Chapitre 1 : Rappels mathématiques

I. Puissances

1) Puissances entières

Soit a, un nombre réel et n un entier, on définit
$a^n = a \times a \times a \ldots\ldots \times a$ n facteurs

Remarque :

$a^1 = a$
$a^0 = 1$ (pour $n \neq 0$)
On définit a^n pour $n \in \mathbb{Z}$

Exemple : calculer 2^5, 3^4

Propriétés :

- $a^n \times a^p = a^{n+p}$
- $a^n \times b^n = (ab)^n$
- $(a^n)^p = a^{np}$

2) Racine $n^{ième}$ et puissance fractionnaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on appelle racine $n^{ième}$ de x, l'unique réel positif a tel que $a^n = x$
on écrit $a = x^{1/n}$
pour $x > 0$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, on note $x^{p/q} = x^{(1/q)\,p}$

Exemple : $4^{1/2} = 2$
$27^{1/3} = 3$

II. Logarithme népérien, logarithme décimal

1) Logarithme népérien

Définition : on appelle logarithme népérien notée (ln), la fonction définie par :

$$X \longrightarrow \ln x \text{ pour } x > 0$$

Elle est telle que : $a > b \Longrightarrow \ln a > \ln b$

$$a = b \Longrightarrow \ln a = \ln b$$

Propriétés :

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^r) = r\ln a$

Exemple : déterminer n tel que $(1.06)^n = 1.5$
En écrivant que les ln des 2 membres de l'égalité sont égaux, in obtient :

$(1.06)^n = 1.5 \iff n \times \ln a = \ln (1.05)$

$$n = \frac{\ln (1.5)}{\ln (1.06)} = 7$$

2) Logarithme décimal

Définition : on appelle fonction logarithme décimal notée Log, la fonction définie par :

$x \longrightarrow \text{Log } x$ pour $x > 0$

Propriétés : mêmes propriétés que ln

III. Exponentielle

Définition : on appelle fonction exponentielle notée e^x, la fonction définie par :

$x \longrightarrow e^x$ pour $x \in R$

Elle est telle que $\ln e^x = x$ pour tout x et $e^{\ln x} = x$ pour $x > 0$

Propriétés :

- $e^n \times e^p = e^{n+p}$
- $e^n / e^p = e^{n-p}$
- $(e^n)^r = e^{nr}$ pour tout r rationnel,

IV. Suites numériques

a) Suites arithmétiques

Définition : on dit qu'une suite $(U_n)_{n \in N}$ est une suite arithmétique s'il existe un réel r tel que : pour tout $n \in N$ $U_{n+1} = U_n + r$
Le réel r est la raison de la suite

Exemple : $U_{n+1} = U_n + 2$
$U_{n+1} = U_n - 3$
$U_{n+1} = U_n + 1/3$

Remarque : pour vérifier qu'une suite $(U_n)_{n \in N}$ est une suite arithmétique il suffit de vérifier que $U_{n+1} - U_n$ ne dépend pas de n.
Pour tout $n \in N$ on a :

$$\boxed{U_n = U_o + nr \quad \text{ou encore} \quad U_n = U_1 + (n-1)r}$$

Somme des n premier termes d'une suite arithmétique

$$U_o + U_1 + \dots\dots\dots + U_{n-1} = \frac{n \times (U_o + U_{n-1})}{2}$$

Exemple: $U_o = 2$, $r = 3$

Calculer

$$U_o + U_1 + \dots\dots\dots + U_9 = \frac{10 \times (2 + 29)}{2} = 155$$

a) <u>Suites géométriques</u>

<u>Définition</u>: on dit qu'une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique s'il existe un réel $q \neq 0$ tel que : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_{n+1} = q \times U_n$
Le réel q est la raison de la suite

Exemple : $U_{n+1} = 2\, U_n$
$U_{n+1} = 1/3.\, U_n$

Remarque : pour vérifier qu'une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique, il suffit de vérifier que le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ ne dépend pas de n

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique

$$U_o + U_1 + \dots\dots\dots + U_{n-1} = U_o \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

EXERCICES

Exo1 Simplifier les nombres suivants :

$A = 3^{5} \times 3^{-8} \times 5^{4} \times 5^{7} \times 5^{-10}$ 	$D = (16)^{1/4} \times (64)^{1/4}$

$B = 3^{2} \times 5^{2} \times 7^{-4} \times 7^{-3} \times 15^{2}$ 	$E = (125)^{2/3} \times (27)^{4/3}$

$C = (125)^{1/3} \times (64)^{1/2}$

Exo2 Déterminer i tel que:

a) $(1 + i)^{4} = 1.08$
b) $(1 + i)^{3} = 1.23$
c) $(1 + i)^{7/2} = 1.44$
d) $(1 + i)^{5/4} = 1.3$

Exo3 Déterminer n tel que :

e) $(1.06)^{n} = 2.26$
f) $(1.052)^{n} = 1.5$
g) $24\,000\,(1.052)^{n-1} = 36\,360\,(1.04)^{n-1}$

Exo4 Soit P_0 la population d'une ville en 1992, P_1 en 1993 et P_n en (1992 + n)
On donne P_0 = 30 000 hbts

1er cas : supposons que l'accroissement annuel de cette population est constant et égal à 1 500

a) calculer P_1, P_2, P_3 puis montrer que la suite (P_n) est une suite arithmétique.
b) exprimer P_n en fonction de n au bout de combien d'année cette population double t-elle ?

2ème cas supposons que le taux d'accroissement annuel de cette population est contant et égal à 3%.
Calculer P_1, P_2, P_3 puis montrer que la suite (P_n) est une suite géométrique.

c) Exprimer P_n en fonction de n. Au bout de combien d'années cette population triple t-elle ?

Application : la population de la ville Keur Ndiaye est passée de 320 000 hbts en 1992 à 332 0000 hbts en 1999.
Estimer la population de cette ville en 1997 dans chacune des trois hypothèses :

1) l'accroissement annuel est constant sur la période 1992 – 1999
2) le taux d'accroissement annuel est constant sur la période 1992 –1999
3) l'accroissement annuel de cette population est contant et égal à 1500 sur la période 1992 – 1995 et le taux d'accroissement annuel est constant sur la période 1995 – 1999

Chapitre 2 : Intérêts simples – Escomptes

I. Intérêts simples

1) Généralités

Les opérations financières qui concernent le commerce de l'argent sont essentiellement fondées sur la notion de prêt ou d'emprunt, nées de l'engagement pris par un débiteur (l'emprunteur) de rembourser à terme une somme d'argent (le capital) à son créancier (le préteur) ;
Le service rendu par le préteur à l'emprunteur (mise à sa disposition d'un capital pendant un certain temps) est rémunéré sous la forme d'intérêts, sommes d'argent versées par l'emprunteur au prêteur. L'intérêt constitue donc le loyer de l'argent prêté ;
Le mode de calcul et paiement des intérêts varie selon les clauses du contrat de prêt
Les intérêts simples s'appliquent généralement aux prêts ou placements à court terme (d'une durée inférieure ou égale à un an).

2) Formule générale de l'intérêt simple

A la fin de chaque période, les intérêts ne sont pas incorporés au capital pour le calcul des intérêts de la période suivante :
L'intérêt (I) dépend du capital (C) prêté ou placé, du taux d'intérêt (T) et de la durée (n).

n peut être en jours, mois, années

$$\boxed{I = c \times t \times n}$$

t est le taux annuel pour un franc
Pour le calcul des intérêts, on utilise souvent l'année commerciale (360j) parfois 365 ou 366j (année réelle) suivant les contrats :
Si n est exprimé en j soit n_j, on utilise

$$I = \frac{c \times t \times n_j}{360}$$

Si n est exprimé en mois soit n_m, on utilise

$$I = \frac{c \times t \times n_m}{12}$$

Valeur acquise (v)
On appelle valeur acquise le capital augmenté des intérêts qu'il a produit
V = C + I
Applications
Calculer l'intérêt et la valeur acquise pour chacun des placements suivants :
Capital C = 18620 F taux annuel t = 5.5% pendant 72 j

Capital C = 20500 F taux annuel t = 8% du 7 mars au 14 octobre 99

3) Mode de paiement

Tout dépend également des clauses du contrat qui lie l'emprunteur au prêteur. On distingue :

a) intérêts précomptés

Les intérêts peuvent être payés au moment de la signature du contrat ou de la remise de la somme prêtée.
Exemple un prêt de 1000 frs au taux annuel de 8% pendant un an. Combien l'emprunteur va-t-il recevoir et combien va t-il rembourser
i = c x t x n = 1000 x 0.08 x 1 = 80
Somme à recevoir S = 1000 – 80 = 920
Somme à rembourser S' = 1000

b) intérêts post comptés

L'emprunteur paye les intérêts et le principal à l'échéance
Exemple même énoncé qu'au a)
Somme à revoir S = 1000
Somme à rembourser S' = 1000 + 80 = 1080 F

4) Compte courants d'intérêts

Notion de comptes courants d'intérêts
Un banquier est amené à ouvrir à chacun de ses clients un compte. Ce compte enregistre les opérations faites par le client avec son banquier. Ces opérations alimentent le compte du client, on les appellera opérations de crédit ou si l'on constate des prélèvements sur ce compte, il s'agit alors d'opérations de débit. A la fi d'une certaine période, le total des crédits et le total des débits sont compensés pou donner le solde du compte.
Il peut être convenu entre banquier et titulaire du compte que les opérations porteront intérêt. Le compte sera alors dit « compte courant d'intérêt ».
Le calcul dés intérêts suppose que le banquier et le client ont convenu :

- D'un taux d'intérêt ; ce taux peut être constant ou dépendre du sens du solde du compte, c-a-d le compte soit débiteur ou créditeur.
- D'une date à laquelle le compte sera arrêté et où les intérêts fournis par le compte, en faveur du client ou banquier, seront incorporés au compte.
- D'attacher à chacune des opérations inscrites dans le compte, une date qui sera dite date de valeur de l'opération. Et c'est à partir de cette date de valeur que les intérêts seront décomptés.

Souvent cette date ne correspond pas à la date d'opération car les banquiers ont l'habitude d'avancer ou de reculer ces dates, suivant le sens créditeur ou débiteur de l'opération, d'un jour ou deux (jours de banque).
Nous utiliserons la méthode Hambourgeoise qui consiste :

- A inscrire les opérations en compte dans les colonnes convenables
- A déterminer et à inscrire dans la colonne « solde » et dans la sous colonne « débit » ou « crédit », le solde du compte après chaque opération.
- A affecter à chaque solde le nombre de jour séparant sa date de valeur de la date du solde suivant.

Exemple
Sur le compte bancaire de Mr Sy, ont été enregistrées les opérations suivantes au cours du 2[ème] trimestre 2004.

Date d'opération	Libellé	Débit	Crédit	Date de valeur
01-4-04	Solde créditeur		6418.58	31/3/04
02-5-04	Chèque n° 648	2940		30/4/04
19-5-04	Transfert à l'ext.	20 154.28		18/5/04
14-6-04	Virement		37137.84	15/6/04
21-6-04	Virement		2040	22/6/04

Etablir le relevé de compte au 30/6/04 taux d'intérêt : 12%

II) Escomptes

a)Technique de l'escompte
Un effet de commerce (lettre de change, billet à ordre) constate l'engagement pris par un débiteur de payer à son créancier à une date déterminée une somme d'argent, montant de la dette qu'il a contractée.
Si le créancier a besoin de son argent avant l'échéance stipulée, il cédera l'effet de commerce avec tous les droits qui s'y attachent, à une banque, suivant la technique de l'escompte :
Le banquier escompteur achète l'effet et se substitue au créancier ; le débiteur paiera au banquier le montant de sa dette à l'échéance fixée.
La banque verse par avance au créancier la somme qui lui est due mais avec des intérêts pour le prix du service rendu (commissions).
La somme inscrite sur l'effet de commerce est appelée valeur nominale et la date fixée pour le paiement est appelée échéance.
La valeur actuelle est la différence entre la valeur nominale et l'escompte : c'est la somme remise par le banquier.

b) Calcul de l'escompte commercial
L'escompte commercial est l'intérêt de la valeur nominale V_{nom} de l'effet calculé au taux d'escompte en fonction de la durée qui sépare le jour de la négociation (remise de l'effet à la banque) du jour de l'échéance, l'année financière étant comptée 360 j.

$$E_c = \frac{V_{nom} \times t \times n}{360}$$

Exemple 1: un banquier escompte un effet le 10 avril 1990 de 90 000 payable le 30 août 1990 au taux de 12%.
Calculer l'escompte commercial et la valeur remise par le banquier

$$E_c = \frac{90\,000 \times 0.12 \times 142}{360}$$

$E_c = 4\ 260$ $V_a = 90\ 000 - 4\ 260 = 85\ 740$

c) Les agios d'escompte

Le total des intérêts frais et commissions perçus par une banque en rémunération d'un crédit qu'elle consent constitue les agios. Les agios d'escompte comportent l'escompte proprement dit et des commissions permettent à la banque de récupérer ses frais et de se rétribuer les services qu'elle rend. Généralement sont perçues :

- Une commission d'endos destinée a couvrir les frais d'endossement des effets elle se calcule dans les mêmes conditions que l'escompte.
- Une commission de service dont le montant par effet est fixe.
- Une commission d'acceptation dont le montant est forfaitaire.

Les agios d'escompte hormis la commission de service sont exonérés de TVA ; seule la commission de service est assujettie à la TVA.
La durée en nombre de jours de la date de remise de l'effet à la date d'échéance est augmenté d'un jour.

<u>Application</u> un commerçant négocie le 11 septembre 1989 une traite à échéance le 12 octobre 1989 dont la valeur nominale de 2103.47 taux d'escompte 12.6%,
TVA 18.6%.
Commission de service : 15 F
Calculer l'agio total et combien va t-il percevoir

<u>Résolution</u>
Nombre de jours (19 + 12) + 1 =32 j
Intérêt 2103.47 x 0.12 x 32/360 = 23.56
TVA = 0.186 x 15 = 2.79
Agio ttc = 23.56 + 2.79 + 15 = 41.35
Valeur nette à recevoir = 2103.47 + 41.35 = 2062.12

d) Taux réel d'escompte

Il permet de faire la comparaison entre deux offres de banques différentes et représenter le taux applicable à la valeur nominale pour déterminer la retenue effective du banquier.

$$T_{rl} = \frac{\text{Agio ttc} \times 360}{V_{nom} \times N_r}$$

N_r est le nombre de jours réels

e) Taux de revient pour l'entreprise

Il dépend de la somme effectivement prêtée (à une date bien précise) et de la somme effectivement remboursée (à une date bien déterminée) ;

$$T_{rv} = \frac{\text{Agio ttc} \times 360}{V_{nette} \times N_r}$$

V_{nette} représente la valeur actuelle nette

f) Taux de placement pour le banquier
Il dépend de la somme effectivement prêtée (à une date bien précise) et du gain effectif procuré par l'opération d'escompte.
Ici on utilise l'agioht qui l'intérêt.

$$T_{pl} = \frac{\text{agioht} \times 360}{V_{nette} \times N}$$

Application : un commerçant négocie, le 11 septembre 1989, un effet de valeur nominale 7330.31 F à échéance le 12 octobre 1989. Taux d'escompte : 12.6% compter un jour supplémentaire.
Commission de service : 75 F   TVA : 18,6%

1) Calculer le montant net de l'engagement
2) Calculer le taux réel d'escompte
3) Calculer le taux de placement pour le banquier
4) Calculer le taux de revient pour le commerçant

Résolution
Nombre de jours : (19 + 12) + 1 = 32

$$\text{Escompte} = \frac{7\,330.31 \times 0.126 \times 32}{360}$$

TVA = 0.186 x 75 = 13.95

Agio ttc = 82.09 + 13.95 + 75 = 171.04   Agio ht = 82.09

1) Montant net = 7 330.31 – 171.04 = 7159.27

2) Taux réel d'escompte $= \frac{171.04 \times 360}{7\,330.31 \times 31} = 0.27$ soit 27%

3) Taux de placement $= \frac{82.09 \times 360}{7\,159.31 \times 31} = 0.1331$ soit 13.31%

4) Taux de revient $= \frac{171.04 \times 360}{7\,159.27 \times 31} = 0.2774$ soit 27.74%

EXERCICES

1) intérêts simples

1.1 Compléter le tableau suivant, en calculant les éléments manquants dans chacune de
hypothèses de placement intérêt simples.

Capital	Taux annuel	Durée du placement	Année comptée Pour	Montant des Intérêts simples	Valeur acquise
18 000 F	5%	3 ans	360 jours		
12 345 F	11,20%	135 jours	360 jours		
14 850 F	7,30%	48 jours	360 jours		
14 850 F	7,30%	48 jours	365 jours		
	6%	3 ans	360 jours	2 784,60 F	
	5,25%	198 jours	360 jours	62,37 F	
	3,75%	146 jours	365 jours	93,36 F	
	14,40%	219 jours	360 jours		9 897,16 F
	14,40%	219 jours	365 jours		9 886,24 F
	7,30%	25 jours	365 jours		4 281,30 F
1 520 F		45 jours	360 jours	17,67 F	
5 840 F		23 jours	365 jours	28,52 F	
279 F		2 ans 124 jours	360 jours	65,41 F	
37 850 F		243 jours	360 jours		40 098,29 F
4 307 F		225 jours	365 jours		4 636,22 F
13 680 F	14,65%		360 jours	1 224,74 F	
27 375 F	4,75%		365 jours	327,75 F	
6 570 F	9,90%	35 jours		62,37 F	
27 900 F	$10\frac{1}{16}\%$	128 jours	360 jours		
	$9\frac{1}{4}\%$	104 jours	360 jours	937,95 F	

1.2 Calculer l'intérêt simple produit par chacun des placements suivants (aucune date de valeur ; année comptée pour 360 jours)

- 18 360 F à 7,5% du 16 mai au 12 décembre 1996 ;
- 13 680 F à 8,6% du 11 octobre 1996 au 24 janvier 1997.

1.3 Un capital de 8 120 F est placé à intérêts simples au taux annuel de 7,5%. Le même jour, un capital de 8 200 F est placé à intérêt simple au taux annuel de 4,5%. Au bout de combien de jours auront-ils acquis la même valeur (année comptée pour 360 jours)

1.4 Un capital est placé à intérêt simple pendant 125 jours au taux annuel de 9,60%. Si nous prenons pour base une année 360 jours, puis une année de 365 jours, la différence entre les deux résultats est de 5,80 F.
Déterminer le montant du capital.

2) Escompte

2.1 Le 18 septembre 1992, un effet de commerce de valeur nominale 12 600 F, échéant le 12 octobre 1992, est remis à l'escompte. Taux d'escompte : 10,8%. Compter un jour supplémentaire (jour de banque habituel). Commission de service : 9 F

TVA : 18,60%

1) Calculer le montant net de la négociation.
2) Calculer le taux réel d'escompte
3) Calculer le taux de placement pour le banquier (la commission de service étant considérée comme la récupération de frais réellement engagés).
4) Calculer le taux de revient pour le commerçant.

2.2 Le 14 mars, deux effets de commerce (valeurs nominales : 2 600 F et 9 400 F), échéant le même jour, sont remis à l'escompte.

Taux d'escompte : 11,70%. Compter un jour de banque supplémentaire. Commission de service : 10 F par effet. TVA : 18,60%.

Montant net de la négociation : 11 843.28 F.

Déterminer la date d'échéance des deux effets.

2.3 Le 18 mars, sont remis à l'encaissement trois effets de commerce :

4 600 F au 13 avril ; 7 300 F au 28 avril ; 5 900 f au 7 mai.

Tenir compte d'un jour de banque supplémentaire et d'une commission de service de 10 F par effet. TVA : 18,60%.

Montan net de la négociation : 17 519.92 F.

Déterminer le taux d'escompte.

Chapitre 3 : Les intérêts composés

Pour les opérations financières à long terme (se prolongeant sur plusieurs années), le créancier peut considérer à la fin de chaque période l'intérêt simple fourni par son capital comme un nouveau capital productif d'intérêt.

1) Principes des intérêts composés

Un capital est placé à intérêts composés lorsqu'à la fin de chaque période, l'intérêt simple est systématiquement ajouté au capital initial et aux intérêts simples des périodes précédentes pour déterminer l'intérêt simple produit pendant la période suivante.
Généralement la capitalisation est annuelle mais les parties peuvent convenir d'une capitalisation semestrielle, trimestrielle ou mensuelle.

2) Valeur acquise à intérêts composés

a) Le temps de placement est un nombre entier de périodes

Pour déterminer la valeur acquise par un placement à intérêts composés à la fin d'un certain nombre de périodes, on utilise la formule.

$$\boxed{C_n = C_o (1 + i)^n}$$

C_o le capital initial
i le taux de placement
n le nombre de périodes
C_n la valeur acquise à la fin de la $n^{ième}$ période

NB : il faudra toujours concorder i et n.

Exemple on place une somme de 10 000 frs à intérêt composés pendant trois semestres au taux semestriel de 4% et convenons d'une capitalisation semestrielle.

$C_3 = 10\ 000 \times (1 + 0.04)^3 = 11\ 248.64$
$I_3 = C_3 - C_o = 11\ 248.64 – 10\ 000 = 1248.64$

b) Le temps de placement n'est pas n nombre entier de périodes

Exemple une somme de 18 700 frs est placée à intérêts composés au taux annuel de 6% (capitalisation annuelle).
Quelle est la valeur acquise au bout de 4 ans et 5 mois?

Deux solutions sont possibles: une rationnelle et autre commerciale

i) Solution rationnelle

On calcule d'abord la valeur acquise à intérêts composés en prenant comme période la partie entière puis on replace le tout à intérêt simple pour la partie fractionnaire.

La valeur acquise au bout de 4 ans =18 700* $(1 + 0.06)^4$ = 23 608.32

Intérêts rapportés au bout de 5 mois = 23 608.32× 0.06 ×5/12 = 590.21

La valeur acquise au bout de 4 ans et 5 mois=23 608.31+ 590.21=24 198.53

$C_{4+5/12} = 18\ 700 \times (1+ 0.06)^4 \times (1 + 0.06 \times 5/12)$

Remarque : d'une façon générale, on utilise la formule

$$\boxed{C_{n+p/m} = Co\ (1+i)^{n}\ (1+i \times p/m)}$$

ii) Solution commerciale

Dans la pratique, la solution rationnelle est peu employée au niveau des banques. On lui préfère une solution approchée, fondée sur l'utilisation directe de la formule générale :

$C_n = C_o\ (1+i)^n$ ou n devient un nombre fractionnaire.

$C_{4+5/12} = 18\ 700 \times (1+0.06)^{4+5/12} = 24\ 188.51$

3) Taux proportionnels, taux équivalents

a) Taux proportionnels

Deux taux correspondant à des périodes différentes sont dits proportionnels lorsque leur rapport est égal au rapport de leur période respective.

Annuel	Semestriel	Trimestriel	Mensuel	Journalier	
				Année 360j	Année 365j
T	t/2	t/4	t/12	t/360	t/365

<u>Exemple</u> on a un capital de 1 000 frs placé au taux de 9%.

Déterminer la valeur acquise à intérêt simple au bout d'un an utilisant les taux proportionnels, puis faites de même à intérêts composés.

b) Taux équivalents

A intérêts composés, nous pouvons dés lors déterminer à quel taux semestriel i_s (est franc) faut-il faire le placement précédent pour obtenir au bout d'un an (soit deux semestres) capitalisation semestrielle la même valeur acquise que par capitalisation annuelle.

$1000^* (1+i_s)^2 = 1000^* (1+0.09)^1$

$(1+ i_s)^2 = (1+0.09)^1$

$(1+i_s)=(1+0.09)^{1/2}$

$i_s = (1+0.09)^{1/2} - 1 = 0.04403$

Ce taux de 4.4% est dit taux semestriel équivalent au taux annuel de 9%.

Deux taux correspondants à des périodes de capitalisation différentes sont dits équivalents lorsqu'à intérêts composés, ils donnent, au bout du même temps de placement, à un même capital, la même valeur acquise.

<u>Exemple</u> : taux annuel i_a, trimestriel i_t, mensuel i_m. On a les relations suivantes :

$i_s = (1+i_a)^{1/2} - 1$
$i_t = (1+i_a)^{1/4} - 1$
$i_m = (1+i_a)^{1/12} - 1$
$i_a = 0.09$ $\quad$ $i_s = 0.044$ $\quad$ $i_t = 0.0217$ $\quad$ $i_m = 0.007$

4) Valeur actuelle à intérêts composés

La valeur actuelle est la valeur présente d'un capital qui sera obtenue dans l'avenir.
Actualiser c'est déterminer la valeur actuelle à un taux donné d'une somme payable périodes plus tard les intérêts composés se retranchent de cette somme ;
<u>Exemple</u> quelle somme faut il placée à intérêts composés au taux de 7.5% au bout d 3 ans de pour obtenir une valeur acquise de 20 000.

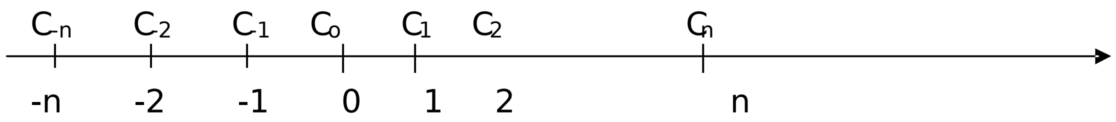
$C_3 = C_o\,(1+0.075)^3 = 20\,000$ $\qquad$ $C_o = 20\,000 / (1+0.075)^3$

$C_o = 20\,000 * (1+0.075)^{-3} = 16\,099.20$ frs

On utilise cette formule suivante pour actualiser :

$$\boxed{C_o = C_n\,(1+i)^{-n}}$$

5) Evaluation d'un capital à une époque quelconque



Si à l'époque 0, on place à intérêts composés un capital C_o, il facile d'évaluer sa valeur acquise après 1, 2, … n périodes de placement, mais également sa valeur actuelle 1 … n périodes avant l'époque 0.

$C_{-n} = C_0(1+i)^{-n}$ (formule d'actualisation)
$C_n = C_0\,(1+i)^n$ (formule de capitalisation)

6) Equivalence de capitaux à intérêts composés

a) Equivalence de deux capitaux

Deux capitaux de valeurs nominales et d'échéances différentes sont équivalents à intérêts composés, à une date déterminée (date d'équivalence), si escomptés à intér composés au même taux et dans les mêmes conditions, ils ont, à cette date, même valeur actuelle.
<u>Exemple</u> : soit un capital de 25 000 frs payable dans 3 ans et un capital 30 250 frs payable dans 5 ans. Taux d'escompte 10%

Valeur actuelle à la date d'équivalence :

1er capital 25 000*$(1.1)^{-3}$ = 18 782.87
2ième capital 30 250*$(1.1)^{-5}$ = 18 782.87

A l'époque 0, les deux capitaux, au taux annuel de 10% ont même valeur actuelle : i
sont équivalents.
Si nous changeons la date d'équivalence, les valeurs actuelles restent inchangées.
Epoque 1 25 000*$(1.1)^{-2}$ = 20661.15 frs
30 250*(1.1)-4 = 20661.15 frs
A intérêts composés, si l'équivalence à un taux donné a lieu une date déterminée, el
lieu au même taux à n'importe quelle autre date ;

b) Equivalence d'un capital à un ensemble de plusieurs capitaux

Un capital est équivalent, à intérêts composés, à une date déterminée, à un ensemb
de plusieurs autres capitaux si la valeur actuelle de ce capital est égal à la somme de
valeurs actuelles des autres capitaux.

<u>Exercice</u> montrer qu'un capital de 50 075 frs payable dans 4 ans est équivalent, à intérêts composés, au taux de 9%, à trois capitaux :
12 000 frs payable dans 2 ans
18 000 frs payable dans 5 ans
25 000 frs payable dans 7 ans

EXERCICES SUR LES INTERÊTS COMPOSÉS

Dans les exercices qui suivent, les placements ou prêts sont effectués à intérêts composés.

Exo1 Calculer la valeur acquise et le montant total des intérêts pour chacun des placements suivants :

Capital	Durée de placement	Taux	Capitalisation
32 600	2 ans	Annuel : 6%	Annuelle
18 700	4 ans	Semestriel : 3.75%	Semestrielle
12 825	5 ans	Trimestriel : 1.5%	Trimestrielle
14 500	2 ans	Mensuel : 0.7%	Mensuelle

Exo2 calculer la valeur acquise et le montant des intérêts pour chacun des placemen
suivants en utilisant la méthode rationnelle, puis la méthode commerciale.

Capital	Durée de placement	Taux	Capitalisation
17 300	2 ans 8 mois	Annuel : 6,9%	Annuelle
25 700	3 ans 5 mois	Semestriel : 4,2%	Semestrielle
12 825	4 ans 2 mois	Trimestriel : 1.5%	Trimestrielle
8 900	31 mois	Mensuel : 4%	Mensuelle

Exo3 montrer qu'on peut remplacer trois règlements : 10 684 frs à 1 an, 12 427 frs à
ans et 15 432 frs à 5 ans par règlement unique de 44 489 frs à 4 ans, l'équivalence
étant assurée au taux annuel de 12.20%.

Exo4 on remplace le remboursement de 5 dettes :
24 820 frs payables dans 1 an   25 210 frs payables dans 2 ans
25 480 frs payables dans 3 ans   26 300 frs payables dans 4 ans
28 900 frs payables dans 5 ans
Par un paiement unique de 118 010 frs. Quelle est l'échéance de ce règlement ? Tau
annuel : 11.20%

Chapitre 4 : Les annuités

A) Généralités

On appelle annuités une suite de versements effectués à intervalles de temps égaux
L'intervalle de temps séparant deux versements consécutifs est la période. Il peut s'agir d'une année, d'un mois, d'un trimestre à condition toutefois de rester constant
Le montant de chaque versement constitue le terme de l'annuité.
En toute rigueur, il serait préférable d'utiliser le terme « annuité » pour des verseme tous les ans et les termes « semestrialités », « trimestrialités » et « mensualités» da les autres cas.
Selon le montant des termes, les annuités peuvent être constantes (termes tous égaux) ou variables (termes différents)

Exemple : les loyers versés par un locataire constituentune suite d'annuités constantes.
Selon le début des termes, les annuités peuvent être :
- de fin de période (ou à terme échu) ; la date d'origine précède d'une période la dat du premier versement qui est donc effectué à la fin de la première période.
- de début de période (ou à terme à échoir) : la date d'origine coïncide avec la date du premier versement qui est donc effectué au début de la première période.

La valeur acquise d'une suite d'annuités est la somme des valeurs acquises de chaque versement.
La valeur actuelle d'une suite d'annuités est la somme des valeurs actuelles de chaque versement.
On suppose que la capitalisation se fait à la fin de chaque période.

B) Objectifs de calcul des annuités

On distingue deux objectifs de l'étude des annuités :

La constitution d'un capital dans le futur en vue d'un investissement

Dans ce cas on utilise la valeur acquise

Le remboursement d'un prêt

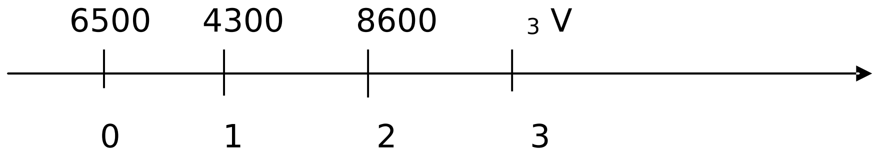
Pour ce cas, on utilise généralement la valeur actuelle.

C) Evaluation, à une date donnée, d'une suite d'annuités variables

L'évaluation, à une date donnée, d'une suite d'annuités variables ne peut être obten qu'en faisant la somme des valeurs calculées séparément à cette date de chacune d annuités, aucune formule ne permette de raccourcir les calculs.

Exemple :

Nous versons, en vue de nous constituer un capital, trois annuités variables :
Le 1er janvier 1995 : 6500 f
Le 1er janvier 1996 : 4300 f
Le 1er janvier1997 : 8600 f
Quelle est la valeur acquise au 1er janvier 1998 au taux de 10% ?
Quelle est la valeur actuelle à la période 0 (date d'équivalence c à d au 1er janvier 1995) ?



$V_3 = 6500 \times (1,1)^3 + 4300 \times (1,1)^2 + 8600 \times (1,1) =$

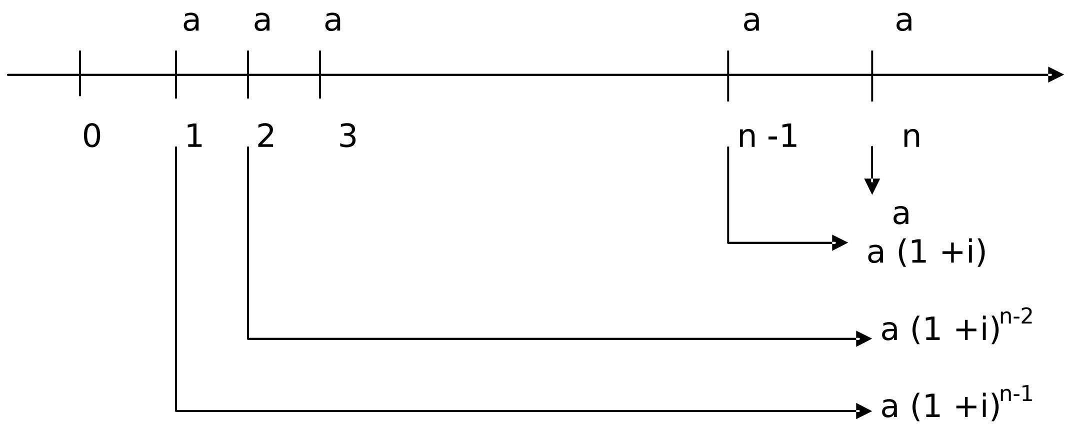
$V_o = 6500 + 4300 \times (1,1)^{-1} + 8600 \times (1,1)^{-2} =$

D) <u>Evaluation, à une date donnée, d'une suite d'annuités constantes</u>

1) <u>Annuités constantes de fin période</u>

a) Valeur acquise V_n

Soit n annuités constantes de montant a et i le taux par franc correspondant à la période de versement.



$$V_n = a + a\,(1 + i) + a\,(1 + i)^2 + \ldots.. + a\,(1 + i)^{n-2} + a(1 + i)^{n-1}$$

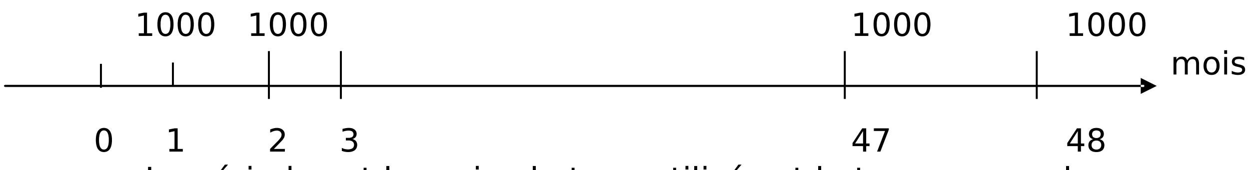
V_n est une suite géométrique de 1^{er} terme a et de raison $q = 1 + i$

$$\text{D'après } S_n = U_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\text{On obtient } V_n = a. \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

<u>Exemple</u> nous plaçons à intérêts composés, chaque mois 1000 F pendant 48 mois. Quel est le montant du capital ainsi constitué au moment du dernier versement ?

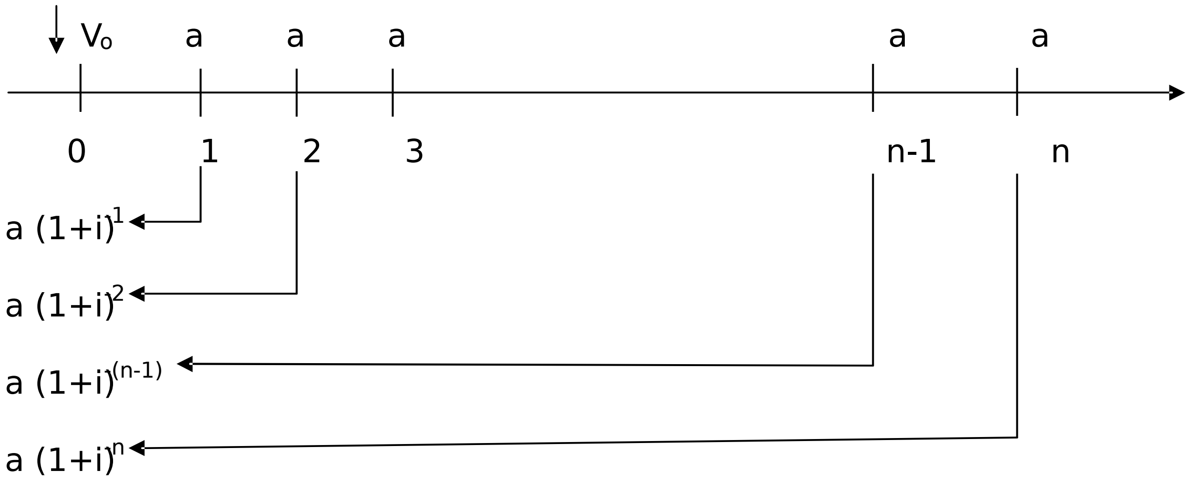
Taux mensuel : 0.6%



La période est le mois ; le taux utilisé est le taux mensuel.

$$V_{48} = 1000 * \frac{(1.006)^{48} - 1}{0.006} = 55\ 435 \text{ F}$$

a) Valeur actuelle V_o



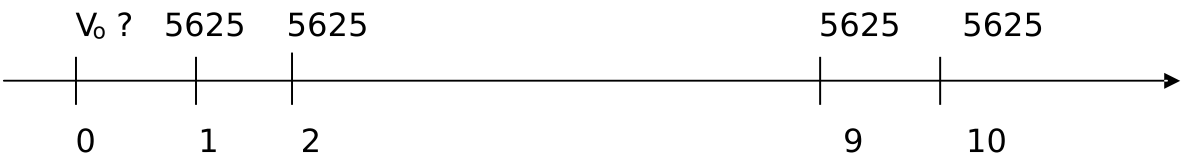
On sait que $V_n = V_o (1 + i)^n \Rightarrow V_o = V_n (1 + i)^{-n}$

Or $V_n = a \times \dfrac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow V_o = a \times \left(\dfrac{(1+i)^n - 1}{i} \right) \times (1+i)^{-n}$

On utilise la formule

$$V_o = a * \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Exemple Quelle somme d'argent pouvons nous emprunter si, d'accord avec le créancier nous nous engageons à rembourser par le paiement de dix « trimestrialités » égales à 56 F chacune, le premier remboursement ayant lieu trois mois après la remise des fonds ? Ta trimestriel : 2.2%

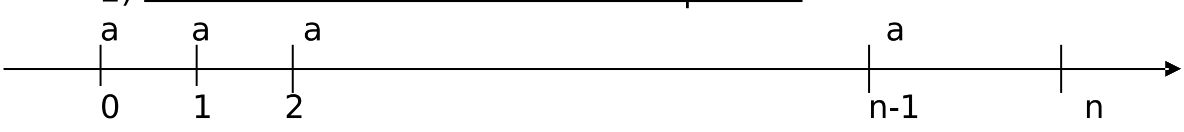


La période est le trimestre; le taux utilisé est le taux trimestriel.

$$V_o = 5\,625 * \frac{1 - (1.022)^{10}}{0.022}$$

V_o = 50 002 soit 50 000 F

2) Annuités constantes en début de période



a) Valeur acquise

La valeur acquise d'une suite d'annuités constantes en début de période est égale à la valeur acquise de fin de période capitalisée d'une période.

$$V_n = a * \frac{(1+i)^n - 1}{i} * (1+i)$$

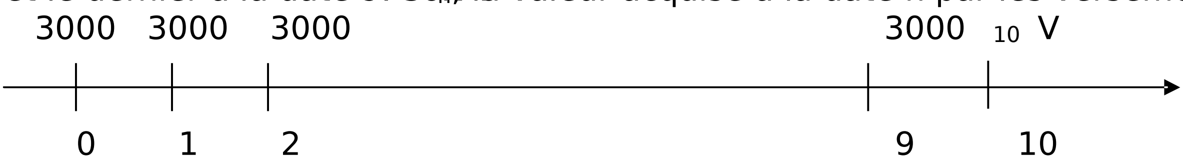
b) Valeur actuelle

La valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes en début de période est égale à la valeur actuelle de fin de période capitalisée d'une période.

$$V_o = a * \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} * (1+i)$$

<u>Exemple</u>: on verse tous les ans du 31 décembre 1999 au 31 décembre 2008 inclus, la somme de 3 000 F sur un compte rémunéré à 4.9%.
De quelle somme disposera-t-on 10 ans après le premier versement ? 11 ans après le premier versement ? 15 ans après le premier versement ?

Corrigé
Prenons le 31 décembre 1999 comme date origine. Le premier versement a lieu à la date et le dernier à la date 9. Soit V_n, la valeur acquise à la date n par les versements effectués.



V_{10} est la valeur acquise par 10 annuités de début de période, d'où:

$$V_{10} = 3000 * \frac{(1.049)^{10} - 1}{0.049} * (1.049) = 39\ 398.36$$

V_{11} est la valeur acquise par V_{10} un an plus tard, d'où :

$V_{11} = V_{10} * 1.049$
$V_{11} = 39\ 398.36 * 1.049 = 41\ 328.88$

V_{15} est la valeur acquise par V_{10}, 5 ans plus tard, d'où :

$V_{15} = V_{10} * (1.049)^5 = 50\ 044.42$
$V_{15} = 39\ 398.36 * (1.049)^5 = 50\ 044.42$

Exercices sur les Annuités

Exo1 calculer dans chacun des cas suivants, la valeur acquise par une suite de versements constants et périodiques, immédiatement après le dernier versement (annuit constantes de fin de période).

a) 18 annuités égales chacune à 12 500 ; taux annuel 9.6%.
b) 12 semestrialités égales chacune à 4 500 ; taux semestriel 4%.
c) 12 semestrialités égales chacune à 4 500 ; taux annuel 8%.
d) 16 trimestrialités égales chacune à 2 800 ; taux trimestriel 2.25%.
e) 16 trimestrialités égales chacune à 2 800 ; taux annuel 9%.
f) 16 trimestrialités égales chacune à 2 800 ; taux semestriel 4.5%.

Exo2 calculer dans chacune des cas suivants, la valeur actuelle une suite de versement constants et périodiques, une période avant le premier versement (annuités constantes de fin de période).

g) 18 annuités égales chacune à 6200 ; taux annuel 9.5%
h) 12 semestrialités égales chacune à 3 500 ; taux semestriel 4.5%.
i) 12 semestrialités égales chacune à 3 500 ; taux annuel 8.7%.
j) 16 semestrialités égales chacune à 4 800 ; taux trimestriel 2.25%.
k) 16 trimestrialités égales chacune à 4 800 ; taux annuel 9%.
l) 16 trimestrialité égales chacune à 4 800 ; taux semestriel 4.5%.

Exo3 8 annuités constantes, capitalisées au taux de 6.8%, donnent une valeur acquise au moment du dernier versement, 100 000 F. Déterminer le montant de l'annuité.

Exo4 combien faut il verser d'annuités de 1 200 F, capitalisées au taux annuel de 6% pou constituer un capital de 10 000 F au moment du dernier versement ?

Exo5 combien faut il verser de mensualités de 1 803.10 F pour rembourser un emprunt d 25 000 F, calculé au taux mensuel de 1%, la premier mensualité étant payée un mois apr la mise à disposition des fonds ?

Exo6 les offres faites à une entreprise pour un terrain mis en vente sont les suivantes :

1) 4 750 000 F payable comptant
2) 6 250 000 F payables dans 5 ans
3) Annuités de 450 000 F (chacune) payable pendant 15 ans, le premier versement ayant lieu immédiatement

Quelle est l'offre la plus avantageuse pour le vendeur (l'entreprise) ? Taux annuel 4%

Chapitre 5 : Les emprunts indivis

I. Généralités

Il existe une grande variété d'emprunts. Nous pouvons les regrouper en deux catégories, selon que l'emprunt s'adresse à un seul ou à plusieurs prêteurs, et distinguer ainsi l'empr indivis, emprunt ordinaire faisant l'objet d'un contrat entre le prêteur et l'emprunteur, de l'emprunt obligatoire émis par une collectivité auprès d'un grand nombre de souscripteur
Les emprunts indivis sont constitués essentiellement par :

- les prêts personnels aux particuliers (achats de biens de consommations durables automobile,meubles ;
- les prêts immobiliers ;
- les crédits à moyen terme (financement d'investissement en matériels, outillages etc.)

Pour chacun des emprunts, les clauses du contrat entre prêteur (créancier) et emprunteur (débiteur) précisent entre autres :

- la durée de mise à disposition des fonds ;
- le taux d'intérêt ;
- les conditions de remboursement du capital emprunté.

II. Relations entre les différents éléments d'un emprunt indivis

Exemple concret

Examinons le tableau d'amortissement d'un emprunt indivis de 50 000 F remboursé en 5 par annuités variables versées en fin d'année ; taux annuel : 8%

Année	Capital restant à amortir au début de l'année	Intérêt payé à la fin de l'année	Amortissement	Montant total de l'annuité à verser en fin d'année
1	50 000	4 000	10 000	14 000
2	40 000	3 200	11 000	14 200
3	29 000	2 320	14 000	16 320
4	15 000	1 200	9 000	10 200
5	6 000	480	6 000	6 480
		11 200	50 000	61 200

L'emprunteur s'engage :

- A payer, à la fin de chaque année, l'intérêt, taux annuel de 8%, du capital emprur et non remboursé ;
- A rembourser, à la fin de chaque année, une partie du capital emprunté. Ce remboursement est appelé amortissement du capital.

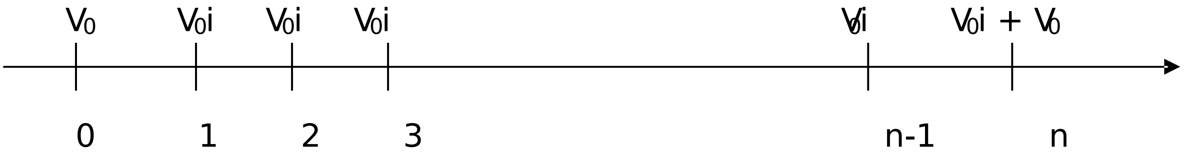
L'annuité à payer, à la fin de chaque année, est donc la somme de l'intérêt et de l'amortissement.
Nous constatons aisément, quelles que soient les modalités de l'amortissement, les relat suivantes :
Relation 1 le montant de l'emprunt est égal à la somme des amortissements.
Relation 2 la dernière annuité est égale au dernier amortissement augmenté de son prop intérêt.

Relation 3 le capital emprunté est égal à la somme des valeurs actuelles des annuités assurant le service de l'emprunt.
Relation 4 le capital dû à la fin d'une période quelconque k est égal à la valeur actuelle de annuités non échues à cette date.
Ces quatre relations sont générales et restent valables quelles que soient les modalités d'amortissement d'un emprunt indivis ;
Nous les utilisons pour étudier successivement les types d'amortissement les plus usités.

III. Etude des systèmes d'emprunts les plus usités

1) Emprunts remboursables en une seule fois (remboursement in fine)

Le capital est payé à la fin du placement et les intérêts à la fin de chaque période c'est un système américain, qui est lourd en terme de décaissement puisque très élevé au mome du paiement pour le débiteur et plus risqué pour le créancier puisque le défaut de paieme est le plus évident.



Ainsi, l'intérêt réglé à la fin de chaque période sera :
$I = V_0 \times i$
Application : soit un emprunt de 100 000F au taux de 6% in fine sur 4 ans. Elaborer le tableau d'amortissement.
$I_k = V_0 \times i = 100\ 0000 \times 0.06 = 6\ 000F$

Période n	Capital restant dû V_k	Intérêt de la période I_k	Amortissement M_k	Annuités a_k
1	100 000	6 000	0	6 000
2	100 000	6 000	0	6 000
3	100 000	6 000	0	6 000
4	100 000	6 000	100 000	106 000

2) Emprunts à amortissements constants

Dans le cas du remboursement par amortissements constants, le capital emprunté V_0 est remboursé par amortissements égaux chacun à :

$$M_k = M = V_0/n$$

Les annuités inégales constituent une progression arithmétique décroissante de raison :
$r = - V_0 \times i/n$

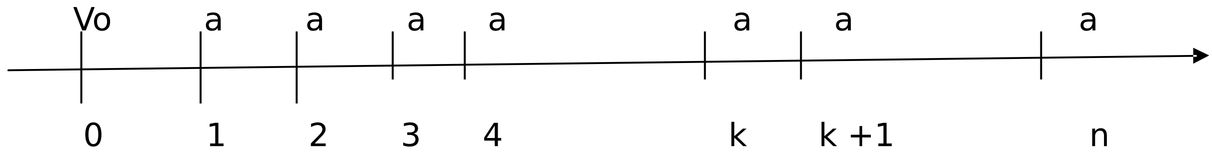
Le premier terme (première annuité) $a_1 = V_0 \times i + V_0/n$

Application : reprenons l'énoncé cité dessus et utilisons le remboursement par amortissement constant. On aura :
Le montant de l'amortissement qui est constant : $M_1 = V_0/n = 100\ 000/4 = 25000$ F
Le montant de la première annuité $a_1 = V_0 \times i + V_0/n = 100\ 000 \times 0.06 + 100\ 000/4$
$= 31\ 000$
Le tableau d'amortissement se présentera sous cette forme en tenant compte des relatio citées ci-dessus à savoir que les annuités sont en progression arithmétique et que les amortissements sont constants.

Période N	Capital restant dû V_k	Intérêt de la période I_k	Amortissement M_k	Annuités a_k
1	100 000	6 000	25 000	31 000
2	75 000	4 500	25 000	29 500
3	50 000	3 000	25 000	28 000
4	25 000	1 500	25 000	26 500
Totaux		15 000	100 000	115 000

3) Emprunts remboursables par annuités constantes

L’emprunteur paie, à la fin de chaque période, une annuité constante. Ce système, pratic par les établissements de crédit pour les prêts aux particuliers, présente l’avantage pour l’emprunteur d’un remboursement par sommes égales à un rythme régulier (la période pouvant être l’année, le semestre, le trimestre ou plus souvent le mois).



En référence à la méthode de calcul de la valeur acquise par une suite d’annuités constar qui représente le montant total remboursé à l’échéance de l’emprunt et composé du capi emprunté et des intérêts. Il ressort les lois suivantes :

1^er^ loi des annuités (Relation 3) : le capital emprunté est égal à la somme des valeurs actuelles des annuités assurant le service de l’emprunt.

$$V_o = a \times \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

2^e^ loi du capital restant (Relation 4) : le capital restant dû à la fin d’une période quelconque k est égal à la valeur actuelle des annuités non échues à cette date.

$$V_o = a \times \frac{1 - (1 + i)^{-(n-k)}}{i}$$

On a également la relation suivante :

Le montant du capital restant dû à la fin d’une période quelconque k est égal au montant capital restant dû à la période k-1 moins l’amortissement M_{k-1}

$$V_k = V_{k-1} - M_{k-1}$$

3^e^ loi des amortissements : dans le système des emprunts par annuités constantes, les amortissements successifs forment une progression géométrique croissante de raison (1+

$$M_{k+1} = M_k (1+i)$$

Cette loi permet :

- De déterminer la valeur du premier amortissement en fonction du montant de l’emprunt ;

$V_o = M_1 + M_2 + \ldots + M_n$

$V_o = M_1 + M_1 (1+i) + M_1 (1+i)^2 + \ldots + M_1 (1+i)^{n-1}$

V_o est la somme d'une suite géométrique de 1[er] terme M_1 et de raison (1+i). On a donc:

$$V_o = M_1 \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

D'où : $$M_1 = V_o \times \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

- De déterminer la valeur d'un amortissement quelconque M_k en fonction du 1[er] amortissement

$$M_k = M_1 (1+i)^{k-1}$$

- De construire le tableau d'amortissement :

La dernière annuité étant formée du dernier amortissement M_k et de l'intérêt de cet amortissement (Relation 2) on donc $M_n \times (1+i) = a$ par suite on a $M_n = a \times (1+i)^{-1}$

Application : construisons le tableau d'amortissement d'un emprunt de 100 000F au taux de 6% remboursables en quatre ans annuités constantes.

La 1[er] loi des annuités $\Rightarrow$ $a = V_o \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 100\,000 \times \frac{0.06}{1-(1.06)^{-4}} = 28\,859.15$

d'où $M_1 = V_o \times \frac{i}{(1+i)^n - 1} = 100\,000 \times \frac{0.06}{(1.06)^4 - 1} = 22\,859.15$

Période N	Capital restant dû V_k	Intérêt de la période I_k	Amortissement M_k	Annuités a_k
1	100 000	6 000	22 859.15	28 859.15
2	77 140.85	4 628.45	24 230.70	28 859.15
3	52 910.15	3 174.61	25 684.54	28 859.15
4	27 225.61	1 633.54	27 225.61	28 859.15
Totaux			100 000	

Exercices sur les emprunts indivis

Exo1 une entreprise emprunte sur 4 ans 200 000F ; elle s'engage à payer au prêteur, à la fin de chaque année, l'intérêt simple de sa dette au taux annuel de 8.5% et à rembourser bloc, à la fin de la quatrième année, le montant de l'emprunt. En même temps, elle se constitue « un fonds d'amortissement » : elle place à la fin de chaque année à intérêts composés au taux de 8.5%, une somme constante telle qu'à l'expiration des 4ans, elle puisse faire face au remboursement du capital emprunté.

1. indiquer le montant des versements à effectuer chaque année au prêteur.
2. dresser le tableau d'amortissement.
3. quelle somme constante l'entreprise doit elle placer chaque année ?

Exo2 Dresser le tableau d'amortissement d'un emprunt indivis de 100 000F, remboursabl en 5 ans, par annuité comportant un amortissement constant , la première annuité échéa un an après la remise des fonds. Taux annuel d'intérêt : 8.25%

Exo3 En combien de semestrialités constantes peut on rembourser un emprunt de 28 000 si l'on dispose d'environ 10 000F par semestre ? Taux annuel : 14.25% (utiliser le taux équivalent).
Dresser le tableau d'amortissement pour la (ou les) solution(s) retenue(s).

Exo4 le premier amortissement d'un emprunt indivis remboursable en 15 annuités constantes (la première annuité échéant un an après), au taux de 9.6% s'élève à 5 132.81
Déterminer le montant de l'annuité.

Exo5 Mr Diop a emprunté le 1er juin 1999 la somme de 40 000F, remboursable sur 10 ans, par mensualités constantes, au taux annuel équivalent de 5.85%.
La première mensualité est versée le 1er juillet 1999

1. calculer le taux mensuel de l'emprunt
2. calculer la mensualité de remboursement
3. déterminer la 65-ième ligne du tableau d'amortissement

Exo6 Madame Sy a effectué un emprunt remboursable par mensualité constantes (la première échéant un an après) dont on sait que :

- l'amortissement contenu dans la 54ième mensualité (M_{54}) est 2 228.29F
- l'amortissement contenu dans la 72ième mensualité (M_{72}) est 2 446.34F
- l'intérêt contenu dans la 60ième mensualité (I_{60}) est 1 058.02F

1. Déterminer le taux d'intérêt mensuel de l'emprunt ;
2. déduisez-en le taux annuel proportionnel et le taux annuel équivalent
3. calculer le montant d'une mensualité et le montant du capital emprunté
4. calculer la durée de l'emprunt

Chapitre 6 : Les emprunts Obligataires

Les obligations sont pour l'essentiel émises par appel public à l'épargne et donc le fa de sociétés cotées ou d'institutions financières ou Etats. L'emprunt obligataire met e rapport un emprunteur et une masse de souscripteurs. Il existe plusieurs types d'obligations.Nous nous arrêtons aux obligationsordinaires. Les emprunts sont caractérisés par les éléments suivants :

La valeur nominale C : valeur qui sert de base au calcul des intérêts,

Le prix de l'émission : c'est le prix payé par le souscripteur. Lorsque l'émission est au pair (le prix d'émission E = C). L'obligation peut être émise au dessus au pair (E »C) a prime d'émission, opération qui vise à conserver un taux nominal attractif, en compensant l'augmentation du coupon par un prix d'émission au dessus du pair. L'émission peut être en dessous (E « C) lorsque le taux d'intérêt proposé est faible.

La prime de remboursement : c'est la différence entre le prix de remboursement et la valeur nominale de l'obligation.

La vie ou durée : c'est le temps compris entre la date de jouissance et la date du dernier remboursement.

La maturité : c'est le temps qui reste à courir aujourd'hui jusqu'au dernier remboursement.

La date de règlement : c'est le jour de règlement du prix d'émission par le souscripteur. Date de jouissance et de règlement ne sont pas toujours identiques.

Le taux nominal ou taux facial : c'est le taux effectif de l'emprunt (brut avant impôt) il tient compte du taux nominal, des frais d'émission,de la valeur de remboursement,des frais d'émission,de la valeur de remboursement,du prix d'émission net (calculé à partir du taux actuariel brut tient compte du crédit d'impôt)

Le taux de placement réel : pour le souscripteur (ou taux de rendement) est celui qui assure l'équivalence entre la somme prêtée et les sommes qu'il a reçu.

Le taux de revient actuariel : est celui qui assure l'équivalence entre la somme nette encaissée par l'émetteur et les sommes que l'émetteur a déboursées tout au long de l'emprunt.

Date de jouissance : Date à laquelle les intérêts commencent à courir.

Valeur de remboursement : Montant par titre en capital remboursé par l'emprunt aux souscripteurs.

Le coupon : Montant des intérêts servis à chaque échéance.

Coupon couru : Montant des intérêts qui courent depuis le dernier versement d'intérêts.

Les types de remboursement utilisés sont :

- Le remboursement in fine ;
- Le remboursement par annuités constantes ;
- Le remboursement par amortissement constant ;

ETUDES DES EMPRUNTS OBLIGATAIRES LES PLUS USITES

Nous retrouvons les mêmes relations que pour les emprunts indivis. Il y a équivalenc intérêts composés entre les sommes prêtées et les sommes remboursées (coupons e amortissements).

Emprunts obligataires remboursables « in fine »

Désignons par v_0 le nombre d’obligations émises
E le prix d’émission d’une obligation
C la valeur nominale d’une obligation
R la valeur remboursement d’une obligation
i le taux nominal (par franc) d’intérêt
L’émetteur reçoit v_0E et verse à l’ensemble des obligations à la fin de chaque année v_0*Ci (montant total des coupons) et, à la fin de l’emprunt, V_0*Ci (coupon de la dernière année) + v_0*R (montant total de remboursement)

Application : soit un emprunt de 20 millions à 10% d’une durée de 5 ans de valeur nominale égale à 10 000F.

$$v_0 = \frac{20\ 000\ 000}{10\ 000} = 2\ 000 \text{ obligations}$$

$I = v_0 * C * i = 2\ 000 * 10\ 000 * 0.1 = 2\ 000\ 000$

Etablir le tableau d’amortissement

Période N	Capital restant dû V_k	Intérêt de la période I_p	Amortissement M_p	Annuités a_p
1	20 000 000	2 000 000	0	2 000 000
2	20 000 000	2 000 000	0	2 000 000
3	20 000 000	2 000 000	0	2 000 000
4	20 000 000	2 000 000	0	2 000 000
5	20 000 000	2 000 000	20 000 000	22 000 000

EMPRUNTS OBLIGATAIRES REMBOURSABLES PAR ANNUITES CONSTANTES

Le raisonnement théorique est le même pour les indivis mais pour la construction d’ tableau d’amortissement, il faut tenir compte de deux particularités :

- il n’est pas possible de fractionner le remboursement d’une obligation on est obligé de rembourser chaque année un nombre entier d’obligations, les annuités ne sont jamais rigoureusement égales.
- les sommes consacrées à l’amortissement sont calculées en fonction du prix remboursement qui peut être supérieur à la valeur nominale (remboursement au dessus du pair).

ETUDE DE LA LOI D’AMORTISSEMENT

Soit $d_1, d_2, \ldots\ldots d_n$ le nombre d’obligations amorties à chacun des tirages successifs V_1, $V_2, \ldots V_{n-1}$ le nombre d’obligations vivantes (encore en circulation après chaque tirage.
Règle : les nombres d’obligations théoriquement amorties forment une progression géométrique de raison

$$\left(1 + \frac{Ci}{R}\right)$$

Comme $v_0 = d_1 + d_2 + \ldots.. + d_n$ On obtient

$$v_0 = d_1 \frac{\left(1 + \frac{Ci}{R}\right)^n - 1}{\left(1 + \frac{Ci}{R}\right)}$$

1e cas : Remboursement au pair R = C

Les nombres d’obligations amorties forment une progression géométrique de raison (1+i) on en déduit facilement

- le nombre d’obligations amorties au premier tirage

$$d_1 = v_0 \times \frac{1}{(1+i)^n - 1}$$

- Le nombre d’obligations amorties au k^e amortie tirage $d_k = d1\,(1+i)^{k-1}$ le montant de l’annuité

$$a = V_o\, C \times \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

Application

Elaborons le tableau d’amortissement d’un emprunt obligataire égal à 10.500 000F, 5 000 obligations amorties sur 5 ans par annuités constantes avec un taux facial de 12%.

La valeur nominale $C = V_o / V_o$ = 12 500 000 / 5000 = 2500F
Le coupon versé sera de Cu = C x i = 2500 x 12% = 300F

$d_1 = V_o \times i / (1+i)^n - 1 = 5000 \times 0{,}12 / (1{,}12)^5 - 1 = 787{,}05F$
Les amortissements théoriques sont en progression géométrique de raison égale à 1
d'où : $d_2 = 881{,}49$; $d_3 = 987{,}27$; $d_4 = 1105{,}75$; $d_5 = 1238{,}44$

Les amortissements théoriques doivent être arrondis. On arrondit à l'entier inférieur on majore d'une unité les amortissements théoriques sur lesquels les parties négligé étaient les plus fortes (plus fortes valeurs aberrantes).
On aura donc les amortissements suivants :

$d_1 = 787$
$d_2 = 882$
$d_3 = 987$
$d_4 = 11056$
$d_5 = 1238$

Il manque deux unités pour atteindre les 5000 obligations, on ajoute une unité à d_2 et d_4.

Le tableau d'amortissement s'établit comme suit :

Période N	Capital Restant dû Vk	Intérêt Ip	Nombre D'oblig. Vivantes Vp	Nombre D'oblig. Amorties Dk	Amortissement Ak	Annuités a
1	12 500 000	1 500 000	5000	787	1 967 500	3 467 500
2	10 532 500	1 263 900	4213	882	2 205 000	3 468 900
3	8 327 500	999 300	3331	987	2 467 500	3 466 800
4	5 860 000	703 200	2344	1106	2 765 500	3 468 200
5	3 095 000	371 400	1238	1238	3 095 000	3 466 400

NB : les annuités seront sensiblement constantes

2e cas : Remboursement au dessus du pair R > C
Les nombres d'obligations amorties forment une progression géométrique de raison

$$\left(1 + \frac{Ci}{R}\right)$$

Nombre d'obligations amorties au premier tirage

$$d_1 = V_o \times \frac{\frac{Ci}{R}}{\left(1 + \frac{ci}{R}\right)^n - 1}$$

$$\text{Montant de l'annuité } a = c \times \frac{- i}{1 - \left(1 + \frac{ci}{R}\right)^{-n}}$$

Application : Reprenons l'application précédente et supposons que le remboursement s'effectue à 2750F.

La valeur nominale $C = _0 / V_0$ = 12 500 000 / 5000 = 2500F

R = 2750F on a un nouveau taux j = C x i/R = 2500 x 12%/2750 = 10,9%

Le coupon versé sera de C_u = C x 1 = 2500 x 12% = 300F

d_1 = x j / $(1+j)^n$ – 1 = 5000 x 0,109/$(1,109)^5$ = 804,30

Les amortissements théoriques sont en progression géométrique de raison égale à 1,109.

D'où d_2 = 892,05 ; d_3 = 989,36 ; d_4 = 1097,29 ; d_5 = 1217.

Les amortissements théoriques seront arrondis. On ajoutera une unité à d_3

Le tableau d'amortissement s'établit comme suit :

Période N	Capital restant dû Vk	Intérêts Ip	Nombre D'obligat. vivantes Vp	Nombre d'obligat. Amorties Dp	Amort. Mk	Remvou. Rk	Annuités a
1	12 500 000	1500000	5000	804	2 010 000	2 211 000	3 711 000
2	10 490 000	1258800	4190	892	2 230 000	2 453 000	3 711 000
3	8 260 000	991 200	3304	990	2 475 000	2 722 500	3 016 750
4	5 785 000	694 200	2314	1097	2 742 500	3 016 750	3 710 950
5	3 042 000	365 100	1217	1217	3 042 500	3 346 750	3 711 850

EMPRUNTS OBLIGATOIRES REMBOURSABLES PAR AMORTISSEMENTS ANNUELS CONSTANTS

Soit un emprunt représenté par V_0 obligations de C francs nominal, remboursables au prix R en n année par série annuelles égales.

Taux nominal d'intérêt : i

Chaque année, on amorti V_0/n obligations

la première annuité comprend : V_0 Ci + $V_0 \dfrac{R}{n}$

Les annuités constituent une progression arithmétique décroissement de raison

$$- \frac{V_0 \, Ci}{R}$$

Exercices sur les emprunts obligataires

Exo1 emprunt de 100000 obligations de 2000 nominal, remboursables au pair par 8 annuités constantes.
Taux nominal : 10.6%
Calculer le nombre d'obligations amorties.

Exo2 un emprunt obligataire présente les caractéristiques suivantes :
Prix d'émission : 95% soit 4750F par obligation
Date de règlement : 11 juillet 88
Durée 10 ans 213 j à compter du règlement
Intérêt : les obligations rapporteront un intérêt annuel de 8.3%, payable le 9 février chaque année. Le premier coupon sera versé le 9 février 89 et sera fixé à 192F.
Amortissement normal : les obligations seront amorties en totalité le 9 février 99 au pair ;
Déterminer le taux de rendement annuel au jour du règlement pour le souscripteur (après prélèvement fiscal ou retenu à la source).

Exo3 construire le tableau d'amortissement d'un emprunt représenté par 60 000 obligations de 5000F nominal remboursable au pair par 7 annuités constantes.
Prix d'émission 100%, soit 5000F par obligation.
Taux nominal d'intérêt : 9.10%
Déterminer le taux effectif de rendement pour un souscripteur qui est remboursé au quatrième tirage (après prélèvement fiscal ou retenu à la source).

Exo4 construire le tableau d'amortissement d'un emprunt représenté par 60 000 obligationsde 5000F nominal, remboursableau dessus du pair par 7 annuités constantes. Prix d'émission : 5000F par obligation.
Prix de remboursement : 5125F par obligation
Taux nominal d'intérêt : 9.10%
Déterminer le taux effectif de rendement pour un souscripteur qui est remboursé au quatrième tirage (taux de rendement annuel avant prélèvement fiscal ou retenu à la source)

Exo5 on met un emprunt de 240 000 obligations 9%, amortissables en 15 ans et remboursables à :

- 2 100f les 5 premières années ;
- 2 100f les 5 années suivantes ;
- 2 100f les 5 premières dernières années ;

Les nombres de titres amortis chaque année sont égaux ;

1) étudier les variations des amortissements et des annuités de cet emprunt
2) établir les lignes 1, 5, 6, 10, 11 du tableau d'amortissement.