'est pas réalisable en terminale mais on peut étudier un cas particulier celui des oscillations non amorties.

2 – Décharge d'un condensateur dans une bobine idéale

Pour que les oscillations ne soient pas amorties, il faut que la résistance totale du circuit soit nulle. Il faut donc considérer la bobine comme idéale, c'est à dire n'ayant pas de résistance interne. Ce n'est donc qu'un modèle théorique irréalisable en pratique.

L'équation différentielle est obtenue de la même façon que précédemment mais avec R = 0, on a :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

3 – Résolution de l'équation différentielle

On cherche donc une solution du type $u_c(t) = A \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$

A est l'amplitude, $\left(\dfrac{2\pi t}{T_0} + \varphi\right)$ représente la phase des oscillations et T_0 est la période propre des oscillations.

φ est la phase à l'instant t = 0. A et φ peuvent être déterminées à partir des conditions initiales du circuit.

Le condensateur étant initialement chargé, on a: $u_c (t = 0) = U_0$ et $q (t = 0) = CU_0$

Avant de fermer le circuit, l'intensité est nulle : $i (t = 0) = 0$

Or $i = C.du_c$ et $du_c = - \dfrac{2\pi A}{T_0} \sin\left(\dfrac{2\pi t}{T_0} + \varphi\right)$ et $i (t = 0) = 0 = - \dfrac{2\pi AC}{T_0} \sin \varphi$

Donc $\sin \varphi = 0$ soit $\varphi = 0$ (à π près)

De plus $u_c(t = 0) = U_0 = A \cos \varphi$ donc $A = U_0$

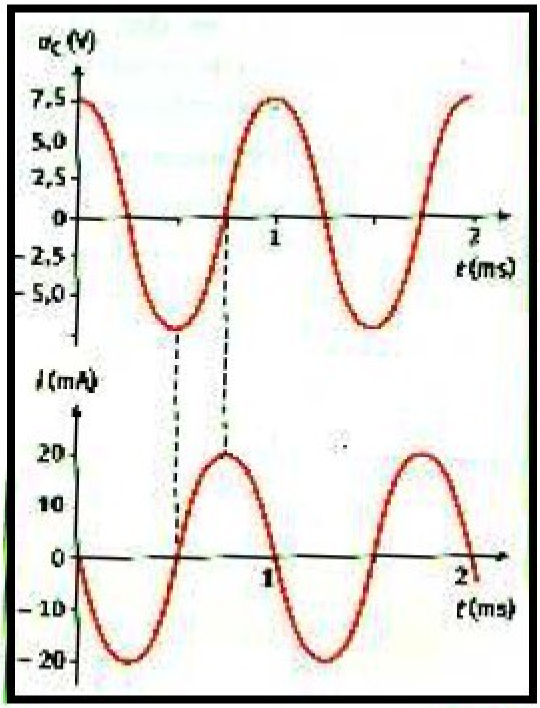
On obtient donc $u_c(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)$

Donc $q(t) = C\,u_c = C\,U_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)$ et $i = d\,q(t) / dt$

Ces grandeurs sont des fonctions sinusoïdales du temps de période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

Pour trouver l'expresson de la période propre, on remplace la solution dans l'équation différentielle.

A partir de l'expression de uc(t) , on peut en déduire l'expression de i(t)
Rq: u(t) et i(t) sont en quadrature.



IV – Les oscillations entretenues:

1 – Apport d'énergie

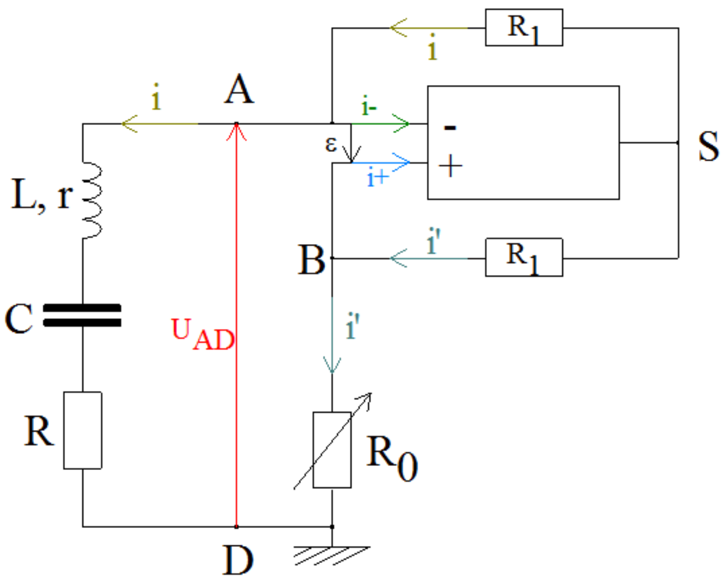
Un oscillateur électrique tel que nous l'avons vu est amorti par dissipation d'énergie par effet Joule dans le conducteur ohmique.
Pour entretenir les oscillations d'un circuit RLC libre, il faut apporter au circuit par l'intermédiaire d'un dispositif, la même quantité d'énergie qui a été perdue. C'est le rôle du dispositif d'entretien.

2 – Dispositif d'entretien des oscillations: montage à résistance négative

Il se compose d'un amplificateur opérationnel qui se comporte comme un générateur qui compenserait exactement les pertes d'énergie dues à l'effet Joule. L'énergie perdue est compensée par celle apportée par l'alimentation de l'ampli-op.

Pour cela, il faut déterminer quelle doit être la tension fournie par le dispositif d'entretien des oscillations (notée u_e comme tension d'entretien).

- Le circuit perd une puissance $P = R.i^2$ par effet Joule.
- Le dispositif d'entretien fournit une puissance $P_e = u_e \times i$



Pour qu'il puisse compenser la puissance perdue, il faut que **$P = P_e$** donc que **$u_e = R.i$.**

On utilise l'amplificateur opérationnel dans son régime linéaire de fonctionnement.
Dans ce cas, on a les propriétés suivantes :

- Les courants d'entrée i+ et i- sont nuls.
- La tension différentielle $\varepsilon = u_{BA}$ est nulle.

Expression des tensions dans le montage :

$u_e = u_{AD} = u_{AB} + u_{BD} = 0 + R_0.\, i'$

$u_{SA} = R_1.i = u_{SB} + u_{BA} = R_1.i' + 0$ donc $R_1.i = R_1.i'$ d'où $i = i'$

On peut alors en déduire que $\mathbf{u_e = R_0 \,.\, i}$
Le montage constitue bien la source recherchée à condition de donner à R_0 la valeur R' du dipôle RLC.
R' correspond à la résistance du résistor à laquelle s'ajoute la résistance interne de la bobine : $R' = R + r$.