UNIVERSITECHARLESDEGAULLE - LILLE III
UFR DE MATHEMATIQUES,
SCIENCES ECONOMIQUES
ET SOCIALES

Deuxi `eme ann´ee de l’IUP IIES

# Gestion de la Production

# Daniel DE WOLF

Villeneuve d’Ascq, F´evrier 2003

# Table des mati `eres

# Chapitre1

# Introduction

## 1.1 Objectifs ducours

**L'objectif ducours**est dedonner une formation debase à**l'approche quantitative** des problèmes de gestion de l'entreprise tels que:

- laplanification delaproduction;
- l'ordonnancement deprojets;
- la gestion desstocks;
- la gestion de la capacité,..

Pour cela, on essayer de développer une **double compétence**:

- La *capacitédeformuler* ces problèmes en des modèles mathématiques: c'est-à-dire, partant de problèmes énoncés de manière littéraire, de les traduire sous formes d'équations mathématiques (cfr section 1.5 àlafindece chapitre).
- La*connaissance d'outils de résolution* de ces problèmes: en effet, une fois le problème formulé, souvent on tombe sur un problème classique (tel celui de la gestion de stock), pourlequel il existe des*méthodes de résolution adaptées*.

Comme **références,** nous utiliserons les livres de Giard [6] et Baglin et al [1] pour tous les modèles classiques de gestion de la production. Pource qui est de la formulation en modèles mathématiques, une très bonne référence est le livre de Williams [17].

## 1.2 Définition de la gestion de production

Pour pouvoir donner une définition de la gestion de production, il faut d'abord définir ce que l'on entend par la production. La **production** consiste en une transformation de *ressources* (humaines ou matérielles) en vue de la création de *biens* ou *services*:

- La *production d'un bien* s'effectue par une succession d'opérations consommant des ressources et transformant les caractéristiques de la matière. Un exemple classique est la production de voitures.
- La *production d'un service* s'effectue par une succession d'opérations consommant des ressources sans qu'il n'y ait nécessairement transformation de matière. Des exemples classiques sont la mise à disposition de produits aux consommateurs (la vente), le traitement de dossier (par un notaire), la maintenance d'équipements.

On peut alors définir la gestion de production comme suit.

**Définition 1.1** *La gestion de la production consiste en la recherche* d'une organisation efficace de la production *des biens et services.*

La gestion de production consiste donc à l'obtention d'un produit donné dont les caractéristiques sont connues en mettant en œuvre un minimum de ressources.
En gestion de production, on considérera, généralement, comme données les *caractéristiques du produit* que sont:

- la *définition du produit*;
- le *processus de fabrication*;
- la *demande à satisfaire*.

Ces trois caractéristiques du produit relèvent des *sciences de l'ingénieur* et de la *gestion commerciale*. Nous verrons cependant au chapitre 7 la gestion de projets qui est souvent utilisée pour optimiser le processus de conception d'un nouveau produit. Nous verrons aussi au chapitre 8 comment optimiser le processus de fabrication.

Les **outils de la gestion de la production** sont un ensemble de *techniques d'analyse et de résolution des problèmes* de manière à *produire au moindre coût*. Nous verrons dans ce cours un certain nombre de problèmes types rencontrés en gestion de production. Pour situer ces différents problèmes entre eux, on classifie souvent les **décisions de gestion** en trois classes:

1. Les **décisions stratégiques:** il s'agit de la formulation de la politique à long terme pour l'entreprise (c'est-à-dire à un horizon de plus de deux ans). Entrent dans ces décisions:
   - la définition du portefeuille d'activités;
   - la définition des ressources stables : aussi bien humaines (engagement, licenciement, préretraite,. ) que matérielles (décisions d'investissement, de cession, de fermeture,... );
2. Les **décisions tactiques:** il s'agit des décisions à moyen terme parmi lesquelles on trouve la planification de la production à 18 mois. Il s'agit de produire au moindre coût pour satisfaire la demande prévisible en s'inscrivant dans le cadre fixé le plan stratégique de l'entreprise (donc à ressources matérielles et humaines connues).
3. les **décisions opérationnelles :** il s'agit des décisions de gestion quotidienne pour faire face à la demande au jour le jour, dans le respect des décisions tactiques. Parmi ces décisions, on trouve:
   - la gestion des stocks;
   - la gestion de la main d'œuvre;
   - la gestion des équipements.

Ces trois classes de décisions de gestion de production se différencient par au moins trois éléments:

1. par **l'horizon de temps** considéré:
   - les décisions *opérationnelles* se prennent au jour le jour;
   - les décisions *tactiques* concernent la planification à 18 mois;
   - les décisions *stratégiques* concernent la planification à long terme.
2. par le **niveau d'agrégation**:
   - les décisions *opérationnelles* se prennent au niveau d'un atelier;
   - les décisions *tactiques* se prennent au niveau d'une usine;
   - les décisions *stratégiques* se prennent au niveau de l'ensemble de l'entreprise.
3. par le **niveau de responsabilité**:
   - les décisions *opérationnelles* sont prises par les agents de maîtrise;
   - les décisions *tactiques* sont prises par les cadres;
   - les décisions *stratégiques* sont prises par la direction générale.

## 1.3 Classification des systèmes productifs

Onpeut classer les**modesd'organisation de la production** en quatre grandes classes:

- l'organisation*ens érie unitaire*;
- l'organisation*en ateliersspécialisés*;
- l'organisation*enligne deproduction*;
- l'organisation*en industries de process*.

Nous examinerons dans chaque cas, le*type de ressources à mettre en œuvre* et le *problèmeprincipal de leurutilisation*.

### 1.3.1 Organisationdetypesérie unitaire

**Définition 1.2** *La production de type "série unitaire" est une production mobilisant sur une* période assez longue l'essentiel des ressources*d'une entreprise pour réaliser un nombre très limitédeprojets.*

Comme **exemples**,onpeut citer la construction denaviresdegrande taille (qui sefont, le plussouvent, en quelques exemplaires), les grandstravauxpublics (tel que le creusement d'untunnel sousla manche ou la construction d'un pont suspendu,... ).

En ce qui concerne les **ressources mobilisées,** on fait le plus souvent appel à un personnel hautement qualifié vulecaractère non répétitif des tâches.

En ce qui concerne le **problème d'ordonnancement,** le problème majeur est *l'arbitrage entre la recherche d'un coût compétitif et le respect desdélais.* En effet, d'une part, les commandes seront rapidement honorées si beaucoup de ressources sont mises en œuvre. Mais, d'autre part, le coût des ressources est généralement croissantavec leur niveau d'utilisation: la location de machines supplémentaires et l'engagement d'intérimaires coûtent généralement plus cher que l'utilisation des ressources propres de l'entreprise. Nous verrons cela en détails au chapitre 7.

Dans les deux cas, **l'ordonnancement des tâches**, c'est-à-dire la détermination de l'ordre d'exécution des tâches) est essentielEn effet, nonseulement l'ordre d'exécution des tâches détermine la date de livraison, mais, comme nous le verrons au chapitre 7, il influence les coûts dans la mesure où une mauvaise coordination s'accompagne souvent de chômage technique pour certaines ressources et du paiement de pénalités pour non respect des délais.

### 1.3.2 Organisation en ateliers spécialisés

**Définition 1.3** *On parle d'organisation en ateliers spécialisés lorsque* tous les équipements assurant une fonction spécialisée *sont réunis en un même lieu.*

Comme **exemple,** on peut citer un atelier d'emboutissage des tôles de voitures ou un atelier de peinture dans une usine d'assemblage automobile.

En ce qui concerne les **ressources mobilisées**, la main d'œuvre est plutôt qualifiée et les équipements sont polyvalents.

En ce qui concerne **le problème de l'organisation efficace des ressources**, deux problèmes principaux sont à considérer:

- Lors de la *conception de l'atelier*, le problème principal est la gestion des coûts de manutention entre les différents postes de travail. Afin de diminuer ces coûts on détermine la meilleure localisation des machines les unes par rapport aux autres dans l'atelier. Ceci fait appel aux méthodes d'agencement dans l'espace (cfr chapitre 8 consacré à la configuration d'un centre de production).
- Lors de la *gestion quotidienne de l'atelier*, le problème principal est de déterminer l'ordre d'exécution des différentes tâches sur une ou plusieurs machines. Nous verrons cela en détails au chapitre 2 consacré à l'ordonnancement en ateliers spécialisés.

### 1.3.3 Organisation en lignes de production

**Définition 1.4** *On parle d'organisation en lignes de production lorsqu'un flux régulier de produits passe d'un poste à l'autre,* l'ordre de passage étant fixé.

Comme **exemple,** on peut citer les lignes d'assemblage d'automobiles.

En ce qui concerne les **ressources mises en œuvre,** les équipements sont généralement très spécialisés. En ce qui concerne **l'organisation efficace des ressources,** le problème majeur consiste en l'*équilibrage de la chaîne:* c'est-à-dire à définir les tâches à réaliser à chaque poste de manière à avoir le même temps de réalisation à chaque poste (cfr chapitre 8). En effet, un mauvais équilibrage de la chaîne entraînera une sous-utilisation des ressources puisque la chaîne tourne à la vitesse de l'élément le plus lent.

Deux autres problèmes sont très importants dans ce mode d'organisation de la production. Il s'agit de: la *fiabilité de la chaîne* (un maillon défectueux et toute la chaîne s'arrête) et de la *fiabilité du système d'informations.*

### 1.3.4 Les industries de process

**Définition 1.5** *On parle d'industries de process lorsque le mode d'organisation est caractérisé par un* flux régulier et important de matières premières destinées à être transformées en matières plus élaborées.

Comme *exemples,* on peut citer la sidérurgie, la pétrochimie, le secteur de la chimie lourde, le secteur agro-alimentaire, etc ...

En ce qui concerne **l'organisation efficace des ressources**, vues l'importance et la régularité de la demande, le problème d'organisation au coût minimum est généralement assez simple. Il peut être résolu par la *programmation linéaire*.

## 1.4 Plan du cours

**Partie I: les décisions opérationnelles.**

- *L'ordonnancement en ateliers spécialisés.*
- *La gestion calendaire de stocks.*
- *La gestion de stocks par point de commande.*

**Partie II: les décisions tactiques.**

- *La planification de la production.*
- *Les techniques de juste à temps.*

**Partie III: les décisions stratégiques.**

- *La gestion de projets.*
- *Conception de centres de production: localisation, choix de la capacité, choix du processus.*

## 1.5 Formulation en modèles mathématiques

Terminons ce chapitre en introduisant la **notion de modèle mathématique**. Par modèle mathématique, on entend la représentation par des équations mathématiques d'un problème de la vie réelle. Nous allons illustrer la construction d'un modèle mathématique sur un exemple très simplifié de **planification de la production** tiré de Williams [17]. Une usine peut produire cinq produits (notés PROD1 à PROD5). La marge bénéficiaire unitaire, c'est-à-dire la différence entre le prix de

| Produit | PROD1 | PROD2 | PROD3 | PROD4 | PROD5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Marge | 550 | 600 | 350 | 400 | 200 |

Tableau 1.1: Profit net par produit

vente et le coût de production d'un produit, est donnée pour chacun des produits au tableau 1.1.

Chaque produit nécessite le passage par *trois étapes* de fabrication. Les temps requis à chaque étape sont donnés *en heures* pour chaque produit au tableau 1.2.

| Produit | PROD1 | PROD2 | PROD3 | PROD4 | PROD5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Étape1 | 12 | 20 | 0 | 25 | 15 |
| Étape2 | 10 | 8 | 16 | 0 | 0 |
| Étape3 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 |

Tableau 1.2: Temps de fabrication (en heures par produit)

Enfin, il faut tenir compte des *ressources en facteurs disponibles* données au tableau 1.3. Les deux premières étapes sont effectuées sur machine tandis que la

| Étape | Ressources en facteurs | heures par jour | jours par semaine |
|---|---|---|---|
| Étape1 | 3 machines | 16 | 6 |
| Étape2 | 2 machines | 16 | 6 |
| Étape3 | 8 personnes | 8 | 6 |

Tableau 1.3: Ressources en facteurs

troisième ne nécessite que l'intervention de main d'œuvre. En ce qui concerne les deux premières étapes, l'usine travaille en deux pauses de huit heures par jour, et ceci, au maximum six jours par semaine. En ce qui concerne la troisième, chaque personne travaille une pause de 8 heures par jour et ceci au maximum 6 jours par semaine.

La **question** que se pose le gestionnaire de l'usine est la suivante. Quelles sont les quantités à fabriquer de chaque produit pour maximiser le profit net?

La **construction d'un modèle** est, en général, une opération en trois étapes:

1. **le choix des variables de décisions**,
2. **l'expression de l'objectif** en fonction de ces variables,

3. **l'expression des contraintes** en fonction de ces variables.

La première étape consiste donc à définir les **variables de décision**.

**Définition 1.6** *On appelle variable de décision toute quantité utile à la résolution du problème dont le modèle détermine la valeur.*

Généralement, elles sont notées par les lettres de la fin de l'alphabet ($x$, $y$, $z$, etc...). Ici, on note simplement par $x_i$, la quantité du produit $i$ fabriquée *par semaine*, $i$ allant de un à cinq.

Une première remarque importante s'impose. Il est fondamental de *bien préciser les unités* selon lesquelles sont exprimées les variables. En effet, l'ordre de grandeur des coefficients de l'objectif et des contraintes dépend de ces unités.

La deuxième étape consiste en la **formulation de l'objectif.**

**Définition 1.7** *L'objectif est la quantité que l'on veut minimiser ou maximiser.*

Ici, il s'agit de la somme des contributions de chacune des productions au profit net de l'usine. Elle s'exprime simplement par:

$$max\ z = 550x_1 + 600x_2 + 350x_3 + 400x_4 + 200x_5$$

La troisième étape consiste en la **formulation des contraintes**.

**Définition 1.8** *Les contraintes sont toutes les relations entre les variables qui limitent les valeurs possibles que peuvent prendre ces variables.*

Ici, il y a trois contraintes:

- La première concerne la *limite d'utilisation des machines à l'étape 1.* Il y a trois machines, utilisées en deux pauses de huit heures et ceci au maximum six jours par semaine, ce qui donne un nombre maximum d'heures par semaine[1] :

  $$3 \times (2 \times 8) \times 6 = 288 \text{ heures disponibles.}$$

  Une unité de produit 1 demande 12 heures sur machine à l'étape 1. Si $x_1$ unités de produit 1 sont produites par semaine, cela demande $12x_1$ heures sur la machine 1. Par un raisonnement semblable pour les autres produits, on obtient finalement la contrainte:

  $$12x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 25x_4 + 15x_5 \leq 288.$$

[1] Remarquez ici l'importance d'avoir précisé que les quantités produites l'étaient par semaine.

- La deuxième contrainte concerne la *limite d'utilisation des machines à la deuxième étape.* Le nombre maximum d'heures d'utilisation vaut:

$$2 \times (2 \times 8) \times 6 = 192 \text{ heures},$$

et la contrainte s'exprime comme:

$$10x_1 + 8x_2 + 16x_3 + 0x_4 + 0x_5 \leq 192.$$

- La troisième contrainte concerne la *limite d'utilisation du personnel à la troisième étape.* Le nombre maximum d'heures prestées en une semaine par les 8 personnes est de:

$$8 \times (1 \times 8) \times 6 = 384 \text{ heures}.$$

Et donc la contrainte s'exprime comme:

$$20x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 20x_5 \leq 384.$$

- Enfin, il ne faut pas oublier les contraintes, presque toujours présentes, disant que l'on ne peut pas produire des quantités négatives:

$$x_1, x_2, \ldots x_5 \geq 0.$$

Enfin, généralement on conclut l'étape de construction du modèle, en regroupant l'objectif et les contraintes. On obtient le **programme mathématique** suivant:

$$\max z = 550x_1 + 600x_2 + 350x_3 + 400x_4 + 200x_5$$
$$\text{s.c.q.} \left\{ \begin{array}{rrrrrrl} 12x_1 & +20x_2 & +0x_3 & +25x_4 & +15x_5 & \leq & 288 \\ 10x_1 & +8x_2 & +16x_3 & +0x_4 & +0x_5 & \leq & 192 \\ 20x_1 & +20x_2 & +20x_3 & +20x_4 & +20x_5 & \leq & 384 \\ x_1 & ,x_2 & ,x_3 & ,x_4 & ,x_5 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Remarquons qu'il s'agit d'un **programme linéaire** car il n'y pas de terme du type $x_1^2$ ou $x_1x_2$ qui rendraient le *problème non linéaire*. Remarquons également que si les quantités produites avaient dû être entières (par exemple, la production d'avions), on aurait eu un *programme en nombres entiers.*

## 1.6 Exercices de formulation

Pour chacun des énoncés qui suivent, on demande de formuler mathématiquement le problème (choix des variables, expression de l'objectif et des contraintes).

1.1. **Un problème de choix d'investissements.** Un épargnant veut investir 1000 euros. Il a le choix entre trois investissements possibles: $A$, $B$ et $C$. Les valeurs attendues et les valeurs minimales garanties après un an sont données au tableau 1.4 par euro investi. L'épargnant souhaite un intérêt mi-

| Type d'investissement | valeur attendue | valeur garantie |
|---|---|---|
| $A$ | 1,4 | 0,9 |
| $B$ | 1,2 | 1,2 |
| $C$ | 1,6 | 0,5 |

Tableau 1.4: Valeurs attendue et minimum garantie.

nimum garanti de 5% sur un an. Cependant, il a promis d'investir au moins 600 euros sur $B$ et $C$ ensemble. Comment l'épargnant pourrait-il répartir son investissement pour maximiser la valeur attendue globale après un an? On suppose que l'investisseur utilise toute la somme disponible.

1.2. **Un problème de chargement d'un haut fourneau.** Une fonderie reçoit une commande de 1000 tonnes d'acier. Cet acier doit répondre aux caractéristiques suivantes: il doit contenir au moins 0,45 % de manganèse (Mn) tandis que son pourcentage en silicium (Si) doit se situer entre 3,25 et 5,50. Pour couler cet acier, la fonderie dispose en quantités illimitées de trois types de minerais: A, B et C. Leurs teneurs en Si et Mn sont reprises au tableau 1.5. Le procédé de production est tel qu'une addition directe

| Minerai | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Si | 4% | 1% | 0,6% |
| Mn | 0,45 % | 0,5% | 0,4% |

Tableau 1.5: Teneurs en Silicium et Manganèse des différents minerais.

de manganèse est envisageable. Ce manganèse est disponible au prix de 8 millions la tonne. Les minerais coûtent respectivement 21 millions les mille tonnes pour le type A, 25 millions par mille tonnes pour B, et 15 millions par mille tonnes pour C. Si la fonderie envisage de vendre l'acier produit 450 millions les mille tonnes, quel doit être son plan de production pour maximiser son profit, sachant que le coût de fonte de mille tonnes de minerai est de 5 millions ? Le coût de fonte ne s'applique pas au manganèse ajouté.

1.3. **Un problème de planification sur coût variable.** Un industriel cherche à établir son plan de production pour les quatre mois à venir, sachant que les demandes sont déjà connues et se chiffrent à 900, 1100, 1700 et 1300 articles, respectivement. En régime normal, la capacité de production est de 1200 articles par mois. A l'aide d'heures supplémentaires, ce niveau peut être élevé jusqu'à 400 articles en plus, mais il faut compter, dans ce cas, un surcoût de 7 euros par article. La situation est telle qu'il peut se permettre en régime normal de produire moins de 1200 articles par mois. Cela n'aura aucune incidence sur les coûts de production, ceux-ci étant fixes en régime normal, mais l'effet sur les coûts de stockage peut être bénéfique. Les coûts de stockage sont de 3 euros par article en stock en fin de mois. Comment l'industriel doit-il planifier sa production pour minimiser les coûts variables, c'est-à-dire les coûts occasionnés par les heures supplémentaires et le stockage?

1.4. **Affectation d'avions à des lignes aériennes.** Une compagnie aérienne régionale désire affecter sa flotte d'avions aux 4 lignes qu'elle exploite (lignes A, B, C et D). Le nombre de passagers désirant effectuer chaque jour un parcours sur chaque ligne est donné au tableau 1.6. La compagnie dispose de deux types d'avions: 8 petits avions de 40 places et 3 avions moyens de 180 places. Les avions, qu'ils soient du modèle petit ou moyen, peuvent effectuer un trajet aller-retour par jour. Le coût d'exploitation journalier d'un avion dépend de sa taille et de la ligne à laquelle il est affecté. Ces coûts sont donnés au au tableau 1.6. On désire minimiser le coût d'exploitation

| Ligne | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| Demande | 100 | 200 | 150 | 300 |
| Coût d'un petit avion | 40 | 30 | 70 | 40 |
| Coût d'un moyen avion | 200 | 100 | 300 | 350 |

Tableau 1.6: Demande et coûts d'exploitation des avions par ligne

en satisfaisant la demande.

(a) Formulez mathématiquement le problème de la meilleure affectation de la flotte de cette compagnie.

(b) Vos variables peuvent-elles prendre toutes les valeurs réelles non négatives?

1.5. **Production de denrées périssables.** Une compagnie produit 2 denrées périssables, P et Q, qui sont acheminées, chaque soir, chez le grossiste. Pour le transport, la compagnie dispose d'une camionnette dont la capacité permet d'acheminer 2000 kg par jour. Lorsque la production quotidienne excède cette quantité, la compagnie fait appel à un transporteur indépendant. Le coût de transport est de 2 EURO par kg avec la camionnette propre, tandis que le transporteur indépendant demande 3 EURO par kg. La marge bénéficiaire, hors coût de transport, est 42 EURO par unité de P et 48 EURO l'unité de Q. Les produits P et Q sont fabriqués à partir de 2 composantes M et N selon les proportions présentées au tableau 1.7. Considérons une journée où la

| Produit | Poids de M (kg par unité) | Poids de N (kg par unité) | Poids total (kg par unité) |
|---|---|---|---|
| P | 4 | 3 | 7 |
| Q | 2 | 1 | 3 |

Tableau 1.7: Composition des produits

compagnie dispose de 3 200 kg de M et de 2 400 kg de N.

Formuler le problème sachant que la compagnie cherche à maximiser son profit net.

1.6. **Ajout d'un nouveau produit à la gamme.** Une société envisage l'ajout d'un nouveau produit à sa gamme. Deux modèles du nouveau produit ont été analysés : le modèle standard et le modèle de luxe. Le modèle standard peut se fabriquer dans n'importe lequel des 3 ateliers (A, B ou C) de la société. Une unité de modèle standard requiert en main d'œuvre soit 5 heures dans l'atelier A, soit 4 heures dans l'atelier B, soit 5 heures dans C. Quant au modèle de luxe, l'atelier A ne dispose pas de l'équipement nécessaire et sa fabrication devra être confiée aux ateliers B et C. Une unité du modèle de luxe requiert en main d'œuvre 5 heures dans l'atelier B, ou 8 heures dans C. Les capacités disponibles sont de 2 000 heures pour l'atelier A, 8000 heures pour B et 4 000 heures pour C. Le salaire horaire versé aux ouvriers est de 11,50 $ dans l'atelier A, de 13 $ dans B et de 12 $ dans C. Le coût des matériaux est évalué à 10 $ pour l'unité du modèle standard et à 15 $ pour le modèle de luxe. L'entreprise se propose de vendre le modèle standard à 135 $ l'unité et le modèle de luxe à 145 $ l'unité. Le service marketing estime qu'on ne peut espérer vendre plus de 2 500 unités du modèle standard ni plus de 1 000 unités du modèle de luxe.

Formuler le problème correspondant à la maximisation du profit découlant du lancement de ce produit.

# PartieI

# Les d ´ecisions op ´erationnelles

# Chapitre 2

# Ordonnancement en ateliers spécialisés

## 2.1 Introduction

Rappelons qu'on parle d'ateliers spécialisés lorsque l'ensemble des équipements nécessaires pour assurer une fonction déterminée sont rassemblés dans un même atelier. Le **problème de gestion quotidienne** est de déterminer *l'ordre d'exécution* d'un certain nombre de tâches, la réalisation d'une tâche nécessitant le passage sur une ou plusieurs machines.

Par **exemple,** l'emboutissage de plusieurs types de portières de voitures demande le passage sur une même presse, l'ordre de passage des différents types de portières sur la presse n'étant pas déterminé à l'avance.

Parmi les modèles d'ordonnancement en ateliers spécialisés, on distingue

- **Les modèles statiques** pour lesquels on recherche l'ordonnancement optimal d'un ensemble donné de tâches sur une période donnée : autrement dit, au cours de la période considérée, aucune nouvelle tâche non prévue ne peut être prise en compte dans l'ordonnancement;
- **Les modèles dynamiques** d'ordonnancement qui se caractérisent par des arrivées successives de tâches, le plus souvent dans un univers aléatoire.

Dans ce chapitre, nous allons nous limiter aux modèles statiques et voir successivement le problème d'ordonnancement sur 1 machine, sur 2 machines. Enfin, nous verrons la généralisation au problème sur $m$ machines dont la résolution demande le recours à la programmation en nombres entiers.

## 2.2 Ordonnancement sur une machine

Illustrons le problème sur l'exemple suivant tiré de Giard [6]. On a cinq tâches à effectuer sur la machine A. Le tableau 2.1 présente les différentes tâches ainsi que leurs temps opératoires. Il s'agit de déterminer l'ordre dans lequel on va

| Tâche ($i$) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Temps opératoire ($t_i$) | 50 | 150 | 80 | 200 | 30 |

Tableau 2.1: Temps opératoires (en centièmes d'heures)

effectuer ces différentes tâches. Il est clair que, quel que soit l'ordre choisi, le temps opératoire total est le même : il s'agit de la somme des temps opératoires. Il faudra donc définir un autre critère entre tous les ordonnancements possibles. Un ordonnancement possible est illustré à la table 2.2.

| Ordre ($j$) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Tâche programmée ($i$) | 3 | 4 | 1 | 5 | 2 |
| Temps d'exécution ($T_j$) | 80 | 200 | 50 | 30 | 150 |

Tableau 2.2: Un ordonnancement possible

### 2.2.1 Le diagramme de Gantt

Illustrons tout d'abord une technique de visualisation d'un ordonnancement, **le graphique de Gantt.** Celui-ci est construit à la figure 2.1 pour l'ordonnancement

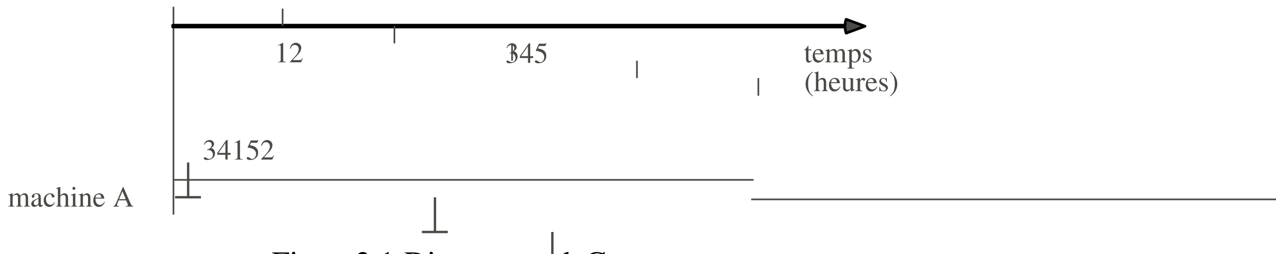


Figure 2.1: Diagramme de Gantt

du tableau 2.2. Le diagramme de Gantt permet de visualiser à la fois :

- l'utilisation des moyens productifs ;
- l'avancement de l'exécution des tâches.

En effet, une ligne horizontale illustre l'évolution du temps. Ensuite, pour chaque moyen productif (ici, il y a seulement la machine A), on trace une ligne horizontale en dessous de la ligne du temps. Chaque tâche à effectuer sur la machine est représentée *par un segment dont la longueur est proportionnelle à la durée d'exécution de la tâche.* On indiquera le numéro de la tâche au dessus du segment tandis qu'une machine au repos est indiquée par un Z.

Si l'on veille à aligner verticalement l'origine du temps pour chaque machine, une ligne verticale indique donc à tout moment à quelle tâche est occupée chacune des machines. Un tableau mural peut être ainsi d'un grand recours pour les agents de maîtrise responsable de l'affectation des moyens humains et matériels.

### 2.2.2 La règle T.O.M.

Comme nous l'avons indiqué plus haut, tous les ordonnancements possibles conduisent au même temps total d'exécution des tâches. Dans l'exemple, l'exécution des 5 tâches nécessite 510 centièmes d'heure. La question qui se pose est alors : comment choisir parmi les $n!$ ordonnancements possibles?

Notons $A_j$ le temps d'achèvement de la tâche programmée en position $j$. Le temps d'achèvement d'une tâche est la somme des temps d'exécution de la tâche avec ceux des tâches précédentes. Par exemple,

$$A_4 = \sum_{h=1}^{4} T_h = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

Le calcul des différents temps d'achèvement des tâches est repris au tableau 2.3.

| Ordre ($j$) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $T_j$ | 80 | 200 | 50 | 30 | 150 |
| $A_j$ | 80 | 280 | 330 | 360 | 510 |

Tableau 2.3: Temps d'achèvement des tâches

Le **temps d'achèvement moyen** vaut alors:

$$\bar{A} = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{n} A_j = \frac{80+280+330+360+510}{5} = 312$$

En général:

$$\bar{A} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} A_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{h=1}^{j} T_h\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} T_j (n+1-j)$$

Il s'agit donc d'une somme pondérée des temps opératoires, chaque temps opératoire étant pondéré par un facteur d'autant plus grand qu'il se trouve exécuté plus tôt dans l'ordonnancement. La règle d'ordonnancement qui minimise le temps d'achèvement moyen est celle du **temps opératoire minimum** : il s'agit *d'exécuter les tâches par ordre croissant de durée :*

$$T_1 \leq T_2 \leq \ldots \leq T_j \leq \ldots \leq T_n$$

L'application de cette règle donne l'ordonnancement illustré au tableau 2.4. Cette application donne le temps d'achèvement moyen minimum :

$$\bar{A} = 218$$

| Ordre ($j$) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Tâches ($i$) | 5 | 1 | 3 | 2 | 4 |
| $T_j$ | 30 | 50 | 80 | 150 | 200 |
| $A_j$ | 30 | 80 | 160 | 310 | 510 |

Tableau 2.4: Application de la règle TOM

On peut montrer que la règle T.O.M. revient à *minimiser le retard moyen*, le retard d'une tâche étant la différence entre le moment où la tâche est terminée et celui où elle aurait été terminée si l'on l'avait commencée en premier lieu.

## 2.3 Ordonnancement avec deux centres de production

Chaque tâche nécessite pour son exécution le passage sur deux machines : les machines A et B. Soient $t_{iA}$ et $t_{iB}$, les temps d'exécution de la tâche $i$ sur les machines A et B respectivement. On va utiliser comme critère d'ordonnancement la *minimisation du temps total d'exécution des tâches* sur les deux machines. On va distinguer deux cas :

- le cas où toutes les tâches sont à exécuter sur A puis B ;
- le cas où toutes les tâches n'ont pas le même ordre de passage sur les deux machines.

### 2.3.1 Cas où toutes les tâches sont à exécuter sur A puis B

Supposons donc que cinq tâches soient à exécuter sur les machines A puis B. Les temps opératoires (en centièmes d'heure) sont repris au tableau 2.5.

| Tâches( $i$) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $t_{iA}$ | 50 | 150 | 80 | 200 | 30 |
| $t_{iB}$ | 60 | 50 | 150 | 70 | 200 |

Tableau2.5:Ordonnancementsurdeuxmachines

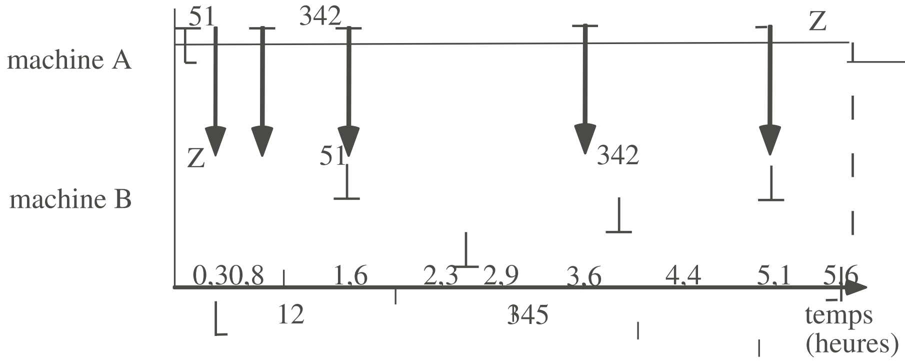


Figure2.2:DiagrammedeGantt

L'ordonnancementoptimalestillustré à lafigure2.2. Remarquezquedurant l'exécutiondelapremièretâchesurA, lamachineBdort. Onadoncintérêt à mettreentêtelatâchedetemps $t_{iA}$ leplusfaible. Defaçonsimilaire, lorsde l'exécutiondeladernièretâchesurlamachineB,lamachineAdort. Onadonc intérêtàmettreenfinlatâchededuréed'exécution $t_{iB}$ minimum.

Ensebasantsurcesdeuxobservations,**l'algorithmeJohnson**(1954)calcule l'ordonnancementminimisantletempstotald'exécutiondestâches:

1. Rechercherlatâche $i$ detempsd'exécution $t_{im}$ minimum.
2. Si $m=A$ ,placercettetâcheàlapremièreplacedisponible;
   Si $m=B$ ,placercettetâcheàladernièreplacedisponible.
3. Supprimerlatâche $i$ destâchesencoreàprogrammer,retouren1.

Appliquonsceci àl'exemple. D'abord, latâche5( $t_{5A}=30$ )est miseen premièreposition. Puis,latâche1( $t_{1A}=50$)estmiseendeuxièmeposition. Puis latâche2( $t_{2B}=50$)estmiseendernièreposition. Puislatâche4( $t_{2B}=70$) estmiseenavantdernièreposition. Enfin,latâche3estmiseàladernièreplace disponible.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 3 | 4 | 2 |

OnobtientlegraphiquedeGanttdelafigure2.2oùlepassaged'unetâched'une machineàl'autreestvisualisé àl'aided'uneflècheverticale.

### 2.3.2 Casdet^achesnes'effectuantpasdanslem^emeordre

Danscecasplusg´en´eral, certainest^achesn´ecessitentquelepassagesurune machine,d'autressurlesdeuxdansunordreoul'autre. Lesdonn´eesnum´eriques sontreprisesautableau2.6.

Tâches`aeffectuersurApuisB

| Tâches( $i$) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_{iA}$ | 50 | 80 | 10 | 50 | 30 | 70 |
| $t_{iB}$ | 30 | 60 | 30 | 0 | 0 | 0 |

Tâches`aeffectuersurBpuisA

| Tâches( $i$) | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_{iB}$ | 90 | 20 | 10 | 40 | 10 | |
| $t_{iA}$ | 70 | 30 | 100 | 0 | 0 | |

Tableau2.6:Illustrationdel'algorithmedeJackson

L'ordonnancement qui minimiseletempstotal d'ex´ecutiondest^achessur lesdeuxmachinesest obtenupar**l'algorithmedeJackson**(1957)qui est une g´en´eralisationdel'algorithmedeJohnson. Ilconsistetoutsimplement`a:

1. Faireunepartitiondel'ensembledes $n$ tâchesen
   - l'ensemble $A$ dest^achesnepassantquesur $A$ : $A = \{4,5,6\}$;
   - l'ensemble $B$ dest^achesnepassantquesur $B$ : $B = \{10,11\}$;
   - l'ensemble $AB$ dest^achespassantsur $A$ puis $B$ : $AB = \{1,2,3\}$;
   - l'ensemble $BA$ dest^achespassantsur $B$ puis $A$ : $BA = \{7,8,9\}$.
2. Calculerunordonnancementpourchaquesous-ensemble:
   - l'ordonnancementoptimalpour $AB$ parJohnson: $3,2,1$;
   - l'ordonnancementoptimalpour $BA$ parJohnson: $9,8,7$;
   - unordonnancementarbitrairepour $A$ (parexemple,TOM): $5,4,6$;
   - unordonnancementarbitrairepour $B$ (parexemple,TOM): $11,10$.
3. Remarquonsquel'onaint´er^et`ad´ebuterleplusvitepossiblesurAlest^aches quidoiventensuiteallersurBet`amettreenderni`ereplacesurAcellesqui doiventd'abordallersurB.Ceciconduit `acombinercesordonnancement delamani`eresuivante:

- ~~Pourlamachine $A$ :~~ laséquenceoptimalepourlesous-ensemble $AB$, puislestâchesde $A$,puislaséquenceoptimaledusous-ensemble $BA$ :

$$3,2,1,5,4,6,9,8,7.$$

- ~~Pourlamachine $B$ :~~ laséquenceoptimalepourlesous-ensemble $BA$, puislestâchesde $B$,puislaséquenceoptimaledusous-ensemble $AB$ :

$$9,8,7,11,10,3,2,1.$$

OnobtientlediagrammedeGanttdelafigure2.3.

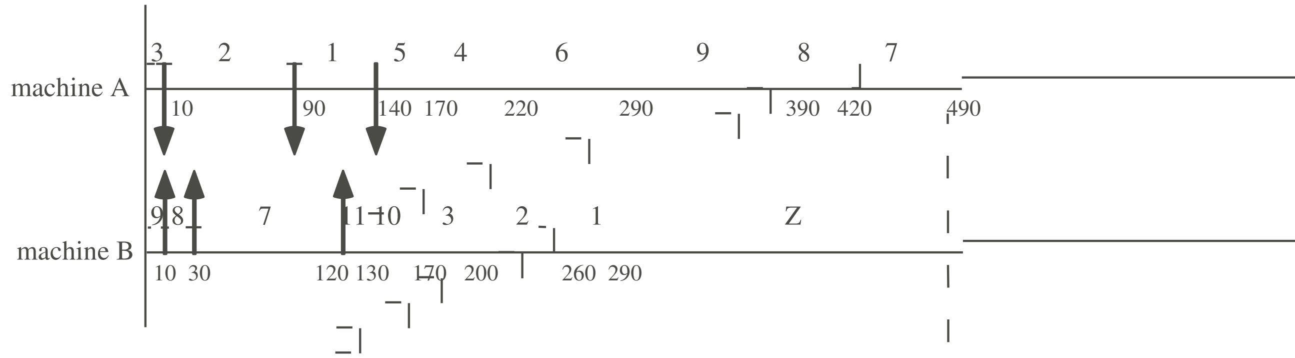


Figure2.3:AlgorithmedeJackson

## 2.4 Ordonnancementsurtroismachines

L'algorithmedeJohnsonnes'appliquequ'enprésencededeuxmachines. Cependant,lecasdetroismachinespeutserameneraucasdedeuxmachinessilamachine BestcomplètementdominéeparlamachineAouparlamachineC,c'est-à-dire sil'onsetrouvedanslecasoù

$$\text{minimum } t_{iA} \geq \text{ maximum } t_{iB} ,$$

soitdanslecasoù

$$\text{minimum } t_{iC} \geq \text{ maximum } t_{iB} .$$

Illustronscecisurl'exempledutableau2.7. oùl'onconstateque:

$$\text{minimum } t_{iA} = 12 = \text{ maximum } t_{iB} .$$

Onestdoncbiendanslesconditionsd'applicationénoncéesci-dessus. Remarquez qu'il nefaut pasquelesconditionssoient simultanémentvérifiée. Ainsi dans l'exemple,lasecondeconditionn'estpasvérifiée.

| tâches | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Assemblage | 20 | **12** | 19 | 16 | 14 | 12 | 17 |
| Inspection | 4 | 1 | 9 | **12** | 5 | 7 | 8 |
| Exp´edition | 7 | 11 | 4 | 18 | 18 | **3** | 6 |

Tableau2.7:Tempsop´eratoiresavectroismachines

Lorsquel’onsetrouvedansundesdeuxcas,onreformulealorsleprobl`emeen unprobl`eme`adeuxmachines,lapremi`eregroupantlesmachinesAetB( $t_{iAB} = t_{iA} + t_{iB}$ )etlasecondegroupantlesmachinesBetC( $t_{iBC} = t_{iB} + t_{iC}$ ).

| tâches | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Assemblage+Inspection | 24 | 13 | 28 | 28 | 19 | 19 | 25 |
| Inspection+Exp´edition | 11 | 12 | 13 | 30 | 23 | 10 | 14 |

Onappliquealorsl’algorithmedeJohnson`aceprobl`eme`adeuxmachinespour d´eterminerl’ordonnancementoptimal.

| Place | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| tâche | 5 | 4 | 7 | 3 | 2 | 1 | 6 |

Onpeutalorstracerle**diagrammedeGantt**correspondantauprobl`emeoriginal, c’est-`a-direceluiavectroismachines(voirfigure2.4).

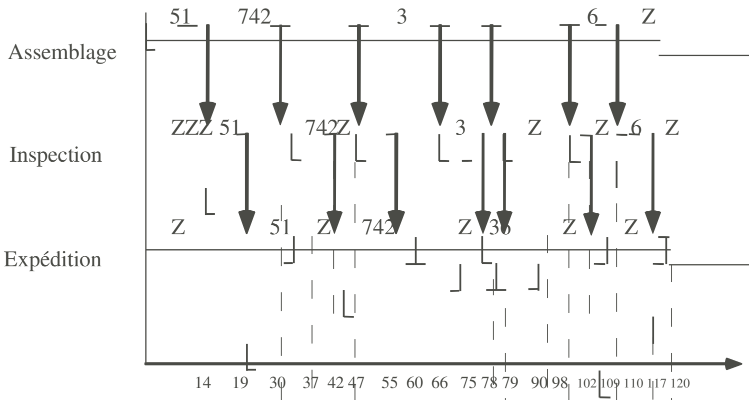


Figure2.4:Ordonnancementsavec3machines

Danslecaso`ulamachinecentralen’estpasdomin´eeparlapremi`ereo`ula troisi`ememachine,leprobl`emepeutˆetremod´elis´ecommeunprobl`emeennombres entiersetr´esoluparunetechniquedeprogrammationennombresentierstelleque lam´ethodede“branchandbound”.

## 2.5 Exercices

2.1. **Bâtiments-travaux publics.** Une entreprise de Bâtiments et Travaux Publics est spécialisée dans la réalisation d'ouvrages d'art en béton armé. Pour effectuer ses travaux, elle dispose de deux corps de métier, les coffreurs et les maçons. Cette entreprise doit faire les devis pour six réalisations. Une première analyse des travaux permet de déterminer les temps suivants :

| Fabrication No 25 | |
|---|---|
| Coffrage | 2 jours |
| Béton | 4 jours |

| Fabrication No 26 | |
|---|---|
| Coffrage | 1 jour |
| Béton | 3 jours |

| Fabrication No 27 | |
|---|---|
| Coffrage | 5 jours |
| Béton | 7 jours |

| Fabrication No 28 | |
|---|---|
| Coffrage | 10 jours |
| Béton | 8 jours |

| Fabrication No 29 | |
|---|---|
| Coffrage | 5 jours |
| Béton | 2 jours |

| Fabrication No 30 | |
|---|---|
| Coffrage | 3 jours |
| Béton | 6 jours |

(a) Cherchant à optimiser l'emploi de tous les corps de métier, vous devez proposer à cette société l'ordre de prise en compte des travaux.

(b) Avec cet ordre quel est le nombre de jours économisés par rapport à une prise en compte des fabrications dans l'ordre de leur arrivée ?

(c) Si on doit tenir compte d'un temps inter-opératoire fixe de deux jours entre la fin du coffrage et le début du béton (1 jour imputable au coffrage et l'autre au béton), que devient l'ordre que vous avez proposé ?

2.2. **Usinage de pièces sur des machines.** On veut organiser la production de deux lots de pièces $P_a$ et $P_b$ qui doivent être usinées sur la machine $M_1$ puis sur la machine $M_2$. Avant d'usiner chaque lot, il faut procéder au réglage de chaque machine. Les durées des tâches de réglage et d'usinage de chacun des lots sur les deux machines sont données au tableau ci-dessous en heures.

| Machine | Réglage A | Usinage A | Réglage B | Usinage B |
|---|---|---|---|---|
| M1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| M2 | 1 | 3 | 6 | 1 |

On veut minimiser le temps total d'exécution des pièces.

(a) Expliquez pourquoi l'algorithme de Johnson ne s'applique pas.

(b) Faites une énumération de tous les ordonnancements possibles.

(c) Tracez le diagramme de Gantt dans chacun des cas.

2.3. **Gestion du temps pour la composition d'un travail de groupe.** Deux ingénieurs disposent de 10 jours pour réaliser un travail de groupe. Ce travail se compose de 4 tâches indépendantes entre elles (l'ordre n'a pas importance). Chacune de ces tâches peut être divisée en une phase d'analyse, réalisée par le premier étudiant, et une phase de calculs, réalisée par le second. L'analyse doit précéder les calculs. Les temps nécessaires (en jours) à la réalisation des tâches sont donnés au tableau ci dessous.

| Tâche | Phase d'analyse (étudiant 1) | Phase de calculs (étudiant 2) |
|---|---|---|
| A | 2 | 2 |
| B | 0,8 | 1,5 |
| C | 1,5 | 0,5 |
| D | 2 | 1 |

(a) Quel est l'ordonnancement des tâches qui minimise le temps de réalisation du travail ?

(b) Les deux ingénieurs aimeraient ajouter en annexe 3 autres parties : E, F et G. Les deux premières (E et F) ne nécessitent pas d'analyse préalable tandis que la dernière (G) comporte seulement une phase d'analyse. Les temps sont donnés au tableau ci-dessous.

| Tâche | Analyse (étudiant 1) | Calculs (étudiant 2) |
|---|---|---|
| E | - | 2 |
| F | - | 1,5 |
| G | 1,5 | - |

La réalisation de ces annexes ne nécessite pas que les tâches principales (A, B, C et D) soient finies. Avec ces données supplémentaires, déterminez, pour chacun des ingénieurs, l'ordre d'exécution des 7 tâches qui minimise le temps total de réalisation du travail.

(c) Illustrez à l'aide d'un diagramme de Gantt.

(d) Pourront-ils rendre le travail à temps ?

2.4. **Ordonnancement avec 3 ateliers.** Cinq tâches doivent passer par les ateliers de montage, finition et expédition. Les temps opératoires sont les suivants.

| Tâches | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Montage | 7 | 2 | 4 | 3 | 5 |
| Finition | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| Expédition | 5 | 2 | 4 | 6 | 5 |

Déterminez l'ordonnancement qui minimise le temps de réalisation des tâches.

# Chapitre3

# Lagestioncalendairedestock

## 3.1 Introduction

Uneproductionsansstockestquasiinconcevablevulesnombreusesfonctionsque remplissentlesstocks. Eneffet,laconstitutiondestocksestnécessaires'ilya:

1. **noncoïncidencedansletempsetl'espacedelaproductionetdela consommation:**lestockest**indispensable**danscecascarilestimpossible deproduire**là** et**quand**lademandesemanifeste. Lesexemplesclassiques sontlesjouetsetlaconfiseriepourlanoncoïncidencedansletemps,etles supermarchéspourlanoncoïncidencedansl'espace.

2. **incertitudesurleniveaudedemandeousurleprix:**s'ilyaincertitude surla*quantitédemandée*,onvaconstituerun**stockdesécurité**quipermet defaireface`aunepointededemande. S'ilyaincertitudesurle*prix,*onva constituerun**stockdespéculation**.Parexemple,lescompagniespétrolières achètentplusquenécessaireenpétrolebrutlorsqueleprixdecelui-ciest relativementbas.

3. **risquedeproblèmesenchaîne:**ils'agiticid'éviterqu'unepanneàunposte neserépercutesurtoutelachaîne:unretardd'exécutionaupostepréc édent ouunegrèvedestransportsn'arrêterapasimmédiatement l'ensembledu processusdeproductions'ilyadesstockstampons.

4. **présencedecoûtsdelancement**:danscecas,travaillerparlotspermetune économied'échellesurlescoûtsdelancementmais,enrevanche,provoque uneaugmentationdescoûtsdepossessiondustock.

Lagestiondesstocksposecependantdemultiplesproblèmes:tenued'inventaires,valorisationdustock,définitiondescapacitésdestockageetenfin,disponibilitésatisfaisantedustock. Nousallonsnousconcentrersurcedernieraspect.

## 3.2 Lespolitiquesdegestiondestock

Les**politiquesdegestiondestock**visentàrépondreauxdeuxgrandesquestions:

1. **Quand**déclencherl'approvisionnementdustock?Laréponseàcettequestionestdifférentesuivantlapolitiquedegestionadoptée:

    - En*gestiondestockparpointdecommande,*l'approvisionnementdu stockestdéclenchélorsquel'onobservequelestockdescendendessousd'unniveau $s$,lepointdecommande.
    - En*gestioncalendaire,*l'approvisionnementdustockestdéclenchéà intervallesréguliers $T$,parexemple,chaquejourouchaquesemaine.
    - En*gestioncalendaireconditionnelle,* l'approvisionnement dustock estdéclenchéàintervallesréguliers $T$,maisuniquementlorsquel'on observequelestockdescendendessousd'unniveau $s$,lepointde commande.

2. **Combien**commander?La**réponseàlaquestion"Combien?"**dépend égalementdutypedegestiondestockappliquée:

    - Encasde*gestionparpointdecommande,*oncommandeunequantité fixe,notée $q$ etappelée*quantit é économiquedecommande*. Comme nousleverronsauchapitre4, sadéterminationrésulted'uncalcul d'optimisation.
    - Encasde*gestioncalendairedestock,*laquantitécommandéeestégale àladifférenceentrelestockrésiduel observé $R$ et $S$,le*niveaude recomplètementdustock*.

Nousallonsnousattacheràdeuxpolitiquesparticulières:

- Lapolitiquede**gestioncalendairedesstocks**,notée $(T,S)$ avec $T$ l'intervalleentredeuxcommandeset $S$,leniveauderecomplètementdustock.

- Lapolitiquede**gestionparpointdecommande, quantitééconomique decommande**, notée$(q,s)$ avec $q$,laquantitééconomiqueàcommander régulièrementet $s$,lepointdecommandequidéclenchel'approvisionnement dustock.

## 3.3 Les coûts associés aux stocks

Un **stock** est constitué pour satisfaire une demande future. En cas de demande aléatoire, il peut y avoir non coïncidence entre la demande et le stock. Deux cas sont évidemment possibles :

- une demande supérieure au stock : on parle alors de *rupture de stock* ;
- une demande inférieure au stock : on aura alors un *stock résiduel*.

Le critère de gestion généralement retenu en gestion des stocks est celui de la **minimisation des coûts**. Nous noterons cette fonction par la lettre $C$, suivie, entre parenthèses, de la ou des *variables de commande du système*. Par exemple, si la variable de commande est la quantité commandée, nous noterons l'objectif $C(q)$. Ces variables de commande déterminent en général **trois variables d'état** du système :

**$I_r$, la rupture moyenne,** c'est-à-dire le nombre moyen de demandes non satisfaites au cours d'une période, auquel est associé un *coût unitaire de rupture*, noté $c_r$ ;

**$I_p$, le stock moyen possédé** au cours d'une période, auquel est associé un *coût unitaire de possession,* $c_p$ ;

**$I_c$, le nombre moyen de commandes** passées au cours d'une période, auquel est associé un *coût unitaire de commande,* $c_c$.

La fonction de coût s'écrit donc en général comme une fonction de ces trois variables d'état :

$$C = c_r I_r + c_p I_p + c_c I_c.$$

Nous allons examiner un peu plus en détail chacun des trois coûts partiels.

### 3.3.1 Les coûts de possession

Les **coûts de possession** comprennent :

1. les *coûts de détention* d'un article en stock durant une certaine période en fonction des conditions financières d'acquisition et des éventuelles conditions de reprise.
2. les *coûts de stockage* qui sont les dépenses de logistique, de conservation du stock.

Commesignal´eplushaut,enpr´esenced'unedemandeal´eatoire,ilpeutyavoir nonco¨ıncidencedustocket delademande, et doncuneruptureouunstock r´esiduel.Lescons´equencesdecestockr´esiduelserontbiendiff´erentesselonque l'onsetrouvedans

- le**casdustock`arotationnulle**, c'est-`a-direlorsquelestockr´esiduelest sansutilit´epourl'entreprise. Cecisepr´esentenotamment:

  - en*casd'obsolescencetechniqueoucommerciale:* parexemple, les v^etementsdemodes, ...
  - en*caso ùlaconsommationaund élaimaximum:* parexemple, les primeurs,lesjournaux, ...

  Danscecas, le**co^utdepossession**d'unarticlesecalculecomme*leco ût d'acquisitiond'unarticlemoinslavaleurder écupération(solde).*

  Prenonsunexemple. Unquotidienachet´e0,9EUROparlelibraireetdont l'invenduestrepris0,75EUROparlegrossiste: leco^utdepossessionest de0,9-0,75=0,15EURO.

- le**casdustock`arotationnonnulle,**c'est-`a-direlorsquel'invendupeut^etre vendu`aunep´eriodeult´erieure. C'estl'exempledesbo^ ıtesdeconservesen ´epicerienonvenduesunep´eriodequileserontauxp´eriodessuivantes.

  Danscecas, le**co^utdepossession**li´e` al'immobilisationducapital. En gelantlasommed'argentcorrespondantauco^utd'achatdel'articleinvendu, lasoci´et´eseprivedurevenud'unplacement financierqu'elleaurait pu r´ealiser.Ceco^utestappel´e*co ûtd'opportunit é*.Le**tauxd'opportunit´e**est larentabilit´edumeilleurinvestissementquel'entrepriseauraitpufaire.

  Prenonsunexemple. Siletauxd'opportunit´eestde6%l'an,unebo^ ıtede conservesachet´ee1,20EUROetrestantenrayonunmoisentieraco^ut´e1,20 $\times$ 6% $\times$ 1/12=0,006EURO.

L'autrepartieduco^utdepossessionconcerne**lesco^utsdestockage**. Cesco^uts destockage,comprennent,eng´en´eraldes**fraisfixes,**telsqueleco^utdelocation d'entrep^ots,ainsiquedes**fraisvariables,** telsqueleco^utdemanutention. Le **co^utunitairedestockage**quel'ondoitprendreenconsid´erationdanslafonction objectifestleco^utmoyendel'ensembledecesfrais. Malheureusement,cececo^ut moyend´ependduvolumed'activit´eetnepeutdoncpas^etreconsid´er´ecommeune constante. Cettedifficult´efaitque**souventonn'inclutpasdeco^utdestockage dansleco^utdepossession**etleco^utdepossessionser´eduitdoncauseulco^ut d'immobilisationducapital.

### 3.3.2 Les coûts de rupture

La rupture se présente lorsque la demande excède le stock constitué au cours de la période. Les conséquences de cette rupture sont différentes selon que la **demande est interne ou externe.**

En cas de **demande externe,** la demande non satisfaite peut être perdue (on parle de *ventes manquées*) ou reportée (on parle de *ventes différées*):

- dans le *cas de ventes manquées,* le **coût de rupture** est le manque à gagner de la non fourniture d'une unité, généralement la marge bénéficiaire sur cet article.

  Prenons un exemple. Un journal acheté 0,90 EURO par le libraire et revendu 1,20 EURO a un coût de rupture de 1,20-0,90=0,30 EURO.

- En cas de *ventes différés,* le **coût de rupture** n'inclut pas la marge car la vente sera réalisée plus tard. Ce coût de rupture est le coût administratif d'ouverture d'un dossier et éventuellement un coût commercial (on fait une ristourne pour ne pas perdre le client).

  Prenons un exemple. Un garagiste qui n'a plus de stock le véhicule désiré par son client va lui proposer une voiture de location gratuite durant le délai d'attente pour ne pas perdre le client. Le coût de rupture correspond ici à la prise en charge par le garage de la location de la voiture.

En cas de **demande interne,** on ne parle plus de *stock de distribution* mais bien de *stock de fabrication*. Dans ce cas, la rupture entraîne un chômage technique des postes en aval. Le **coût de rupture** correspond au coût financier du chômage technique.

### 3.3.3 Les coûts de commande

A nouveau, il faut ici distinguer le cas d'une *demande interne* et celui d'une *demande externe:*

- En **cas de stock de fabrication,** le coût de commande est *le coût de lancement de la production*. Il s'agit du réglage des machines, etc ... Normalement, ce coût est indépendant de la quantité fabriquée.

- En **cas de stock d'approvisionnement,** le coût de commande est le *coût administratif* de gestion de la commande: établissement d'un bordereau, contrôle de livraison, liquidation comptable, ... . Normalement, ce coût est également indépendant de la quantité commandée.

## 3.4 Gestion calendaire de stock à rotation nulle

Pour rappel, on se trouve dans le cas d'un **stock à rotation nulle** lorsqu'il n'y a pas de report possible des invendus aux périodes suivantes.

On va ici déterminer le *niveau du stock initial* $S$, qui est donc ici la variable de commande. En effet, la *période de révision calendaire*, c'est-à-dire l'intervalle entre deux approvisionnements, noté $T$ est généralement fixé par la nature de l'approvisionnement. Par exemple, un pâtissier met en fabrication des gâteaux chaque jour. Le libraire commande des journaux chaque jour, des périodiques chaque semaine ou chaque mois.

Nous allons illustrer les choses sur **l'exemple du pâtissier** tiré de Giard [6] qui est un exemple où la demande suit une loi de probabilité discrète. Supposons un *coût de fabrication* de 25 F l'unité et un *prix de vente* de 60 F l'unité. Supposons que la vente quotidienne de ce gâteau soit de 2,5 en moyenne et supposons que la demande, que nous noterons $X$, suive une loi de Poisson. Le tableau 3.1 reprend la

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | 0,0821 | 0,2052 | 0,2565 | 0,2138 | 0,1336 |

| $x$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | 0,0668 | 0,0278 | 0,0099 | 0,0031 | 0,0009 |

Tableau 3.1: Distribution de la loi de Poisson

distribution de probabilité du nombre $X$ de clients par jour pour ce produit. Dans ce tableau $x$ indique une valeur possible de la demande et $P(X=x)$ indique la probabilité d'occurrence de cette valeur. Ainsi on a 8,21% de chances d'observer aucun client un jour donné. Les invendus de la journée sont donnés.

La **question** que se pose le pâtissier est la suivante: combien mettre de gâteaux en fabrication chaque jour pour maximiser son bénéfice?

Le coût de possession, $c_p$, lié à l'invendu en fin de journée est 25F, c'est-à-dire le coût de production. Tandis que le coût de rupture, $c_r$, lié à une vente manquée est égal à la marge, c'est-à-dire: 60F-25F=35F. On doit déterminer $S$, le stock initial, de manière à minimiser:

$$
\begin{aligned}
C(S) &= c_p I_p(S) + c_r I_r(S) \\
&= 25\, I_p(S) + 35 I_r(S)
\end{aligned}
$$

avec $I_p(S)$, le stock moyen résiduel en fin de journée et $I_r(S)$, nombre moyen de ruptures sur la journée.

Avant de voir comment déterminer, en général, le stock initial $S^*$ qui minimise le coût moyen $C(S)$, voyons sur l'exemple comment on peut calculer numériquement ce minimum.

Nous allons d'abord calculer $I_r(S)$, le nombre moyen de ruptures. Au tableau 3.2, on calcule explicitement le nombre de ruptures en fonction du stock initial ($S$) et de la demande observée ($x$) : bien évidemment, ce nombre de ruptures est la partie positive de $(x - S)$. Pour calculer le nombre moyen de ruptures, il suffit, pour chaque valeur de $S$ de faire la moyenne pondérée de ce nombre par la probabilité d'observer $x$. Ceci est fait en dernière ligne du tableau 3.2.

| Calcul du nombre de ruptures $(x - S)$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $P(X=x)$ | $S=1$ | $S=2$ | $S=3$ | $S=4$ | $S=5$ | $S=6$ |
| 0 | 0,0821 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0,2052 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0,2565 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0,2138 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0,1336 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0,0668 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 0,0278 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| 7 | 0,0099 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 8 | 0,0031 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| 9 | 0,0009 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 |
| | $I_r(S)$ | 1,579 | 0,867 | 0,411 | 0,169 | 0,061 | 0,019 |

Tableau 3.2 : Calcul du nombre moyen de ruptures

Nous allons ensuite calculer $I_p(S)$, le stock moyen possédé. Au tableau 3.3, on calcule explicitement le stock possédé en fonction du stock initial ($S$) et de la demande observée ($x$) : bien évidemment, ce stock final possédé est la partie positive de $(S - x)$. Pour calculer le stock moyen possédé, il suffit, pour chaque valeur de $S$ de faire la moyenne pondérée de ce nombre par la probabilité d'observer $x$. Ceci est fait en dernière ligne du tableau 3.3.

Enfin, nous calculons le coût moyen de possession du stock en appliquant la formule suivante :

$$C(S) = 35 I_r(S) + 25 I_p(S)$$

Ceci est fait au tableau 3.4. On constate (voir figure 3.1) que le coût minimum est obtenu pour

$$S^* = 3.$$

| Calcul du stock résiduel $(S-x)$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $P(X=x)$ | $S=1$ | $S=2$ | $S=3$ | $S=4$ | $S=5$ | $S=6$ |
| 0 | 0,0821 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 0,2052 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 0,2565 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 0,2138 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 0,1336 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 5 | 0,0668 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 0,0278 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0,0099 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0,0031 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0,0009 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $I_p(S)$ | 0,0821 | 0,3694 | 0,9132 | 1,6708 | 2,562 | 3,52 |

Tableau 3.3: Calcul du stock moyen possédé

| Calcul du coût du stock | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $C(S)$ | 57,33 | 39,58 | 37,22 | 47,69 | 66,17 | 88,66 |

Tableau 3.4: Calcul du coût moyen de possession du stock

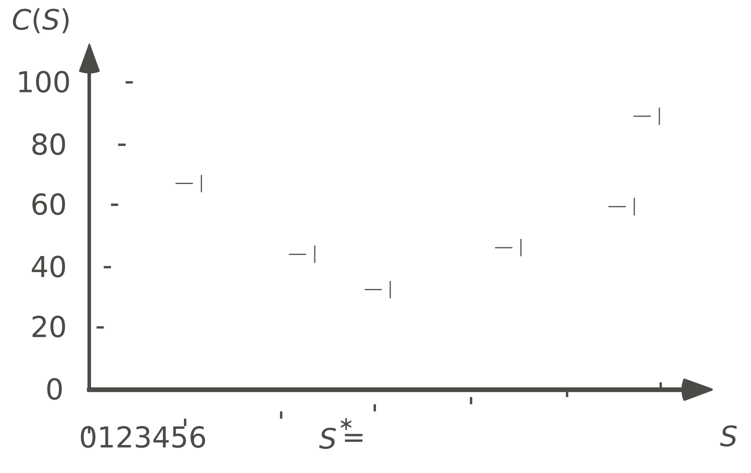


Figure 3.1: Evolution du coût moyen de possession du stock

En cas de coût convexe (on peut vérifier que le coût est bien une fonction convexe de $S$), le stock optimal $S^*$ est celui pour lequel le coût de gestion $C(S^*)$ est inférieur à celui des stocks immédiatement inférieur ou supérieur :

$$\begin{cases} C(S^*) < C(S^*+1) \\ C(S^*) < C(S^*-1) \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} C(S^*+1) - C(S^*) > 0 \\ C(S^*) - C(S^*-1) < 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Remarquez que les conditions (3.1) sont l'équivalent pour une fonction continue de dire que la dérivée première doit être négative avant $S^*$ et positive après $S^*$. On va donc étudier l'évolution de la différence de coût des stocks successifs :

$$C(S+1) - C(S)$$

L'étude de $C(S+1) - C(S)$ passe par celle de $I_r(S+1) - I_r(S)$, car, comme nous allons le voir, on peut exprimer cette variation de coût en fonction de la seule variation de rupture moyenne. On va donc étudier $I_r(S+1) - I_r(S)$. Calculons, par exemple, la rupture moyenne $I_r(S=4)$ associée au stock initial $S=4$. On doit donc calculer l'espérance mathématique de $X-4$ pour des valeurs de $X$ supérieures à 4 :

$$I_r(S=4) = \sum_{x=5}^{\infty} (x-4) P(X=x)$$

Calculons, de même, la rupture moyenne $I_r(S=5)$ associée au stock initial $S=5$ :

$$I_r(S=5) = \sum_{x=6}^{\infty} (x-5) P(X=x)$$

En général :

$$I_r(S) = \sum_{x=S+1}^{\infty} (x-S) P(X=x)$$

Intéressons nous maintenant à la différence de ces ruptures moyennes pour deux stocks initiaux consécutifs :

$$\begin{aligned} I_r(S=4) - I_r(S=5) &= \sum_{x=5}^{\infty} (x-4) P(X=x) - \sum_{x=6}^{\infty} (x-5) P(X=x) \\ &= \sum_{x=5}^{\infty} (x-4) P(X=x) - \sum_{x=5}^{\infty} (x-5) P(X=x) \\ &= \sum_{x=5}^{\infty} 1 \cdot P(X=x) \\ &= P(X>4) \end{aligned}$$

On en conclut que *la diminution de rupture moyenne* $I_r(S)$ *occasionnée par une augmentation d'une unité du stock à partir de* $S$ *est égale à la probabilité que la demande soit strictement supérieure ou égale au stock initial* $S$.

Il est facile de montrer que ceci est vrai quelle que soit la forme la distribution de probabilité discrète :

$$I_r(S+1) - I_r(S) = -P(X > S) \qquad (3.2)$$

Les tableaux de l'annexe B donne le calcul de $P(X > x)$ en fonction de $\lambda$, la valeur du paramètre de la loi de Poisson.

Comme annoncé plus haut, il est possible de ramener la fonction de coût comme une fonction de la seule variable d'état $I_r(S)$. Pour cela, nous allons établir la **relation entre $I_r(S)$ et $I_p(S)$.**

Le stock moyen sur lequel porte le coût de possession est le stock moyen observé en fin de période qui correspond donc à l'invendu. On observera un stock résiduel si la demande observée $x$ est inférieure à $S$, le stock initial. Son niveau moyen est calculé par l'espérance mathématique suivante :

$$\begin{aligned}
I_p(S) &= \sum_{x=0}^{S-1} (S-x)P(X=x) = \sum_{x=0}^{S} (S-x)P(X=x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} (S-x)P(X=x) - \sum_{x=S+1}^{\infty} (S-x)P(X=x) \\
&= S\sum_{x=0}^{\infty} P(X=x) - \sum_{x=0}^{\infty} xP(X=x) + \sum_{x=S+1}^{\infty} (x-S)P(X=x) \\
&= S - \bar{X} + I_r(S)
\end{aligned}$$

où $\bar{X}$ note la moyenne de la demande $X$. D'où la relation entre $I_p$ et $I_s$ :

$$\boxed{I_p(S) = S - \bar{X} + I_r(S)} \qquad (3.3)$$

qui peut s'interpréter en disant que *le stock moyen résiduel* $I_p(S)$ *est égal au stock de départ* $S$ *diminué de la demande moyenne satisfaite* ($\bar{X} - I_r(S)$).

La conséquence de la relation (3.3) est que l'on peut exprimer le coût total $C(S)$ en fonction du seul coût de rupture $I_r$ :

$$C(S) = c_r I_r + c_p I_p = c_r I_r + c_p \left(S - \bar{X} + I_r(S)\right)$$

D'où l'expression de $C(S)$ :

$$C(S) = c_p(S - \bar{X}) + (c_r + c_p) I_r(S) \qquad (3.4)$$

Revenons maintenant au problème de la **détermination de la solution optimale**, c'est-à-dire au stock initial $S^*$ qui minimise:

$$C(S) = c_p(S - \bar{X}) + (c_r + c_p) I_r(S)$$

On a donc que:

$$\begin{aligned} C(S+1) - C(S) &= c_p(S+1-\bar{X}) + (c_r + c_p) I_r(S+1) \\ &\quad - c_p(S-\bar{X}) - (c_r + c_p) I_r(S) \\ &= c_p + (c_r + c_p)(I_r(S+1) - I_r(S)) \end{aligned}$$

Compte tenu de la relation (3.2):

$$C(S+1) - C(S) = c_p - (c_r + c_p) P(X > S)$$

Les **conditions d'optimalité** (3.1) deviennent ici:

$$\begin{cases} c_p - (c_p + c_r) P(X > S^*) & > 0 \\ c_p - (c_p + c_r) P(X > S^* - 1) & < 0 \end{cases}$$

ou encore $S^*$ **optimal** si:

$$\boxed{P(X > S^*) < \frac{c_p}{c_p + c_r} < P(X > S^* - 1)} \qquad (3.5)$$

Appliquons ceci au cas de l'exemple:

$$\frac{c_p}{c_p + c_r} = \frac{25}{25+35} = 0,417$$

En consultant le tableau donnant $P(X > S)$ (cfr Annexe B), on trouve:

$$P(X > 2) = 0,4562 \text{ et } P(X > 3) = 0,2424.$$

D'où

$$S^* = 3.$$

On en conclut qu'il est optimal de produire chaque matin 3 gâteaux.

## 3.5 Cas d'une loi de demande continue

Nous allons illustrer ce cas sur un exemple également tiré de Giard [6]. Considérons un marchand de journaux qui vent un quotidien à 3,5F l'unité, qui lui-même l'acquière à 2,8F auprès de son grossiste qui lui reprend les invendus au prix de 2,6F l'unité.

Le coût de rupture, $c_r$, est lié à l'invendu et vaut donc la marge bénéficiaire, 3,5F-2,8F=0,7F tandis que le coût de possession, $c_p$, vaut la perte enregistrée par invendu, c'est-à-dire 2,8F-2,6F=0,2F.

On suppose que la demande quotidienne suit approximativement une loi normale de moyenne $\bar{X}=300$ et d'écart type $\sigma=20$. La **question** qui se pose est la suivante : quel est le nombre d'exemplaires à commander $S$ de manière à minimiser le coût de gestion :

$$C(S)=c_p I_p(S)+c_r I_r(S)$$

Le coût de gestion s'écrit dans le cas d'une loi continue de la manière suivante :

$$C(S)=c_p\int_0^S (S-x)f(x)dx+c_r\int_S^\infty (x-S)f(x)dx$$

La **condition d'optimalité** s'écrit dans le cas d'une loi continue :

$$C'(S^*)=0$$

Comme dans le cas discret, on peut ramener ce coût à une fonction du seul nombre moyen de ruptures. En effet, la relation (3.3) entre $I_r(S)$ et $I_p(S)$ établie dans le cas discret reste valable :

$$\begin{aligned}
I_p(S) &= \int_0^S (S-x)f(x)dx\\
&= \int_0^\infty (S-x)f(x)dx-\int_S^\infty (S-x)f(x)dx\\
&= S-\bar{X}+\int_S^\infty (x-S)f(x)dx\\
&= S-\bar{X}+I_r(S)
\end{aligned}$$

On en déduit à nouveau l'expression de $C(S)$ en fonction du seul $I_r(S)$ :

$$C(S)=c_p(S-\bar{X})+(c_p+c_r)I_r(S)$$

Il faut maintenant étudier la **dérivée première de $I_r(S)$.** Par application de la formule de Leibnitz (cfr Giard [6] [Page 90]), on démontre le résultat suivant :

$$\frac{dI_r(S)}{dS}=-\int_S^\infty f(x)dx=-P(X>S), \qquad (3.6)$$

c'est-à-dire exactement le même résultat analytique que la relation (3.2) établie dans le cas discret.

On peut maintenant passer à la **détermination de la solution optimale.** On doit donc déterminer le $S$ qui minimise:

$$C(S) = c_p(S - \bar{X}) + (c_r + c_p)I_r(S)$$

On calcule la dérivée de $C(S)$ en utilisant la relation (3.6):

$$\frac{dC(S)}{dS} = c_p - (c_r + c_p)P(X > S)$$

On annule la dérivée. D'où l'on tire:

$$\boxed{S^* \text{ optimal si } P(X > S^*) = \frac{c_p}{c_r + c_p}} \qquad (3.7)$$

Cet optimum est un minimum car la dérivée seconde de $C(S)$ est positive. La dérivée de $P(X > S)$ par rapport à $S$ est clairement négative.

Appliquons ceci au cas de l'exemple:

$$P(X > S^*) = \frac{c_p}{c_r + c_p} = \frac{0,2}{0,2 + 0,7} = 0,2222$$

Comme on ne dispose que de la table de la normale réduite, il faut réduire la variable aléatoire $X$ en lui retranchant sa moyenne et en la divisant par son écart type. On obtient:

$$P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{S^* - 300}{20}\right) = 0,2222$$

Par lecture dans la table de la normale réduite, on détermine:

$$t_S = \frac{S^* - 300}{20} = 0,765$$

D'où finalement:

$$S^* = 315,3 \approx 315.$$

L'approvisionnement périodique optimal est donc de $S^* = 315$.

Avant de passer au cas des stocks à rotation non nulle, examinons quelques indicateurs que l'on peut déduire de la solution optimale.

## 3.6 Les conséquences économiques de la solution optimale

### La rupture de stock

Dans le cas (discret) de la production de gâteau, le calcul de $I_r(S)$ s'effectue comme suit :

$$\begin{aligned} I_r(S) &= \sum_{x>S} (x-S)P(X=x) \\ &= \sum_{x>S} xP(X=x) - S\sum_{x>S} P(X=x) \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$I_r(S) = \sum_{x>S} xP(X=x) - SP(x>S)$$

Le premier terme correspond à un calcul tronqué de la moyenne. Pour la *distribution de Poisson de paramètre* $\lambda$, on montre que :

$$\sum_{x>S} xP(X=x) = \lambda P(X>S-1)$$

D'où l'on tire finalement :

$$\boxed{I_r(S) = \lambda P(X>S-1) - SP(X>S)} \tag{3.8}$$

Ce qui nous donne dans le cas de l'exemple :

$$\begin{aligned} I_r(S^*=3) &= 2,5P(X>2) - 3P(X>3) \\ &= 2,5\times 0,4562 - 3\times 0,2424 \\ &= 0,4133. \end{aligned}$$

Dans le cas de la vente de journaux (loi de demande continue), le calcul de $I_r(S)$ s'effectue par l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} I_r(S) &= \int_S^\infty (x-S)f(x)dx \\ &= \int_S^\infty xf(x)dx - S\int_S^\infty f(x)dx \end{aligned}$$

D'où l'on tire

$$I_r(S) = \int_S^\infty xf(x)dx - SP(x>S)$$

Le premier terme correspond à nouveau à un calcul tronqué de la moyenne. On peut montrer que si $X$ suit *une distribution normale* $N(\mu,\sigma)$, on obtient la formule suivante:

$$\boxed{I_r(S)=\sigma[f(t_S)-t_S P(t>t_S)]=\sigma g(t_S)}$$

avec:

$$t_S=\frac{S-\bar{X}}{\sigma} \quad \text{et} \quad f(t_S)=\frac{e^{-t_S^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Appliquons ceci aux données numériques de l'exemple pour lequel

$$t_s=\frac{315-300}{20}=0,75.$$

La table B.3 donne directement:

$$g(t_S=0,75)=0,1312$$

L'application de la formule donne donc:

$$I_r(S)=20\times 0,1312=2,624.$$

**Le stock moyen possédé**

Le *stock moyen possédé*, $I_p(S)$, correspond dans le cas de stock à rotation nulle au stock résiduel moyen. Cet indicateur s'obtient à partir de la rupture moyenne aussi bien dans le cas discret que dans le cas continu par la relation (3.3) rappelée ci-dessous:

$$I_p(S)=S-\bar{X}+I_r(S)$$

Pour le pâtissier, on aura donc:

$$I_p(S^*=3)=(3-2,5)+0,413=0,9133 \text{ gâteaux.}$$

Pour le marchand de journaux, on aura:

$$I_p(S^*=315)=(315-300)+2,624=17,624 \text{ journaux.}$$

Remarquez que, dans les deux cas, le stock résiduel se calcule comme le stock initial diminué de la demande satisfaite.

**Le coût moyen**

Le *coût moyen* $C(S)$ peut être calculé par la relation suivante:

$$C(S) = c_r I_r(S) + c_p I_p(S)$$

Pour l'exemple du pâtissier, on obtient:

$$C(S) = 35 \times 0{,}4132 + 25 \times 0{,}9132 = 14{,}46 + 22{,}83 = 37{,}30 \text{ F}.$$

Pour l'exemple du marchand de journaux, on obtient:

$$C(S) = 0{,}7 \times 2{,}624 + 0{,}2 \times 17{,}624 = 5{,}36 \text{ F}.$$

**La marge nette moyenne**

La *marge nette moyenne*, notée $B(S)$, est égale au produit de la marge unitaire, $m_u$, par la demande moyenne, diminué du coût de stockage:

$$B(S) = m_u \bar{X} - C(S) \qquad (3.9)$$

Donnons quelques explications sur cette formule. Deux cas sont possibles quant aux ventes manquées (aux ruptures de ventes):

- Soit les ventes manquées sont *perdues*, et dans ce cas, le coût de rupture est la marge bénéficiaire. La formule (3.9) devient dans ce cas:

$$\begin{aligned} B(S) &= c_r \bar{X} - c_r I_r(S) - c_p I_p(S) \\ &= c_r(\bar{X} - I_r(S)) - c_p I_p(S) \end{aligned}$$

  Le bénéfice net est donc la marge bénéficiaire sur les ventes réalisées moins le coût des invendus.

- Soit les ventes manquées sont *différées*, et dans ce cas, la marge bénéficiaire sera réalisée sur l'ensemble de la demande exprimée $\bar{X}$, ce qui justifie directement la formule (3.9).

L'application de cette relation à l'exemple numérique du pâtissier donne:

$$B(S) = m_u \bar{X} - C(S) = 35 \times 2{,}5 - 37{,}30 = 50{,}20 \text{ F}.$$

tandis que pour le marchand de journaux, elle donne:

$$B(S) = m_u \bar{X} - C(S) = 0{,}7 \times 300 - 5{,}36 = 204{,}64 \text{ F}.$$

Nous allons maintenant passer au cas de stock à rotation non nulle.

## 3.7 Cas de stocks à rotation non nulle

Pour rappel, on parle de **stocks à rotation non nulle** lorsque les invendus d'une période seront vendus aux périodes suivantes. C'est de loin le cas le plus répandu.

La **variable de commande** du système est ici $S$, le niveau de recomplètement, c'est-à-dire le niveau du stock que l'on cherche à retrouver périodiquement. Remarquons une différence fondamentale avec le cas de stocks à rotation nulle. En effet, la *commande à passer pour un approvisionnement en début de période n'est plus fixe.* Deux cas sont possibles:

- Il reste un *stock résiduel positif:* dans ce cas, on commande la différence entre $S$ et le stock résiduel;
- Le *stock résiduel est nul :* dans ce cas, on commande $S$ augmenté des demandes non satisfaites de la période précédente qui ont pu être reportées.

Pour illustrer le processus de détermination de $S^*$, le niveau optimal de recomplètement, c'est-à-dire celui qui minimise le coût:

$$C(S) = c_p I_p(S) + c_r I_r(S),$$

nous considérons l'exemple suivant de la vente sd'ampoules d'éclairage tiré de Giard [6].

On suppose que la demande hebdomadaire d'ampoules de 60 Watts suit une loi normale de moyenne 300 et d'écart type 20. Le réapprovisionnement se fait en début de semaine chez le grossiste au prix d'achat de 3 F l'unité. Les ampoules sont vendues au prix de 3,5 F l'unité. On suppose un taux d'opportunité annuel de 20%.

D'où un coût de possession annuel par ampoule en stock de:

$$3\,\mathrm{F} \times 0,2 = 0,6\,\mathrm{F}.$$

Pour arriver à un coût de possession hebdomadaire, il faut tenir compte du nombre de semaines sur lesquelles la demande s'exprime. Ici, on suppose le magasin ouvert 52 semaines par an:

$$0,6\,\mathrm{F}/52 = 0,0115\,\mathrm{F}$$

Remarquons qu'à la différence du cas de stock à rotation nulle, la perte liée à une ampoule en stock n'est plus son prix d'achat mais la perte financière due au gel en stock de son prix d'achat.

Calculonsmaintenantlecoûtunitairederupture:ilcorrespondàlamargenon réaliséeparampoule:

$$3{,}5\,\mathrm{F} - 3\,\mathrm{F} = 0{,}5\,\mathrm{F}.$$

La**question**quiseposeestlasuivante:quelestleniveauderecomplètement optimal $S^*$?

Pourle**calculdustockmoyenpossédé,**ilfaudradistinguerdeuxcasdefigure:

1. lecasoùlademandeobservéeestsupérieureauniveauderecomplètement;

2. lecasoùlademandeobservéeestinférieureauniveauderecomplètement.

Supposons, pourfixerlesidées, qu'unniveauderecomplètementde320ait étéchoisi.

1. **Casd'unedemandeinférieureà $S$ :** danscecas,iln'ya*pasderupture destock*. C'estl'exempled'unedemandeobservéede310. Lestockdefin depériodevautdonc:

$$320 - 310 = 10\ \text{ampoules.}$$

Encequiconcerne**l'évolutiondustock**,onpeutsupposerquelademande de310ampoulesestégalementrépartiesurtoutelasemaineetonpeutfaire uneinterpolationlinéairecommeàlafigure3.2

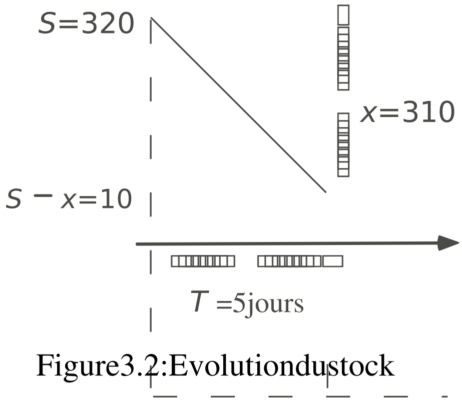


Figure3.2:Evolutiondustock

Ondéduitle*stockmoyenpossédé*:

$$I_p(S) = \frac{320+10}{2} = \frac{S+(S-x)}{2}$$

Onenconclutdoncque:

$$\text{Si } x<S : I_p(S) = \frac{S+(S-x)}{2} \tag{3.10}$$

2. **Cas d'une demande supérieure à $S$ :** dans ce cas, on observe une *rupture de stock*. C'est le cas, par exemple, d'une demande observée de 350. On va maintenant déterminer à partir de quand le stock est nul. La demande, comme dans le cas sans rupture, est supposée uniformément répartie sur la semaine de cinq jours (cfr figure 3.3). La demande journalière est donc

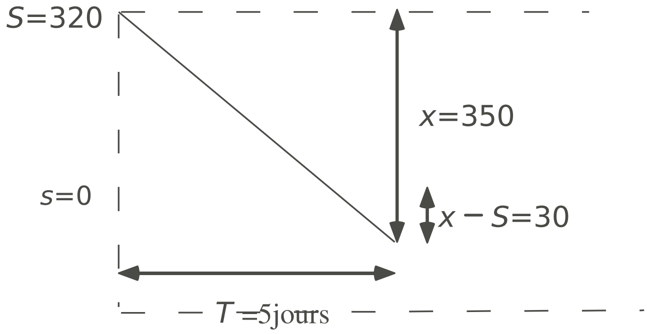


Figure 3.3: Evolution du stock en cas de rupture

$\frac{350}{5}=70$ ampoules par jour. Et l'évolution du stock moyen possédé peut être obtenue par:

$$S(t)=320-70t.$$

Ce stock est nul pour:

$$t=\frac{320}{70}=4{,}57 \text{ jours } =\frac{S}{x/T}$$

Le stock moyen possédé vaut: $(320+0)/2=160$ sur 4,57 jours. D'où le stock moyen possédé:

$$\begin{aligned} I_p(S) &= 160\,\frac{4{,}57}{5}+0\,\frac{5-4{,}57}{5} \\ &= \frac{320}{2}\,\frac{320}{350}=\frac{S}{2}\,\frac{S}{x} \end{aligned}$$

En général:

$$\text{Si } x>S: I_p(S)=\frac{S}{2}\,\frac{S}{x}$$

Cette formule donne une solution analytique au problème de la détermination du niveau optimal de recomplètement $S^*$ assez difficile à mettre en œuvre. Une **hypothèse simplificatrice**, à savoir que *la rupture se produit en fin de période* permet d'effectuer des calculs simplifiés. Sous cette hypothèse, le stock varie entre $S$ et 0 et donc:

$$\text{Si } x>S: I_p(S)=\frac{S}{2} \qquad (3.11)$$

### 3.7.1 Détermination de la solution optimale

Sous cette hypothèse simplificatrice, nous allons pouvoir déterminer le niveau de recomplètement optimal. Le coût de gestion s'écrit :

$$C(S) = c_p I_p(S) + c_r I_r(S)$$

Pour le calcul du stock moyen possédé $I_p(S)$, il faut dissocier le cas où la demande $x$ est inférieure à $S$ de celui où elle est supérieure à $S$ :

$$I_p(S) = \int_0^S (S - \frac{x}{2}) f(x)dx + \frac{S}{2}\int_S^\infty f(x)dx$$

Tandis que le nombre moyen de ruptures, $I_r(S)$, peut se calculer comme l'intégrale :

$$I_r(S) = \int_S^\infty (x - S) f(x)dx$$

On peut maintenant tirer l'expression de $I_p(S)$ en fonction de $I_r(S)$ :

$$\begin{aligned}
I_p(S) &= \int_0^S (\frac{S}{2} + \frac{S-x}{2}) f(x)dx + \frac{S}{2}\int_S^\infty f(x)dx \\
&= \frac{S}{2}\int_0^\infty f(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^S (S-x) f(x)dx \\
&= \frac{S}{2} + \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty (S-x) f(x)dx - \int_S^\infty (S-x) f(x)dx\right] \\
&= \frac{S}{2} + \frac{S}{2} - \frac{\bar{X}}{2} + \frac{I_r(S)}{2}
\end{aligned}$$

On obtient donc la relation suivante :

$$\boxed{I_p(S) = S - \frac{\bar{X}}{2} + \frac{I_r(S)}{2}} \qquad (3.12)$$

On peut donc exprimer $C(S)$ en fonction du seul $I_r(S)$ :

$$C(S) = c_p I_p(S) + c_r I_r(S) = c_p[S - \frac{\bar{X}}{2} + \frac{I_r(S)}{2}] + c_r I_r(S)$$

D'où finalement :

$$C(S) = c_p(S - \frac{\bar{X}}{2}) + (c_r + \frac{c_p}{2}) I_r(S)$$

Dans le **cas d'une loi de demande continue,** il suffit d'annuler la dérivée première

$$\begin{aligned}
\frac{dC(S)}{dS} &= c_p + (c_r + \frac{c_p}{2})\frac{dI_r(S)}{dS} \\
&= c_p + (c_r + \frac{c_p}{2})[-P(X > S^*)] = 0
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{P(X > S^*) = \frac{c_p}{c_r + c_p/2}} \tag{3.13}$$

Appliquons ceci aux données numériques de notre exemple de ventes d'ampoules électriques. Par la relation (3.13) :

$$P(X > S^*) = \frac{0{,}01154}{0{,}5 + 0{,}01154/2} = 2{,}28\%$$

La lecture dans la table normale réduite nous donne :

$$t_S = 2 = \frac{S - 300}{20}$$

D'où, le niveau optimal de recomplètement : $S^* = 340$.

Tout comme dans le cas de stock à rotation nulle, on peut déduire les principaux indicateurs de la solution optimale choisie :

- Le *nombre moyen de rupture* se calcule par la formule suivante :

$$\begin{aligned} I_r(S^*) &= \sigma[f(t_S) - t_S P(t > t_S)] \\ &= 20 \times 0{,}0084 \\ &= 0{,}168 \end{aligned}$$

- Le *stock moyen possédé* se calcule à partir de la formule

$$\begin{aligned} I_p(S^*) &= S^* - \frac{\bar{X}}{2} + \frac{I_r(S^*)}{2} \\ &= 340 - \frac{300}{2} + \frac{0{,}168}{2} \\ &= 190{,}08 \end{aligned}$$

- Le *coût moyen de stockage* se calcule comme

$$\begin{aligned} C(S^*) &= c_p I_p(S^*) + c_r I_r(S^*) \\ &= 0{,}01154 \times 190{,}08 + 0{,}5 \times 0{,}168 \\ &= 2{,}28 \end{aligned}$$

- La *marge hebdomadaire moyenne nette* se calcule comme :

$$\begin{aligned} B(S^*) &= m_u \bar{X} - C(S^*) \\ &= 0{,}5 \times 300 - 2{,}28 \\ &= 147{,}72 \end{aligned}$$

### 3.7.2 Cas d'une loi de demande discrète

Terminons ce chapitre en voyant les formules de calcul dans le cas d'une loi de demande discrète pour la gestion de stock à rotation non nulle.

Le **stock moyen possédé** se calcule dans le cas discret comme suit :

$$I_p(S) = \sum_{0}^{S-1} (S - \frac{x}{2}) P(X=x) + \sum_{S}^{\infty} \frac{S}{2} P(X=x)$$
$$= \sum_{0}^{S-1} (S - \frac{x}{2}) P(X=x) + \frac{S}{2} P(X \geq S)$$

Exprimons ce stock moyen possédé en fonction du nombre moyen de rupture :

$$I_p(S) = \sum_{0}^{S-1} (\frac{S}{2} + \frac{S}{2} - \frac{x}{2}) P(X=x) + \frac{S}{2} \sum_{S}^{\infty} P(X=x)$$
$$= \frac{1}{2}[S + \sum_{0}^{S} (S - x) P(X=x)]$$
$$= \frac{S}{2} + \frac{1}{2} \sum_{0}^{\infty} (S - x) P(X=x) - \frac{1}{2} \sum_{S}^{\infty} (S - x) P(X=x)$$

On obtient donc la relation suivante entre $I_p$ et $I_r$ :

$$\boxed{I_p(S) = S - \frac{\bar{X}}{2} + \frac{I_r(S)}{2}} \qquad (3.14)$$

c'est-à-dire exactement la même formule que dans le cas continu.

On peut donc exprimer $C(S)$ en fonction du seul $I_r(S)$ :

$$C(S) = c_p I_p(S) + c_r I_r(S)$$
$$= c_p [S - \frac{\bar{X}}{2} + \frac{I_r(S)}{2}] + c_r I_r(S)$$
$$= c_p (S - \frac{\bar{X}}{2}) + (c_r + \frac{c_p}{2}) I_r(S)$$

Par des calculs analogues à ceux du cas de la rotation nulle, on détermine finalement le niveau optimal de recomplètement $S^*$ par la formule suivante :

$$\boxed{P(X > S^*) \leq \frac{c_p}{c_r + c_p/2} \leq P(X > S^* - 1)} \qquad (3.15)$$

Il est à noter que si la loi de demande est du type Poisson, $I_r(S)$, le nombre moyen de demandes non satisfaites, se calcule par la même formule que précédemment à savoir :

$$I_r(S) = \lambda P(X > S - 1) - S P(X > S)$$

## 3.8 Exercices

3.1. **Achat de pièces de rechange.** L'ingénieur en chef d'une usine passe la commande d'un modèle de pièces détachées d'une machine pour laquelle il craint un approvisionnement difficile. Les conséquences d'un arrêt de la machine à cause d'un retard de livraison de la pièce sont particulièrement onéreuses : le coût d'un arrêt de la production pour manque de pièce est de 25.000F. En achetant cette pièce en même temps que la machine, le coût unitaire d'approvisionnement est de 1.000F. L'expérience passée de l'ingénieur l'incite à estimer la distribution des pannes sur la durée de vie du matériel, par une loi de Poisson de paramètre 1. La possession de pièce au delà de la durée de vie de la machine est sans valeur vu l'obsolescence technique rapide de la machine.

(a) Quelle est la politique optimale à suivre?

(b) Quel est le coût financier de cette politique de commande de pièces de rechange?

3.2. **Ventes d'hebdomadaires.** Un libraire commande régulièrement un hebdomadaire auprès de son grossiste. Son coût d'achat est de 12F et son prix de vente 16F. On suppose que les ventes hebdomadaires suivent une loi normale de moyenne 30 et d'écart type 5.

(a) Quel est le nombre d'exemplaires à commander auprès de son grossiste chaque semaine si le coût de reprise est de 10F?

(b) Quelle est sa marge nette moyenne?

3.3. **Ventes de calculatrices.** Un établissement spécialisé dans la distribution de calculatrices électroniques a un produit vendu couramment tout au long de l'année. Il s'agit d'une calculatrice scientifique qui est achetée 45F et revendue 55F. Le taux d'opportunité utilisé est de 20%. La demande hebdomadaire de ce modèle est d'environ 5 calculatrices, et il y a tout lieu de penser que le modèle de Poisson est utilisable. La société est ouverte 52 semaines par an, les délais d'approvisionnement sont négligeables, les demandes non satisfaites sont considérées comme perdues. La période de révision calendaire $T$ est de deux semaines.

(a) On demande de calculer le niveau optimal de complètement du stock.

(b) On calculera les conséquences de cette politique que sont le nombre moyen de ventes manquées et le stock moyen possédé.

(c) On en déduira la marge nette moyenne $B(S)$.

3.4. **Ventes de réveils électroniques.** La société commercialise également un réveil électronique qui connaît une grande popularité. La demande sur une semaine suit approximativement une loi normale de moyenne 100 et d'écart-type 30. La même politique de gestion calendaire est suivie. Les données de coûts sont les mêmes que celles des calculatrices. La période de révision calendaire $T$ est aussi de deux semaines.

   (a) Calculez le niveau de recomplètement optimal.

   (b) Calculez les conséquences de cette politique que sont le nombre moyen de ventes manquées et le stock moyen possédé.

   (c) En déduire la marge nette moyenne $B(S)$.

3.5. **Ventes de sapin de Noël.** Un producteur de sapin de noël doit décider de la quantité à mettre en production chaque année. Les ventes annuelles concentrées sur la première quinzaine de décembre suivent une loi normale de moyenne 30.000 et d'écart type 200. Le coût de production est de 10 EURO l'unité et le prix de vente de 24 EURO. Le producteur travaille uniquement sur commande de sorte qu'il ne coupe que les arbres demandés l'année courante. Quelle quantité doit-il mettre en production pour minimiser son coût de gestion ? On suppose un taux d'opportunité de 10% l'an.

3.6. **Ventes de fleurs.** Un épicier va chercher **deux fois par semaine** des fleurs coupées au marché en gros de sa ville. En effet, au delà de trois jours, il ne peut plus les revendre. Son coût d'achat d'une botte de fleurs est de 50 F et son prix de vente 75 F. On suppose que la demande de bottes de fleurs suit une loi de Poisson. En moyenne, 30 clients se présentent chaque semaine pour ce produit.

   (a) Quel est le nombre de bottes de fleurs coupées à aller chercher le lundi matin et le jeudi matin ?

   (b) Combien de clients en moyenne sortent de son magasin par semaine sans fleurs ?

   (c) Quel est le nombre moyen de bottes de fleurs jetées par semaine ?

# Chapitre 4

# La gestion par point de commande

## 4.1 Introduction

La **gestion calendaire** se caractérise, comme nous l'avons vu au chapitre 3 par :

- des commandes à *intervalles fixes* dont la périodicité est notée $T$ ;
- un niveau de commande *variable :* qui vaut la différence entre $S$, le niveau de recomplètement et $R$, le stock résiduel.

La **gestion par point de commande** se caractérise, elle, au contraire par :

- un montant de commande *constant* : cette *quantité économique de commande* sera notée $q$;
- une périodicité de commande *variable (lorsqu'on est en univers aléatoire)* : on commande lorsque le stock passe en dessous *du point de commande*, $s$.

On examinera successivement les deux cas de figures que sont :

1. La *gestion* $(q,s)$ *en univers certain.* Comme, dans ce cas, la demande est **certaine**, on commande avant rupture de stock et il n'y a **pas de coût de rupture**. La **variable de décision** $q$, la valeur constante de la commande, sera déterminée de manière à minimiser le coût de gestion qui ne comprend que deux termes :
$$C(q)=c_cI_c(q)+c_pI_p(q)$$
2. La *gestion* $(q,s)$ *en univers incertain.* Dans ce cas, le *coût de rupture intervient aussi.* Les **variables de décision** que sont $q$, le montant des commandes et $s$, le point de commande seront déterminés de manière à minimiser le coût de gestion qui comprend trois termes :
$$C(q,s)=c_cI_c(q,s)+c_pI_p(q,s)+c_rI_r(q,s)$$

## 4.2 Détermination du point de commande

Nous allons illustrer la *détermination de la quantité économique de commande en univers certain* sur un exemple tiré de Giard [6]. Il s'agit d'un ustensile de cuisine acheté par un supermarché au prix unitaire de 30 F. Les *ventes annuelles*, que nous noterons $D$ sont estimées à 2400 unités. Cette demande est considérée comme *uniforme sur l'année :* c'est-à-dire qu'elle ne subit pas de variations saisonnières. Vu le caractère certain de la demande et du délai d'obtention (ici de 20 jours ouvrables), on peut éviter toute rupture d'approvisionnement en passant commande à temps. On considère que l'année comporte 48 semaines de 6 jours ouvrables, soit 288 jours. Le coût de passation d'une commande de 300 F et est indépendant de la quantité commandée. L'article est vendu 40 F l'unité.

La **question** qui se pose ici est : "Quand commander ?"

Afin de minimiser le stock possédé, le chef de rayon aint éré à passer commande exactement 20 jours ouvrables avant la rupture (voir figure 4.1) de manière à ce que le stock soit nul au moment de la livraison. Il évitera ainsi un stock dormant.

Remarquez que cela revient à déclencher la commande au moment où il reste exactement en stock de quoi satisfaire la demande de 20 jours.

Comme le délai d'obtention est de 20 jours ouvrables, c'est-à-dire

$$L = \frac{20}{288} = 0,069 \text{ année},$$

la demande durant cette période s'élève à :

$$D \times L = 2400 \times \frac{20}{288} = 166,67 \text{ articles}.$$

que l'on arrondi au point de commande

$$s = 167.$$

En général, le point de commande est tel que

$$\boxed{s = DL} \tag{4.1}$$

avec $D$ = demande annuelle ;
$L$ = délai d'obtention exprimé en année.

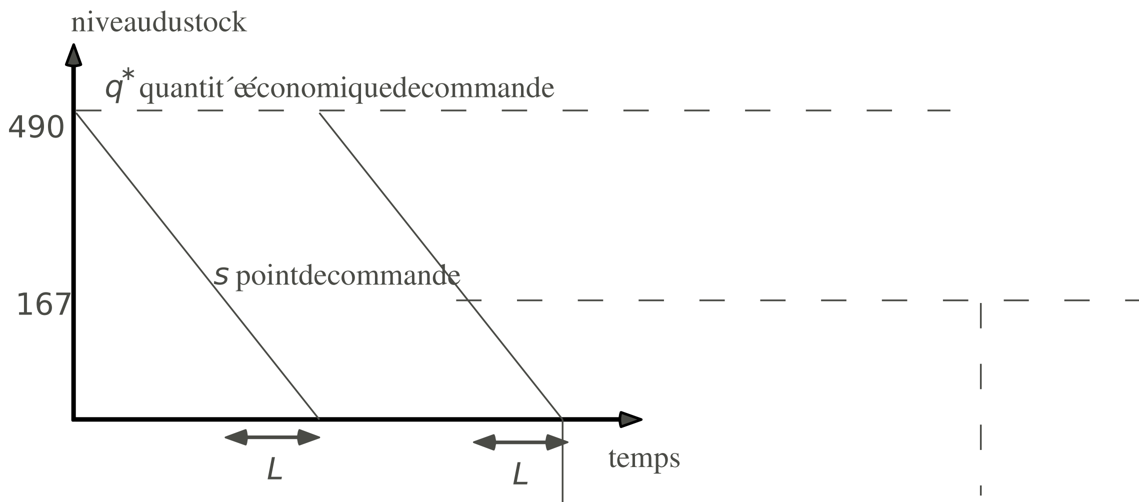


Figure 4.1: Point de commande

## 4.3 Détermination de la quantité économique de commande

Le **coût de possession** annuel unitaire peut être calculé en tenant compte du taux d'opportunité annuel ici supposé de 20% comme:

$$30 \times 0{,}2 = 6 \text{ F.}$$

La **question** qui se pose est la suivante: Quelle est la quantité $q$ constante à commander périodiquement pour que le coût annuel moyen soit minimum?

Avant de déterminer la quantité optimale, raisonnons sur une valeur quelconque de $q$, par exemple, $q = 400$. En cas de *demande uniforme* sur l'année, on doit passer commande tous les

$$\frac{400}{2400} = \frac{1}{6} \text{ année,}$$

c'est-à-dire tous les deux mois. La période économique de commande est donc:

$$\tau = \frac{q}{D}$$

Le *nombre moyen de commandes par an* vaut:

$$I_c(q) = \frac{D}{q}$$

D'où le coût de commande:

$$c_c I_c(q) = c_c \frac{D}{q} = 300 \frac{2400}{400} = 1800 \text{F.}$$

Passons maintenant au **calcul du stock moyen possédé.** Pour minimiser le coût de possession, on passe commande de manière à ce que le stock soit nul au moment où arrivent les nouveaux articles. Le stock varie donc entre 400 et 0. Le stock moyen possédé vaut donc :

$$I_p = \frac{q}{2} = \frac{400}{2}.$$

Le coût annuel de possession vaut donc :

$$c_p I_p(q) = 6\,\frac{400}{2} = 1200\text{F}.$$

D'où le coût annuel de gestion :

$$C(q=400) = 6\,\frac{400}{2} + 300\,\frac{2400}{400} = 3000\text{F}.$$

Nous pouvons maintenant faire une **modélisation** du problème pour une quantité commandée quelconque $q$. On cherche donc à déterminer la valeur de la seule **variable de décision**, c'est-à-dire $q$, la commande périodique, qui minimise le coût de gestion qui ne comprend que deux termes :

$$C(q) = c_p I_p(q) + c_c I_c(q)$$

On peut généraliser les calculs de l'exemple ci-dessus. On obtient :

$$\begin{aligned} C(q) &= c_p I_p(q) + c_c I_c(q) \\ &= c_p \frac{q}{2} + c_c \frac{D}{q} \end{aligned}$$

Il est facile de **calculer l'optimum** d'une telle fonction. Il suffit d'annuler sa dérivée première :

$$C'(q) = c_p \frac{1}{2} - c_c \frac{D}{q^2} = 0$$

D'où le point optimum :

$$\boxed{q^* = \sqrt{\frac{2Dc_c}{c_p}}} \qquad (4.2)$$

Cette quantité est appelée **quantité de Wilson**. Vérifions qu'il s'agit bien d'un **minimum** en calculant la dérivée seconde :

$$C''(q) = 2c_c \frac{D}{q^3} > 0$$

Remarquez qu'au point optimum, on a **égalité des coûts de commande et de possession**. En effet :

$$c_c I_c(q^*) = c_c \frac{D}{q} = c_c \frac{D}{\sqrt{\frac{2Dc_c}{c_p}}} = \sqrt{\frac{Dc_cc_p}{2}}$$

$$c_p I_p(q^*) = c_p \frac{q^*}{2} = c_p \frac{\sqrt{\frac{2Dc_c}{c_p}}}{2} = \sqrt{\frac{Dc_cc_p}{2}}$$

Appliquons ceci à l'exemple numérique. La *quantité économique de commande* vaut donc :

$$q^* = \sqrt{\frac{2\,2400\,300}{6}} = 489{,}9 \simeq 490$$

D'où la *durée optimale de consommation* :

$$\tau^* = \frac{q^*}{D} = \frac{490}{2400} = 0{,}204 \text{ années.}$$

Examinons les **conséquences de la politique optimale.** Le *stock moyen détenu* vaudra :

$$I_p(q^*) = \frac{q^*}{2} = \frac{490}{2} = 245.$$

Et le *nombre moyen annuel de commandes* vaudra :

$$I_c(q^*) = \frac{D}{q^*} = \frac{2400}{490} = 4{,}898$$

De ces deux quantités, on déduit le *coût annuel de gestion* :

$$\begin{aligned} C(q^*) &= c_p I_p(q^*) + c_c I_c(q^*) \\ &= 6\,\frac{490}{2} + 300\,\frac{2.400}{490} \\ &= 2\,939{,}39 \text{ F.} \end{aligned}$$

On peut en déduire la *marge bénéficiaire nette* par la formule :

$$\begin{aligned} B(q^*) &= m_u D - C(q^*) \\ &= 10 \times 2.400 - 2939{,}39 \\ &= 21.060{,}61 \text{ F.} \end{aligned}$$

## 4.4 Cas d'une demande aléatoire

Rappelons les hypothèses de base de la gestion par point de commande en **univers certain:**

- On a une *demande certaine* uniformément répartie sur l'année;
- On a un *délai de livraison certain.*

Nous allons **généraliser** ce modèle de la manière suivante:

- On suppose que la **demande est connue en probabilité** mais reste statique, c'est-à-dire que les caractéristiques de la distribution restent stables dans le temps.
- Nous maintenons l'hypothèse d'un **délai d'obtention certain**. Ce qui est le plus souvent le cas.

Nous illustrons ce cas sur l'exemple introductif, à savoir la vente d'ustensiles de cuisine mais en considérant cette fois que *la demande annuelle suit une normale* de moyenne 2400 et d'écart type 189,74. Le *coût de rupture* vaut la marge qui est ici de 10F. Le *coût de possession annuel* reste de 6F. Le *coût unitaire de commande* reste de 300F.

Passons au problème de la **détermination de $q$ et $s$**. Tout d'abord, remarquons que pendant le délai d'obtention de 20 jours la demande est aléatoire. Calculons les paramètres de sa distribution. Tout d'abord, le délai d'obtention de 20 jours s'exprime en fraction d'année comme:

$$L = \frac{20}{288} \text{ années.}$$

La demande $X_L$ en 20 jours suit une loi Normale

- de *moyenne:*

$$\mu_L = L\mu = \frac{20}{288} \times 2400 = 167$$

- de *variance:*

$$\sigma_L^2 = L\sigma^2 = \frac{20}{288} \times (189{,}74^2)$$

En effet, les paramètres de la demande durant 20 jours se déduisent des paramètres des ventes annuelles en *multipliant la moyenne et la variance (et non l'écart type) par $L$*. Donc, on obtient un écart type de:

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{20}{288}} \times 189{,}74 = 50$$

### 4.4.1 Détermination de $q$ et $s$

La **fonction de coût à minimiser** fait intervenir les trois variables d'état que sont:

- le *nombre moyen de commandes*, $I_c$;
- le *stock moyen annuel*, $I_p$;
- la *rupture moyenne annuelle*, $I_r$.

$$C(q,s) = c_c I_c(q,s) + c_p I_p(q,s) + c_r I_r(q,s)$$

Nous allons obtenir une solution approchée au problème en effectuant une **détermination indépendante de $s$ et de $q$** en se basant sur l'observation suivante. Dans l'expression de $C$, le nombre moyen de commande dépend essentiellement de la quantité commandée $q$ tandis que le nombre moyen de ruptures dépend essentiellement du point de commande $s$. On peut donc récrire cette expression comme:

$$C(q,s) = c_c I_c(q) + c_p I_p(q,s) + c_r I_r(s)$$

On voit que le terme qui lie le problème en la variable $q$ et le problème en la variable $s$ est le stock moyen possédé $I_p$ qui dépend à la fois de $q$ et de $s$. On va déterminer une solution approchée en séparant le problème à deux variables en deux problèmes à une variable de la manière suivante. Le principe pour obtenir cette solution approchée est de résoudre **indépendamment** les deux problèmes suivant:

1. **Déterminer la quantité économique** $q$ en arbitrant entre le coût de commande et le coût de possession à partir de la demande moyenne.
2. **Déterminer le point de commande** $s$ en arbitrant entre le coût de rupture et le coût de possession en utilisant la gestion calendaire **pendant le délai d'obtention** $L$, en retenant comme $s$ le niveau de recomplètement optimal.

Le *problème de la détermination de la quantité économique de commande* n'est rien d'autre que le problème étudié *en univers certain* si l'on remplace la demande annuelle certaine par la demande annuelle moyenne:

$$D = \mu = 2400.$$

En minimisant le coût de gestion:

$$C(q) = c_c I_c(q) + c_p I_p(q),$$

la solution trouvée dans le cas certain était de :

$$q^* = 490.$$

Le *problème de la détermination du stock de sécurité* est quant à lui résolu en prenant pour point de commande $s$ le *niveau de recomplètement* $S$ qui minimise le coût d'une gestion calendaire durant le délai d'obtention $L$ :

$$C(S) = c_p I_p(S) + c_r I_r(S)$$

avec $I_r(S)$, le nombre moyen d'articles non fournis durant $L$ et $I_p(S)$, le stock moyen possédé durant $L$.

En moyenne, on rencontre le problème de gestion calendaire :

$$\frac{2400}{490} = 4{,}9 \text{ fois l'an}$$

ou encore tous les

$$288\frac{490}{2400} = 58{,}81 \text{ jours.}$$

Remarquons que le stock moyen possédé $I_p(S)$ correspond à *une immobilisation sur 59 jours et non sur les 20 jours* donc le coût unitaire de possession est de :

$$c_p = c_p\frac{q}{D} = 6 \times 0{,}2042 \text{ F/article/59 jours.}$$

En effet, un article encore en stock à l'issue des 20 jours du délai d'obtention augmentera d'une unité la valeur du stock durant toute la durée d'écoulement de la suivante commande, c'est-à-dire durant 59 jours. D'où la fonction objectif :

$$C(S) = 6 \times 0{,}2042 I_p(S) + 10 I_r(S)$$

En utilisant la gestion calendaire, on déduit :

$$\begin{aligned} P(X > S^*) &= \frac{c_p}{c_r + c_p/2} \\ &= \frac{6 \times 0{,}2042}{10 + 6 \times 0{,}2042/2} = 0{,}115 \end{aligned}$$

La demande $X$ durant le délai d'obtention de 20 jours est une N(167,50). On lit dans la table de la normale N(0,1) :

$$P(Z > 1{,}2) = 0{,}115$$

D'où

$$1{,}2 = \frac{S^* - 167}{50}$$

D'où finalement

$$S^* = 227.$$

### 4.4.2 Conséquences économiques du choix

Le **stock de sécurité** est défini comme *différence entre le niveau de recomplètement et la demande moyenne durant* $L$ et vaut ici :

$$227 - 167 = 60 \text{ articles.}$$

Le **nombre moyen de commandes** dépend uniquement de $q$ et se calcule par la formule :

$$I_c(q) = \frac{D}{q} = \frac{2400}{490} = 4,898 \text{ commandes.}$$

Le **nombre moyen de ruptures** au cours d'un cycle, noté $I_r^c$, se calcule par la formule de la gestion calendaire :

$$I_r^c(s = 227) = \sigma \times g(t_s = 1,2) = 50 \times 0,0561 = 2,81$$

Or le nombre de cycles est égal au nombre de commandes $I_c(q)$. Le nombre moyen de ventes manquées par an s'élève donc à :

$$I_r(s) = I_c(q) \times I_r^c(q) = 4,898 \times 2,81 = 13,76 \text{ articles}$$

Le calcul du **stock moyen possédé** est plus compliqué car il dépend à la fois de $s$ et de $q$. On peut montrer (voir Giard [6], chapitre 4, relation (20), p277) que :

1. en cas de *ventes manquées perdues :*

$$I_p(s,q) = \frac{q}{2} + (s - DL) + \frac{I_r^c(s)}{2}$$

   Le *coût de gestion correspondant* vaut :

$$C(s,q) = c_c\frac{D}{q} + c_p(\frac{q}{2} + s - DL) + (\frac{c_p}{2} + c_r\frac{D}{q})I_r^c(s)$$

2. en cas de *ventes manquées différées :*

$$I_p(s,q) = \frac{q}{2} + (s - DL) + \frac{DL}{2q}I_r^c(S)$$

   où $I_r^c(s)$ note le nombre moyen de ruptures par cycle (durant le délai d'obtention). Le *coût de gestion correspondant* vaut :

$$C(s,q) = c_c\frac{D}{q} + c_p(\frac{q}{2} + s - DL) + (\frac{c_pL}{2} + c_r)\frac{D}{q}I_r^c(s)$$

Dans le cas présent, les ventes manquées sont supposées perdues pour le supermarché et donc le **stock moyen possédé** se calcule par la formule suivante :

$$\begin{aligned} I_p(s,q) &= \frac{q}{2} + (s - DL) + \frac{I_r^c(s)}{2} \\ &= \frac{490}{2} + 60 + \frac{2,81}{2} \\ &= 306,405 \end{aligned}$$

On en déduit le **coût de gestion total** suivant :

$$\begin{aligned} C(s,q) &= c_c I_c(q) + c_p I_p(q,s) + c_r I_c(q) I_r^c(s) \\ &= 300\,\frac{2400}{490} + 6 \times 306,4 + 10\,\frac{2400}{490}\,2,81 \\ &= 1\,469,39 + 1838,43 + 137,63 \\ &= 3\,445,45 \end{aligned}$$

La **marge nette moyenne** annuelle est obtenue en soustrayant à la marge bénéficiaire sur la demande moyenne le coût de gestion annuel :

$$\begin{aligned} B(s,q) &= m_u D - C(s,q) \\ &= 24\,000 - 3445,45 \\ &= 20\,554,54 \end{aligned}$$

On utilise également un indicateur appelé le **taux de rotation du stock**.

**Définition 4.1** *On définit le taux de rotation du stock comme le quotient de la demande moyenne sur le stock moyen possédé.*

Dans le cas de l'exemple, il se calcule comme suit :

$$r = \frac{D}{I_p} = \frac{2400}{306,4} = 7,83$$

Le lecteur intéressé trouvera dans Giard [6] de nombreuses améliorations du modèle vu ici, notamment :

- La politique optimale $(q,s)$ dans le cas de demande et délai d'obtention aléatoires,
- La prise en compte de l'interdépendance entre articles,
- La prise en compte de rabais uniformes,
- La prise en compte de rabais progressifs,
- ...

## 4.5 Exercices

4.1. **Gestiondel'approvisionnementdustockdetransistors.** Unesociétéde distributiondematérieletcomposantsélectroniquesayantcommeclientèle lesartisansréparateursdematérielhi-figrandpublicestentrainderedéfinir sapolitiqued'approvisionnementdesstocks. Onvouschargedel'aiderdans cettetâche. Leresponsabledesachatsvoussoumet, àtitred'exemple, le casd'untransistordontleprixd'achatestde16Fetdontlaconsommation estde15.000unitéssurl'année. Lademandeestuniformémentrépartiesur toutel'annéequicomporte50semainesd'ouverture. Lecoûtdepassation d'unecommandeest estiméà24F.Parailleurs, étantdonnél'évolution techniquerapideetlesrisquesd'obsolescenceassociés,onappliqueuntaux dedétentionenstocktrèsélevé:50%paran. Pourlemomentlatechnique desdeuxcasiersestappliquée:ondisposededeuxcasiers,decontenancede 500transistors. Dèsqu'uncasierestvide,onentamelesecondetonpasse unecommandede500transistors. Ledélaid'obtentiondelacommandeest d'unesemaine.

(a) Calculezlecoûtdelapolitiqueactuelledegestiondestock. Pourcela, déterminezlestockmoyenetlenombredecommandesparan.

(b) Déterminezlapolitiqueoptimaledegestiondustock. Donnezlemon-tantdelacommandeetlepointdecommande.

(c) Quelleestl'économieannuelledevotresolutionparrapportàlatech-niquedesdeuxcasiersutiliséeaujourd'hui?

4.2. **Ventedeverredecristal.** Ungrandmagasinvendchaquesemaine150 cartonsdesixverresdumodèle"Elite". Lecoûtd'achatde6verresestde 8euros,etlecoûtassociéàunecommandeestévaluéà30euros. Lecoût depossessionutiliséenefaitintervenirqu'uncoûtd'opportunité, lequelse calculeàl'aided'untauxde15%. Onsupposequelademandeestune certaineetqu'iln'estpaspossibled'avoirderupturedestock. Lagestion destockestdutypepointdecommande.

(a) Calculezlacommandeoptimale.

(b) Ledélaidelivraisonétantégalàdeuxsemaines,déterminezlepoint decommande(l'annéecomporte52semaines).

(c) Calculezlecoûtdegestiondestockcorrespondantàcettesolution.

4.3. **Ventedeverredecristalenuniversaléatoire.** Lademandehebdomadaire n'estmaintenantplusconsidéréecommecertaine, maiscommealéatoire. Ellesuituneloinormaledemoyenne150etd'écart-type50. Lecoûtde rupture est estimé à 2 euros, parce que la demi-douzaine est vendue 10 euros et que la direction estime que la rupture de stock de cet article n'est pas préjudiciable à son image de marque. Calculez le nouveau point de commande, le nombre moyen annuel de demi-douzaines de verres que le grand magasin n'a pas été en mesure de vendre, le stock moyen possédé ainsi que le coût de gestion annuel.

4.4. **Ventes de carafes à eau.** Un supermarché vend des carafes à eau 50F. Il les achète auprès de son fournisseur 35F. La demande hebdomadaire suit une loi de Poisson de paramètre 5. On utilise un taux d'opportunité de 15% l'an. Le coût de passation d'une commande est de 30F. Le délai d'approvisionnement est de deux semaines.

   (a) Quelle est la quantité à commander?
   (b) Quel est le niveau de stock qui doit déclencher la commande?
   (c) Quel est le nombre moyen de clients non satisfaits pendant le délai de deux semaines entre la passation de la commande et sa réception?

4.5. **Vente par correspondance.** Une société spécialisée dans le vente par correspondance a un article peu vendu. Il s'agit d'un matelas orthopédique. La demande mensuelle de cet article suit une loi de Poisson de moyenne 8. L'acheteur responsable de l'approvisionnement hésite entre trois systèmes:

   (a) La gestion calendaire avec une période de révision calendaire de deux mois. Le coût de commande est estimé à 20 euros, le produit est acheté 200 euros et revendu 350 euros (y compris le coût moyen de transport vers le client de 50 euros). La régularité de l'approvisionnement permet d'avoir un délai d'obtention insignifiant. Une demande non satisfaite est différée avec un coût de 10 euros (frais administratifs).
   (b) Une gestion du type quantité économique de commande-point de commande avec les mêmes coûts que précédemment, mais avec cette fois un délai d'obtention de 15 jours environ.
   (c) Servir d'intermédiaire en répercutant au fournisseur la commande, ce qui permet à l'entreprise de percevoir une commission de 50 euros.

   L'entreprise estime que la rentabilité marginale de son capital est de 24%. Après étude du bénéfice net dans les trois cas, que préconisez-vous?

# PartieII

# Lesd´ecisionstactiques

# Chapitre5

# Laplanificationdelaproduction

## 5.1 Introduction

Laplanificationdelaproductionconsisteenla*régulation àmoyenterme*dela production. C'estdoncune**décisiontactique.** Ellefaitlelienentrelesdécisions opérationnellesàcourttermeetlesdécisionsstratégiquesàlongterme. Laplanificationdelaproductions'adresseuniquement**aucasdelaproductionensérie.** Ellenes'appliquedoncpasaucasdelaproductionensérieunitaire.

Ilexiste**deuxtypesd'approches**enplanificationdelaproduction:

- la*planificationdesbesoinsencomposants*quiviseàétablirune*programmationprévisionnelledescomposants*;
- la*planificationjuste àtemps*dontleprincipefondamentalestdeproduirela quantité*strictementnécessaire*auxbesoinsimmédiatsduclient.

La**planificationdesbesoinsencomposants**ouM.R.P. (MaterialRequirementPlanning)chercheàétablirlaprogrammationdelaproductionsurbased'un systèmed'information. Partant des*donnéesphysiques*(stocksdisponibles, livraisonsattendues,demandesprévisionnelles,capacitésdeproduction, … )etdes *donnéescomptables*(coûtsdeproduction, d'approvisionnement, derupture), on établitun**plandeproduction**quidéterminepourchaquepériodelesquantités àproduireparproduit, lesquantitésfabriquéesdanschaquecentreproductif, le niveaudestockenproduitssemi-finisetfinisetl'utilisationdesfacteurstravailet machines. L'utilisation**destechniquesd'optimisation**aboutit àune**programmationprévisionnelle**:onutiliserala*programmationdynamique*lorsquel'ona unedemandedynamiquecertaineneportantquesurunseularticleetla*programmationlinéaire*danslecasstatiqueportantsurplusieursproduits.

## 5.2 Laplanificationdesbesoinsencomposants

Illustronsleprincipedelaplanificationdesbesoinsencomposantssurunexemple tiréedeGiard[6]: ils'agitdel'assemblagedetroisvéhiculesàmoteur. Laplanificationdesbesoinsencomposantsnécessitel'existencedeséléments suivants:

1. **Unenomenclaturecomplète:** c'est-à-direunecodificationdetousles composantsquipermetd'écrirelesch émaarborescentdutableau5.1. Dans l'exemple,pourfaireunevoiture(T27),ilfautuneboîtedevitesse(E1001), ellemêmeconstituéed'unengrenage(E2010),lui-mêmeconstituédedivers éléments(E3047etE3052).

| Niveau0 | | Niveau1 | | Niveau2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| T27 | -E1001(1)<br>-E1010(1)<br>... | E1001 | -E2010(1)<br>... | E2010 | -E3047(1)<br>-E3052(1)<br>... |
| T28 | -E1001(1)<br>-E1020(1)<br>... | E1004 | -E2040(1)<br>... | E2040 | -E3047(2)<br>-E3052(2)<br>... |
| T29 | -E1004(1)<br>-E1020(1)<br>... | ... | | ... | |

Tableau5.1:Décompositionencomposants

2. **Unplandirecteurdeproduction:** le*plandirecteurdeproduction*est leplandemiseàdispositiondeproduitsfinaux. Ilpeut égalementcomporterleplandemiseàdispositiondesous-ensemblesoudecomposants venduscommepiècesdétachées. Leplandirecteurdeproductiondonnéau tableau5.2prévoituniquementlamiseàdispositiondesproduitsfinaux.

| Période | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DemandeT27 | 711615811127 | | | | | | | |
| DemandeT28 | 10 | 9 | 4 | 1071488 | | | | |
| DemandeT29 | 483512287 | | | | | | | |
| Exxxx | 00000000 | | | | | | | |

Tableau5.2:Plandirecteurdeproduction.

3. **Un système d'information sur les stocks** qui permet de connaître l'état exact du stock de chaque composant en début de chaque période. Les stocks de fin de période 15 (notés $SF_{15}$) sont donnés au tableau 5.3.

| Element | $SF_{15}$ | $LA_{16}$ | $LA_{17}$ |
|---|---|---|---|
| T27 | 0 | 0 | 0 |
| T28 | 0 | 0 | 0 |
| T29 | 0 | 0 | 0 |
| E1001 | 17 | 0 | 30 |
| E1004 | 4 | 0 | 11 |
| E2010 | 10 | 20 | 0 |
| E2040 | 0 | 0 | 17 |
| E3047 | 0 | 0 | 0 |

Tableau 5.3: Stock initiaux et livraisons attendues.

4. **Un fichier des livraisons attendues:** c'est-à-dire donnant le nombre de pièces résultant de commandes du passé qui n'ont pas encore été livrées. Les livraisons attendues de période $t$ (notées $LA_t$) sont données au tableau 5.3.

5. **Un fichier des délais d'obtention:** le *délai d'obtention* étant la somme des temps opératoire, de lancement de production et d'attente entre deux productions. Les délais d'obtention sont donnés au tableau 5.4.

| Element | Délai d'obtention |
|---|---|
| T27 | 1 semaine |
| T28 | 1 semaine |
| T29 | 1 semaine |
| E1001 | 1 semaine |
| E1004 | 2 semaines |
| E2010 | 1 semaine |
| E2040 | 2 semaines |
| E3047 | 1 semaine |

Tableau 5.4: Délais d'obtention.

6. **Fichier des capacités des centres de production** pour chaque période de l'horizon de planification.

7. **Existence de règles de priorité en cas de surcharge.**

## 5.3 Principes de base de la MRP

La **logique de calcul** de la MRP consiste à l'utilisation en cascade

- de la détermination des besoins nets d'un composant;
- de la manière de couvrir ces besoins.

### 5.3.1 Détermination des besoins nets d'un composant

Illustrons ceci sur l'exemple du composant de niveau un E1001. Pour ce composant, sa demande émane des demandes de T27 et T28. Au niveau 0, les lancements programmés sont déterminés conformément au plan directeur de production donné au tableau 5.2. On suppose ici un délai d'assemblage d'une semaine pour les trois modèles (voir tableau 5.4). On suppose également qu'au niveau zéro, il n'y a pas de stock initial ni de livraisons attendues. Au niveau zéro, on fait du *lot par lot*, c'est-à-dire que l'on met en production exactement la demande. Ceci conduit aux lancements de productions de niveau zéro du tableau 5.5.

| Période | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Lancements T27 | 7 | 11 | 6 | 15 | 8 | 11 | 12 | 7 |
| Lancements T28 | 10 | 9 | 4 | 10 | 7 | 14 | 8 | 8 |
| Lancements T29 | 4 | 8 | 3 | 5 | 12 | 2 | 8 | 7 |

Tableau 5.5: Lancements de production de niveau zéro.

On peut en déduire les besoins bruts du composant E1001 puisqu'il est utilisé à raison de un par T27 et de un par T28. Les **besoins bruts** du composant E1001 sont donnés au tableau 5.6. Ces besoins bruts ne correspondent pas à la production

| Période | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Besoins Bruts pour T27 | 7 | 11 | 6 | 15 | 8 | 11 | 12 | 7 |
| Besoins Bruts pour T28 | 10 | 9 | 4 | 10 | 7 | 14 | 8 | 8 |
| Besoins Bruts totaux | 17 | 20 | 10 | 25 | 15 | 25 | 20 | 15 |

Tableau 5.6: Besoins bruts en composant E1001.

qu'il est nécessaire de mettre en route, compte tenu du stock initial disponible pour cette référence et des éventuelles livraisons attendues.

Les livraisons attendues sont des quantités résultant de précédents ordres de lancement de production mais qui n'ont pas encore été livrées. Le stock initial en période 16 est le stock final de période 15. Ces informations sont reprises au tableau 5.7.

| Période | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Besoins bruts | | 17 | 20 | 10 | 25 | 15 | 25 | 20 | 15 |
| Livraisons attendues | | 0 | 30 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Stock final | 17 | 0 | 10 | 0 | - | - | - | - | - |
| Besoins nets | | 0 | 0 | 0 | 25 | 15 | 25 | 20 | 15 |

Tableau 5.7: Besoins nets en composant E1001.

Formalisons mathématiquement la détermination des besoins nets, c'est-à-dire ceux qui vont nécessiter de nouveaux ordres de lancement de production. Deux cas sont possibles:

**Cas 1:** Le disponible est suffisant pour couvrir les besoins bruts. Dans ce cas, le besoin net, noté $BN_t$, est nul et le *stock final* de période $t$, noté $SF_t$, se calcule comme le stock en fin de période précédente, accru des livraisons attendues de période $t$, notées $LA_t$, et diminué de la demande de la période (les besoins bruts, notés $BB_t$):

$$\text{Si } SF_{t-1} + LA_t \geq BB_t, \text{ alors } \begin{array}{ll} BN_t & = 0 \\ SF_t & = SF_{t-1} + LA_t - BB_t \end{array}$$

**Cas 2:** Dans le cas contraire, on a des besoins nets à couvrir par de nouveaux ordres de fabrication. Les *besoins nets de la période* $t$, notés $BN_t$, se calculent comme la différence entre les besoins bruts et la somme des livraisons attendues et du niveau initial du stock de la période:

$$\text{Si } BB_t \geq SF_{t-1} + LA_t, \text{ alors } \begin{array}{ll} BN_t & = BB_t - LA_t - SF_{t-1} \\ SF_t & = 0 \end{array}$$

Les besoins nets pour le composant E1001 sont déterminés au tableau 5.7

### 5.3.2 Déterminationdelacouverturedesbesoinsnets

Enplanificationdelaproduction, onsupposequelesbesoinsnetssontconnus suffisammentàl'avancepouréviterrouterupture. La*déterminationdelaquantité àlivrerpoursatisfairelesbesoinsnets*reposedoncsurunarbitrageentre

- lescoûtsdelancementdeproduction;
- lescoûtsdepossession.

Uneméthodepermet defairecet arbitrage: il s'agit dela*programmationdynamique*.Aceniveau-ci, nousallonsfairedulot parlot, cequi conduit aux lancementsdeproductionillustrésautableau5.8.

| Période | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Livraisonsattendues | 030000000 | | | | | | | |
| Besoinsnets | 0002515 | | | | | 25 | 20 | 15 |
| Lancementsdeproduction | 30025152520150 | | | | | | | |

Tableau5.8:LancementdeproductionencomposantE1001.

Pourdéterminerleslancementsdeproduction, onatenucomptedu**délai d'obtention**, supposéicide1semaine. Remarquezquelelancementde30en période16provientnonpasd'unelivraisonprogramméedepériode17maisbien d'unelivraisonattenduedepériode17.

Remarquezégalementque,dansladéterminationdeslancementsdeproduction,ilfaudratenircomptedescapacitésdeproduction. Danslecasoùcescapacitéssontdépassées,onprocéderaàunajustementcharge-capacitécommenous leverronsplusloin.

### 5.3.3 Utilisationencascadedelalogiquedecalcul

Maintenantquecetéchéancierdelancementdeproductionestdéterminépourle composantdeniveauunE1001, ilva**êtreutiliséà aunniveausupérieur**pour calculerl'échéancierdesdemandesbrutesdescomposantsdeniveausupérieur. Ainsi,lecomposantE1001(parexemple,uneboîtedevitesse)utiliselecomposant deniveauunE2010(unengrenage).

Onappliqueladémarchedecalculquenousvenonsdevoirencascade:

- àtouteslesréférencesdeniveau0(produitsfinaux);

- puis àcellesdeniveau1;
- puis àcellesdeniveau2;
- ... etc.

Illustronscecisurl'exemple. Au**niveau0**, leslancementsprogramméés(cfr tableau5.9)sontdéterminésconformémentau*plandirecteurdeproduction*.

| Période | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T27 | 711615811127 | | | | | | | |
| T28 | 10 | 9 | 4 | 1071488 | | | | |
| T29 | 483512287 | | | | | | | |

Tableau5.9:Lancementsprogrammésdeniveauzéro.

Au**niveau1,**leslancementsducomposantE1001,dedélaidefabrication $L$=1, sontdéterminésconformémentautableau5.10. Cecomposantestutilisé àraison

| Période | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| BesoinsbrutspourT27 | | 711615811127 | | | | | | | |
| BesoinsbrutspourT28 | | 10 | 9 | 4 | 1071488 | | | | |
| Total | | 17 | 20 | 10 | 25 | 15 | 25 | 20 | 15 |
| Livraisonsattendues | | 030000000 | | | | | | | |
| Stockfinal | 170100----- | | | | | | | | |
| Besoinsnets | | 0002515 | | | | | 25 | 20 | 15 |
| Lancementsdeproduction | | 30025152520150 | | | | | | | |

Tableau5.10:LancementsencomposantE1001.

d'uneunitéparproduitT27etd'uneunitéparproduitT28. Toujoursauniveau1, leslancementsducomposantE1004(dedélaidefabrication $L$=2)sontdéterminés conformémentautableau5.11. Cecomposantestutilisé àraisond'uneunitépar produitT29.

Au**niveau2**, leslancementsducomposant E2010(dedélai defabrication $L$=1)sontdéterminésconformémentautableau5.12. Cecomposantestutilisé à raisond'uneunitéparcomposantdeniveau1E1001. Toujoursau**niveau2**,les

| P´eriode | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| BesoinsbrutspourT29 | | 483512287 | | | | | | | |
| Livraisonsattendues | | 011000000 | | | | | | | |
| Stockfinal | 4030----- | | | | | | | | |
| Besoinsnets | | 000512287 | | | | | | | |
| Lancementsdeproduction | 11 | 051228700 | | | | | | | |

Tableau5.11:LancementsencomposantE1004.

| P´eriode | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| BesoinsbrutspourE1001 | | 3002515252015 | | | | | | |
| Livraisonsattendues | | 20 | 000000 | | | | | |
| Stockfinal | 10 | 000---- | | | | | | |
| Besoinsnets | | 002515 | | | | 25 | 20 | 15 |
| Lancementsdeproduction | 20025152520150 | | | | | | | |

Tableau5.12:LancementsencomposantE2010.

lancementsducomposantE2040(ded´elaidefabrication $L$=2)sontd´etermin´es conform´ementautableau5.13. Cecomposantestutilis´e` araisond'uneunit´epar

| P´eriode | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| BesoinsbrutspourE1004 | | 0512287 | | | | | |
| Livraisonsattendues | | 0170000 | | | | | |
| Stockfinal | 00120--- | | | | | | |
| Besoinsnets | | 000287 | | | | | |
| Lancementsdeproduction | 17 | 028700 | | | | | |

Tableau5.13:LancementsencomposantE2040.

composantdeniveauunE1004.

Au**niveau3**,leslancementsducomposantE3047(ded´elaidefabrication $L$=1) sontd´etermin´esconform´ementautableau5.14. Cecomposantestutilis´e` araison

| P´eriode | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| BesoinsbrutspourE2010 | | 02515252015 | | | | | |
| BesoinsbrutspourE2040 | | 041614 | | | | 0 | 0 |
| Total | | 02931392615 | | | | | |
| Livraisonsattendues | | 000000 | | | | | |
| Stockfinal | 0000000 | | | | | | |
| Besoinsnets | | 02931392015 | | | | | |
| Lancementsdeproduction | | 29 | 31 | 39 | 20 | 15 | - |

Tableau5.14:LancementsencomposantE3047.

d'uneunit´eparcomposantdeniveaudeuxE2010etdedeuxunit´esparcomposant deniveaudeuxE2040.

Remarquonspourterminerqu'ilpeutexisterun**lottechnique**pourlelancement deproduction. Parexemple, laproductiondemoteursd'automobilesefaitpar multiplede8carlesmoulesdefonderiesontpr´evuspourcouler8moteurspar moule. Danscecas,ilfaut´evidemmentprendreunmultipledecelottechnique pourlelancementdeproduction. Cecasseraillustr´eparl'exercice5.5.

## 5.4 Ajustement charge-capacité

Lorsque les lancements de production sont déterminés, on peut calculer les charges résultantes pour les différents ateliers. Pour que ce plan de production soit *réalisable*, il faut que la charge résultante respecte les capacités de production. Si ce n'est pas le cas, un **ajustement "charge-capacité"** est effectué.

Illustrons ceci sur un second exemple tiré également de Giard [6]. Une entreprise assemble trois produits A, B et C dans un atelier d'assemblage final. Cette production s'effectue à partir de trois *sous-ensembles* F, G et H assemblés dans un autre atelier d'assemblage intermédiaire. Ces sous-ensembles font appel aux composants V, W, X et Y dont X est acheté à l'extérieur tandis que V, W et Y sont fabriqués dans l'atelier d'usinage. La nomenclature est donnée au tableau 5.15.

$$\text{A utilise } \begin{cases} 1F \\ 1G \end{cases} \qquad \text{F utilise } \begin{cases} 1V \\ 1W \\ 2X \end{cases}$$

$$\text{B utilise } \begin{cases} 1F \\ 1G \\ 1H \end{cases} \qquad \text{G utilise } \begin{cases} 1W \\ 2X \end{cases}$$

$$\text{C utilise } \begin{cases} 1G \\ 1H \end{cases} \qquad \text{H utilise } \begin{cases} 1V \\ 1W \\ 1X \\ 1Y \end{cases}$$

Tableau 5.15: Nomenclature.

Pour cet exemple, on suppose qu'il n'y a pas de problème de capacité au niveau 0. Le tableau 5.16 donne les capacités de production des ateliers d'assemblage intermédiaire (F, G et H) et d'usinage (V, W et Y).

| | Janvier | Février | Mars | Avril | Mai |
|---|---|---|---|---|---|
| Ass. final (A,B,C) | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| Ass. interm. (F,G,H) | 1.150h | 1.150h | 1.150h | 1.250h | 1.250h |
| Usinage (V,W,Y) | 1.630h | 1.600h | 1.700h | 1.650h | 1.650h |
| | **Juin** | **Juillet** | **Août** | **Septembre** | **Octobre** |
| Ass. final (A,B,C) | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| Ass. interm. (F,G,H) | 1.280h | 1.250h | 1.200h | 1.200h | 1.200h |
| Usinage (V,W,Y) | 1.700h | 1.600h | 1.650h | 1.650h | 1.650h |

Tableau 5.16: Capacités de production.

Leplandirecteurdeproduction,donnéautableau5.17,comporteleslivraisons prévuesenproduitsfinauxmaisaussilesdemandescommepiècesdétachéesen sous-ensemblesetencomposants.

| | Janvier | Février | Mars | Avril | Mai | Juin |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Produitsfinis | | | | | | |
| A | 10.300 | 12.800 | 9.700 | 10.500 | 9.700 | 10.000 |
| B | 12.600 | 13.400 | 12.000 | 10.700 | 10.100 | 11.500 |
| C | 17.400 | 20.100 | 16.300 | 17.500 | 18.000 | 19.000 |
| Sous-ensembles | | | | | | |
| F | 1.500 | 1.400 | 1.500 | 1.600 | 2.100 | 1.800 |
| G | 1.700 | 1.200 | 1.700 | 1.600 | 1.800 | 1.500 |
| H | 2.000 | 2.300 | 1.800 | 1.900 | 2.100 | 2.000 |
| Composants | | | | | | |
| V | 4.000 | 3.500 | 3.800 | 3.100 | 3.600 | 3.600 |
| W | 700 | 1.000 | 1.100 | 900 | 1.100 | 1.300 |
| X | 3.000 | 2.500 | 2.500 | 2.500 | 2.500 | 2.500 |
| Y | 1.600 | 1.700 | 1.100 | 1.500 | 1.500 | 1.500 |

| | Juillet | Août | Septembre | Octobre | Novembre | Décembre |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Produitsfinis | | | | | | |
| A | 10.600 | 11.000 | 13.000 | 10.000 | 10.000 | 10.000 |
| B | 12.000 | 11.600 | 11.200 | 11.000 | 11.000 | 11.000 |
| C | 21.500 | 20.900 | 20.100 | 19.000 | 19.500 | 19.500 |
| Sous-ensembles | | | | | | |
| F | 1.800 | 2.000 | 1.600 | 1.400 | 1.600 | 1.600 |
| G | 1.400 | 1.300 | 1.200 | 1.400 | 1.800 | 1.700 |
| H | 2.100 | 2.000 | 2.000 | 2.000 | 2.000 | 2.000 |
| Composants | | | | | | |
| V | 3.500 | 3.400 | 3.500 | 3.500 | 3.500 | 3.500 |
| W | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| X | 2.500 | 2.500 | 2.500 | 2.500 | 2.500 | 2.500 |
| Y | 1.500 | 1.500 | 1.500 | 1.500 | 1.500 | 1.500 |

Tableau5.17:Plandirecteurdeproduction.

Leslivraisonsattendueset lespositionsinitialesdestocksont reprisesau tableau5.18.

Lecoûthorairedanschacundesateliersestdonnéautableau5.19.

Lestempsopératoiresunitaires, lesdélaisd'obtentionainsiquelecoûtdes

Livraisonsattendues

| | Janvier | Février |
|---|---|---|
| **Produitsfinis** | | |
| A | 10.000 | 0 |
| B | 12.500 | 0 |
| C | 17.300 | 0 |
| **Sous-ensembles** | | |
| F | 27.400 | 23.000 |
| G | 48.200 | 0 |
| H | 31.400 | 0 |
| **Composants** | | |
| V | 56.600 | 55.500 |
| W | 91.200 | 0 |
| X | 154.000 | 0 |
| Y | 31.800 | 0 |

Stockfinal

| | Décembre |
|---|---|
| **Produitsfinis** | |
| A | 300 |
| B | 100 |
| C | 100 |
| **Sous-ensembles** | |
| F | 500 |
| G | 700 |
| H | 4.800 |
| **Composants** | |
| V | 500 |
| W | 500 |
| X | 1.000 |
| Y | 300 |

Tableau5.18:Livraisonsattenduesetpositiondustock.

| | (Francs/heure) |
|---|---|
| Assemblagefinal(A,B,C) | 90F/h |
| Assemblageintermédiaire(F,G,H) | 100F/h |
| Usinage(V,W,Y) | 150F/h |

Tableau5.19:Coûthorairedesateliers.

mati`erespremi`eresajout´eesauxdiff´erents´etapesdefabricationsont reprisau tableau5.20.

| | Tempsop´eratoire | | D´elai(mois) | | Co^utmati`erespremi`eres |
|---|---|---|---|---|---|
| Produitsfinis | | Produitsfinis | | Produitsfinis | |
| A | 0,020h/un | A | 1mois | A | 5F/un |
| B | 0,010h/un | B | 1mois | B | 6F/un |
| C | 0,020h/un | C | 1mois | C | 6,5F/un |
| Sous-ensembles | | Sous-ensembles | | Sous-ensembles | |
| F | 0,005h/un | F | 2mois | F | 1F/un |
| G | 0,010h/un | G | 1mois | G | 2F/un |
| H | 0,020h/un | H | 1mois | H | 1F/un |
| Composants | | Composants | | Composants | |
| V | 0,005h/un | V | 2mois | V | 0,5F/un |
| W | 0,010h/un | W | 1mois | W | 0,75F/un |
| Y | 0,010h/un | Y | 1mois | Y | 1F/un |
| X | - | X | 1mois | X | 2F/un |

Tableau5.20:Tempsop´eratoires,d´elaisd'obtentionetco^utdesmati`erespremi`eres.

Calculonsles**lancementsduniveauassemblagefinal.** Comme`acen iveau, iln'yapasdeprobl`emesdecapacit´e, lesproductionsprogramm´eescouvriront exactementlesbesoinsnets. Entenantcomptedud´elaid'obtentiond'unmois,on obtientleslancementsdutableau5.21.

D´eterminonsmaintenant les**lancementsdeproductiondeniveau1.** Les productionsAetButilisent1sous-ensembleF.AcesbesoinsbrutsdeJanvierpour A(12.800)etB(13.400), ilfautajouterlesbesoinsbrutspourpi`ecesd´etach´ees (1.500). Remarquezqu'il n'yapasded´ecalagepourlespi`ecesd´etach´eespar rapportauplandirecteurdeproduction. Letotaldisponiblepoursatisfaireces besoinsbruts(27.900)r´esultedel'additiondustockfinalaumoispr´ec´edent(500) etdeslivraisonsattendues(27.400). LeniveaudustockenfinJanvier(200)r´esulte deladiff´erenceentreletotaldisponible(27.900)etlesbesoinsbruts(27.700). En Mars,lesbesoinsnetsde22.600unit´esr´esultentdeladiff´erenceentrelesbesoins brutsde22.700et lestockinitial disponiblede100. Cesbesoinsnetsseront couvertsparuneproductionlanc´eedeuxmoisplust^ot(il faut tenircomptedu d´elaidefabricationdedeuxmoispourF).Onobtientletableaudeslancementsde productionillustr´eautableaux5.22et5.23.

LancementsdeA

| | Décembre | Janvier | Février | Mars | Avril | Mai | Juin |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $BB_t$ | | 10.300 | 12.800 | 9.700 | 10.500 | 9.700 | 10.000 |
| $LA_t$ | | 10.000 | | | | | |
| $SF_t$ | 300000000 | | | | | | |
| $BN_t$ | | 0 | 12.800 | 9.700 | 10.500 | 9.700 | 10.000 |
| $LP_t$ | 10.000 | 12.800 | 9.700 | 10.500 | 9.700 | 10.000 | 10.600 |

LancementsdeA(suite)

| | | Juillet | Août | Septembre | Octobre | Novembre | Décembre |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $BB_t$ | | 10.600 | 11.000 | 13.000 | 10.000 | 10.000 | 10.000 |
| $LA_t$ | | | | | | | |
| $SF_t$ | | 000000 | | | | | |
| $BN_t$ | | 10.600 | 11.000 | 13.000 | 10.000 | 10.000 | 10.000 |
| $LP_t$ | | 11.000 | 13.000 | 10.000 | 10.000 | 10.000 | - |

LancementsdeB

| | Décembre | Janvier | Février | Mars | Avril | Mai | Juin |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $BB_t$ | | 12.600 | 13.400 | 12.000 | 10.700 | 10.100 | 11.500 |
| $LA_t$ | | 12.500 | | | | | |
| $SF_t$ | 100000000 | | | | | | |
| $BN_t$ | | 0 | 13.400 | 12.000 | 10.700 | 10.100 | 11.500 |
| $LP_t$ | 12.500 | 13.400 | 12.000 | 10.700 | 10.100 | 11.500 | 12.000 |

LancementsdeB(suite)

| | | Juillet | Août | Septembre | Octobre | Novembre | Décembre |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $BB_t$ | | 12.000 | 11.600 | 11.200 | 11.000 | 11.000 | 11.000 |
| $LA_t$ | | | | | | | |
| $SF_t$ | | 000000 | | | | | |
| $BN_t$ | | 12.000 | 11.600 | 11.200 | 11.000 | 11.000 | 11.000 |
| $LP_t$ | | 11.600 | 11.200 | 11.000 | 11.000 | 11.000 | - |

LancementsdeC

| | Décembre | Janvier | Février | Mars | Avril | Mai | Juin |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $BB_t$ | | 17.400 | 20.100 | 16.300 | 17.500 | 18.000 | 19.000 |
| $LA_t$ | | 17.300 | | | | | |
| $SF_t$ | 100000000 | | | | | | |
| $BN_t$ | | 0 | 20.100 | 16.300 | 17.500 | 18.000 | 19.000 |
| $LP_t$ | 17.300 | 20.100 | 16.300 | 17.500 | 18.000 | 19.000 | 21.500 |

LancementsdeC(suite)

| | | Juillet | Août | Septembre | Octobre | Novembre | Décembre |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $BB_t$ | | 21.500 | 20.900 | 20.100 | 19.000 | 19.500 | 19.500 |
| $LA_t$ | | | | | | | |
| $SF_t$ | | 000000 | | | | | |
| $BN_t$ | | 21.500 | 20.900 | 20.100 | 19.000 | 19.500 | 19.500 |
| $LP_t$ | | 20.900 | 20.100 | 19.000 | 19.500 | 19.500 | - |

Tableau5.21:Lancementdeproduction(niveau0).

Détermination des lancements de F

| | Déc. | Janvier | Février | Mars | Avril | Mai |
|---|---|---|---|---|---|---|
| BB pour A | | 12.800 | 9.700 | 10.500 | 9.700 | 10.000 |
| BB pour B | | 13.400 | 12.000 | 10.700 | 10.100 | 11.500 |
| BB pour pdt | | 1.500 | 1.400 | 1.500 | 1.600 | 2.100 |
| BB totaux | | 27.700 | 23.100 | 22.700 | 21.400 | 23.600 |
| LA | | 27.400 | 23.000 | | | |
| SF | 500 | 200 | 100 | 0 | 0 | 0 |
| BN | | 0 | 0 | 22.600 | 21.400 | 23.600 |
| LP | | 22.600 | 21.400 | 23.600 | 24.400 | 24.400 |

Détermination des lancements de F (suite)

| | Juin | Juillet | Août | Septembre | Octobre | Novembre |
|---|---|---|---|---|---|---|
| BB pour A | 10.600 | 11.000 | 13.000 | 10.000 | 10.000 | 10.000 |
| BB pour B | 12.000 | 11.600 | 11.200 | 11.000 | 11.000 | 11.000 |
| BB pour pdt | 1.800 | 1.800 | 2.000 | 1.600 | 1.400 | 1.600 |
| BB totaux | 24.400 | 24.400 | 26.200 | 22.600 | 22.400 | 22.600 |
| LA | | | | | | |
| SF | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| BN | 24.400 | 24.400 | 26.200 | 22.600 | 22.400 | 22.600 |
| LP | 26.200 | 22.600 | 22.400 | 22.600 | - | - |

Détermination des lancements de G

| | Déc. | Janvier | Février | Mars | Avril | Mai |
|---|---|---|---|---|---|---|
| BB pour A | | 12.800 | 9.700 | 10.500 | 9.700 | 10.000 |
| BB pour B | | 13.400 | 12.000 | 10.700 | 10.100 | 11.500 |
| BB pour C | | 20.100 | 16.300 | 17.500 | 18.000 | 19.000 |
| BB pour pdt | | 1.700 | 1.200 | 1.700 | 1.600 | 1.800 |
| BB totaux | | 48.000 | 39.200 | 40.400 | 39.400 | 42.300 |
| LA | | 48.200 | | | | |
| SF | 700 | 900 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| BN | | 0 | 38.300 | 40.400 | 39.400 | 42.300 |
| LP | | 38.300 | 40.400 | 39.400 | 42.300 | 45.600 |

Tableau 5.22: Lancement de production de niveau 1 à capacité infinie (partie 1).

D´eterminationdeslancementsdeG(suite)

| | Juin | Juillet | Ao^ut | Septembre | Octobre | Novembre |
|---|---|---|---|---|---|---|
| BBpourA | 10.600 | 11.000 | 13.000 | 10.000 | 10.000 | 10.000 |
| BBpourB | 12.000 | 11.600 | 11.200 | 11.000 | 11.000 | 11.000 |
| BBpourC | 21.500 | 20.900 | 20.100 | 19.000 | 19.500 | 19.500 |
| BBpourpdt | 1.500 | 1.400 | 1.300 | 1.200 | 1.400 | 1.800 |
| BBtotaux | 45.600 | 44.900 | 45.600 | 41.200 | 41.900 | 42.300 |
| LA | | | | | | |
| SF | 000000 | | | | | |
| BN | 45.600 | 44.900 | 45.600 | 41.200 | 41.900 | 42.300 |
| LP | 44.900 | 45.600 | 41.200 | 41.900 | 42.300 | - |

D´eterminationdeslancementsdeH

| | D´ec. | Janvier | F´evrier | Mars | Avril | Mai |
|---|---|---|---|---|---|---|
| BBpourB | | 13.400 | 12.000 | 10.700 | 10.100 | 11.500 |
| BBpourC | | 20.100 | 16.300 | 17.500 | 18.000 | 19.000 |
| BBpourpdt | | 2.000 | 2.300 | 1.800 | 1.900 | 2.100 |
| BBtotaux | | 35.500 | 30.600 | 30.000 | 30.000 | 32.600 |
| LA | | 31.400 | | | | |
| SF | 4.800 | 700 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| BN | | 0 | 29.900 | 30.000 | 30.000 | 32.600 |
| LP | | 29.900 | 30.000 | 30.000 | 32.600 | 35.500 |

D´eterminationdeslancementsdeH(suite)

| | Juin | Juillet | Ao^ut | Septembre | Octobre | Novembre |
|---|---|---|---|---|---|---|
| BBpourB | 12.000 | 11.600 | 11.200 | 11.000 | 11.000 | 11.000 |
| BpourC | 21.500 | 20.900 | 20.100 | 19.000 | 19.500 | 19.500 |
| BBpourpdt | 2.000 | 2.100 | 2.000 | 2.000 | 2.000 | 2.000 |
| BBtotaux | 35.500 | 34.600 | 33.300 | 32.000 | 32.500 | 32.500 |
| LA | | | | | | |
| SF | 000000 | | | | | |
| BN | 35.500 | 34.600 | 33.300 | 32.000 | 32.500 | 32.500 |
| LP | 34.600 | 33.300 | 32.000 | 32.500 | 32.500 | - |

Tableau5.23:Lancementdeproductiondeniveau1`acapacit´einfinie(suite).

On peut maintenant **calculer la charge de travail résultante** au niveau 1. Une production de 22.600 de F au mois de Janvier occasionne une charge de : $22.600 \times 0{,}005 = 113$ heures. Pour G, un calcul similaire conduit à 383 heures. Tandis que pour H, il faut 598 heures. La charge découlant du plan directeur de production s'élève donc en Janvier à : $113 + 383 + 598 = 1.094$ heures, pour une capacité de 1.150 heures. Un calcul similaire (cfr tableau 5.24) montre un excédent de capacité pour tous les mois sauf en Mai pour lequel il y a un **excès de charge de 38 heures**. Celui-ci doit être reporté de Mai à une période antérieure. Comme on a un excédent de capacité suffisant le mois précédent, la totalité de l'excès de charge est reporté au mois d'Avril.

Il faut encore déterminer **sur quel sous-ensemble F, G ou H** se fera le transfert d'activité. On va *constituer le stock de valeur économique la plus faible possible*. Ce calcul se fait au moyen du coût des composants. Par exemple, V utilise 0,5 F de matière première et 0,005 heure à 150 F/h. D'où son coût de revient :

$$c_V = 0{,}5 + 0{,}005 \times 150 = 1{,}25 \text{ F.}$$

Un calcul similaire conduit à

$$c_W = 2{,}25 \text{ F}$$
$$c_Y = 2{,}50 \text{ F.}$$

On peut alors calculer le coût de revient au niveau 1. Par exemple, F utilise 1 F de matière première, 0,005 heure à 100 F/h, 1 V (à 1,25 F), 1 W (à 2,25 F) et 2 X (à 2 F). Son coût est de :

$$c_F = 1 + 0{,}005 \times 100 + 1 \times 1{,}25 + 1 \times 2{,}25 + 2 \times 2 = 9{,}00 \text{ F.}$$

Un calcul similaire conduit à

$$c_G = 9{,}25 \text{ F}$$
$$c_H = 11{,}00 \text{ F.}$$

On en déduit le coût de production d'une heure de chacun des sous-ensembles :

$$cph_F = 9{,}00 \times 200 = 1.800 \text{ F/h}$$
$$cph_G = 9{,}25 \times 100 = 925 \text{ F/h}$$
$$cph_H = 11{,}00 \times 50 = 550 \text{ F/h}$$

En **conclusion,** il est plus intéressant de stocker H bien qu'il ait *un coût de revient unitaire plus élevé!* Le temps opératoire unitaire étant de 0,02 h, les 38 heures déplacées correspondent à : $38/0{,}02 = 1.900$ unités qui sont déplacées de Mai vers Avril. On obtient l'ajustement de niveau 1 illustré au tableau 5.24.

Assemblage intermédiaire

| | Janvier | Février | Mars | Avril | Mai |
|---|---|---|---|---|---|
| Lancements F | 22.600 | 21.400 | 23.600 | 24.400 | 24.400 |
| Lancements G | 38.300 | 40.400 | 39.400 | 42.300 | 45.600 |
| Lancements H | 29.900 | 30.000 | 30.000 | 32.600 | 35.500 |
| Assemblage F | 113 | 107 | 118 | 122 | 122 |
| Assemblage G | 383 | 404 | 394 | 423 | 456 |
| Assemblage H | 598 | 600 | 600 | 652 | 710 |
| Heures d'assemblage | 1.094 | 1.111 | 1.112 | 1.197 | 1.288 |
| Heures disponibles | 1.150 | 1.150 | 1.150 | 1.250 | 1.250 |
| Excès de charge | | | | | 38 |
| Ajustement | | | | +38 | -38 |
| Report de H | | | | +1.900 | -1.900 |
| Lancements de F | 22.600 | 21.400 | 23.600 | 24.400 | 24.400 |
| Lancements de G | 38.300 | 40.400 | 39.400 | 42.300 | 45.600 |
| Lancements de H | 29.900 | 30.000 | 30.000 | 34.500 | 33.600 |

Assemblage intermédiaire (suite)

| | Juin | Juillet | Août | Septembre | Octobre |
|---|---|---|---|---|---|
| Lancements F | 26.200 | 22.600 | 22.400 | 22.600 | - |
| Lancements G | 44.900 | 45.600 | 41.200 | 41.900 | 42.300 |
| Lancements H | 34.600 | 33.300 | 32.000 | 32.500 | 32.500 |
| Assemblage F | 131 | 113 | 112 | 113 | - |
| Assemblage G | 449 | 456 | 412 | 419 | 423 |
| Assemblage H | 692 | 666 | 640 | 650 | 650 |
| Heures d'assemblage | 1.272 | 1.235 | 1.164 | 1.182 | - |
| Heures disponibles | 1.280 | 1.250 | 1.200 | 1.200 | 1.200 |
| Excès de charge | | | | | |
| Ajustement | | | | | |
| Report de H | | | | | |
| Lancements F | 26.200 | 22.600 | 22.400 | 22.600 | - |
| Lancements G | 44.900 | 45.600 | 41.200 | 41.900 | 42.300 |
| Lancements H | 34.600 | 33.300 | 32.000 | 32.500 | 32.500 |

Tableau 5.24: Ajustement charge-capacité de niveau 1.

## 5.5 Exercices

5.1. **Planningdeproductiond’unmoteur.** Unindustrielcherche`a´ etablirson planningdeproductionpourlesquatrepremiersmoisdel’ann´eed’unmoteur Cintervenantdansl’assemblagedestroistypesdemachinesMA,MBetMC. Leplandirecteurdeproductionpr´evoitlamise`adispositionlessixpremiers moisdel’ann´eedesquantit´essuivantespourlestroistypesdemachines:

| Mois | Janvier | F´evrier | Mars | Avril | Mai | Juin |
|---|---|---|---|---|---|---|
| MA | 3 | 1 | 2 | 1 | 7 | 3 |
| MB | 1 | 3 | 1 | 5 | 4 | 2 |
| MC | 2 | 4 | 1 | 5 | 6 | 0 |

Lemoteurdoitˆetremont´edansl’avantderniermoisd’assemblagepourMA etMBetdanslederniermoisd’assemblagepourMC.Lestockend´ebutde janvierestde2moteursetonpr´evoitunelivraisonde5moteursenjanvier.

(a) D´eterminerlesbesoinsnetsdemoteurpourjanvier`aavril.

(b) D´eterminerleslancementsdeproductionqui permettent decouvrir cesbesoinsnetsenutilisant latechniquedulot parlot, led´elai de fabricationdumoteur´etantd’unmois.

5.2. **Productiond’engrenages.** Uneentreprisesp´ecialis´eedanslafabrication d’engrenages. Pourl’undecesengrenages,onconnaˆ ıtlesbesoinsenfinde moispourleshuitmois`avenir(voirtableau5.25). Lecoˆutdelancement

| Mois | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Besoins | 30 | 45 | 60 | 40 | 35 | 30 | 35 | 50 |

Tableau5.25:Productiond’engrenages.

d’uneproductionestde150F,lecoˆutded´etentionunitaireestde1Fpar mois. Onsupposequeleslivraisonsetsortiesdestocksefontenfindemois. Cequisignifiequ’unarticlefabriqu´eenp´ eriode $t$ etlivr´eenfindep´ eriode $t$ pourunedemandedep´eriode $t$ nesupportepasdecoˆutded´etentionpendant cettep´eriode. Lesrupturessontinterdites.

(a) Enutilisant laformuledelaquantit´e´ economiquedecommandede l’universcertain,d´eterminezlaquantit´e` amettreenproduction. Pour cela,d´eterminerlamoyennedubesoinmensuel.

(b) End´eduire, leplandeproductionetdestockagedemani`ere`a´ eviter lesruptures.

(c) Endéduireleco ûtdecettepolitique(sommedesco ûtsdemiseenroute etdestockage). Comparezavecleco ûtd'unepolitiquedelotparlot.

5.3. **Déterminationdesbesoinsetlancementsdeproductiondeniveau2.** A partirdel'ajustementcharge-capacitéden iveau1dutableau5.24,déduire lesbesoinsbrutspourlescomposantsdeniveau2. Ensuite, calculerles besoinsnetsetleslancementsdeproductionàcapacitéinfinie.

5.4. **Ajustementcharge-capacitédeniveau2.** Vérifiersilachargerésultante n'excèdepaslacapacitédel'atelier. Sic'estlecas,fairel'ajustement.

5.5. **Planificationdesbesoinsencomposants.** Considéronsuneentreprisequi utiliselaplanificationdesbesoinsencomposantspourgérerlaproduction d'unensembleEquiutiliseunepièceP1etdeuxpiècesP2parensemble. Leplandirecteurdeproduction,donnéautableau5.26,prévoitégalement lamiseàdispositiondepiècesP1etP2commespiècesderechange.

| Période | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| DemandeE | | 100 | 150 | 150 | 250 | 250 |
| DemandeP1 | | 10 | 20 | 15 | 25 | 20 |
| DemandeP2 | | 30 | 20 | 25 | 25 | 30 |

Tableau5.26:Plandirecteurdeproduction.

Lesstocksinitiaux(débutdepériode1),leslivraisonsattenduesdepremière périodeetlesdélaisd'obtentionsontdonnésautableau5.27.

| Element | Stockinitial | $LA_1$ | Délaid'obtention |
|---|---|---|---|
| E | 300 | 0 | 1semaine |
| P1 | 150 | 500 | 2semaines |
| P2 | 300 | 300 | 1semaine |

Tableau5.27:Stockinitiaux,livraisonsattenduesetdélaisd'obtention.

(a) DéterminerlesbesoinsnetsencomposantEetlamanièredecouvrir cesbesoinsnetspardeslancementsdeproductionentenantcomptedu faitquelelancementnepeutsefairequeparlotde250ensemblesE.

(b) EndéduirelesbesoinsnetsdepiècesP1etleslancementsdeproductionsdepiècesP1entenantcomptedufaitquelaproductiondepièces P1sefaitparlotde500pièces.

(c) DéterminerlesbesoinsnetsdepiècesP2etleslancementsdeproductionsdepiècesP2entenantcomptedufaitquelaproductiondepièces P2parlotde300pièces.

# Chapitre 6

# Les techniques de juste à temps

## 6.1 Origine et principe du JAT

Comme le souligne Baglin et al [1], les techniques de juste à temps trouvent leur origine dans les **nouvelles exigences du marché:**

- La *variabilité de la demande:* l'augmentation du nombre de modèles et la diminution de la durée de vie des produits nécessitent une adaptation plus rapide des produits.
- Le *délai admissible* par les clients est plus court : on ne peut donc plus produire à la commande, c'est-à-dire lancer une commande spéciale avec des délais longs.
- La *concurrence internationale* impose de produire une bonne qualité à un prix très bas.

En **conclusions**, il faut *produire à la demande du client, sans délai et en comprimant au maximum le coût de fabrication.* Il y a donc conflit entre la gestion en grande série (qui permet de réduire les coûts de fabrication) et la gestion à la carte (qui est beaucoup plus souple).

**L'idée du JAT** est de chercher à concilier les avantages de la grande série (flux rapides et importants) avec ceux de la petite série (grande adaptabilité). La **logique fondamentale du JAT** est la suivante:

Production = Demande.

Autrement dit, on produit la quantité *strictement nécessaire* aux besoins immédiats du client. Le principe est appliqué de proche en proche jusqu'aux fournisseurs. Ceci entraîne la suppression des stocks intermédiaires: on parle de gestion en **flux**

**tendus.** La suppression des stocks apparaît donc comme une **conséquence de la logique du JAT.**

Ceci va à l'encontre des politiques traditionnelles d'organisation de la production. Le **mode d'organisation traditionnel** a pour objectif essentiel la recherche de la plus grande productivité du système. Ses conséquences sont :

1. Pour raison d'économie d'échelle, on a des unités de fabrication de grande taille organisées en ateliers spécialisés. On a donc des flux importants et discontinus entre ces unités nécessitant des *stock intermédiaires.*
2. Pour raison de coût, on met en place des capacités de production correspondant à la demande moyenne qui sont saturées en permanence : la variabilité de la demande nécessite donc des *stocks de produits finis.*
3. On lance de grandes séries pour amortir le coût de lancement. Ce qui entraîne aussi des *stocks importants.*
4. Pour diminuer le coût de manutention, on transporte en grande quantité (camions, containers complets). Ce qui occasionne également des stocks élevés de matières qui ne sont pas immédiatement consommées.
5. Pour découpler les problèmes, on constitue des stocks intermédiaires.
6. A chaque stade du produit, on ajoute un délai d'obtention pour tenir compte des arrêts fréquents (contrôle, maintenance, ...).

On en conclut que chacun a tendance à **gonfler les stocks.** Le JAT devant ce constat, plutôt que d'essayer de gérer l'ingérable propose de **supprimer les stocks.**

Le fonctionnement en JAT appelle cependant les **remarques suivantes :**

1. Souvent, les usines ne fonctionnent que *partiellement en flux tendus* : en flux tendus au moment où l'on personnalise le produit, avec des stocks d'approvisionnement pour les pièces standards.
2. Les flux de production peuvent être tirés non par des commandes clients mais par le plan directeur de production.
3. Le JAT nécessite tout de même l'établissement d'un plan directeur de production et le calcul des besoins.

## 6.2 LesdeuxapprochesduJAT

LeJATadoncun**doubleobjectif:**

- *augmenterlaréactivitédusystèmelogistique:*diminuerledélai,diversifier laproduction, ...
- *diminuerlecoûtglobaldeproduction:*enéliminantlesgaspillagesinutiles.

### 6.2.1 Augmenterlaréactivitédusystèmelogistique

Le**but**esticidepouvoirrépondrerapidementauxvariations*quantitativeetqualitative*delademande. Le**moyen**utiliséestlesuivant: pourraccourcirlecycle defabrication,on**réduitlesstocks.**

- Pourréduireles*stocksdematièrepremière,*lesfournisseursdoiventlivrer plussouvent.
- Pourréduireles*stocksd'en-coursdeproduction,* ondoitréduireletemps entreateliers.
- Pourréduireles*stocksdeproduitsfinis,*ondoitpouvoirchangersouventde fabrication.

Remarquezque,pourréduirelesstocks,ilfauts'attaqueràleurcause:lespannes machines,lestempsderéglagelongs,etc ...

### 6.2.2 Larationalisationdelaproduction

Le**but**esticid'améliorerlaperformanceglobaleenéliminantlesgaspillages. Le **principefondamental**estquelesseulstempsutilessontceuxpendantlesquels leproduit voit savaleurs'accroître. Ainsi, lesopérationssuivantessont **non productives**:déplacer, stocker, grouper, contrôler,.. Pourpouvoirdiminuer cesopérationsimproductives, ilfaut**s'attaqueràleurscauses:** lesdéfautsde fabrication,lesretards,lespannes,leslenteursadministratives, ...

Onpeuticiciter**l'imagedeTaichiOhno(deToyota)**quiditque,pourtraverser unerivièresansencombre,dans*l'approchetraditionnelle:*onaugmenteleniveau del'eauetonpasseaudessusdesépaves, dans*l'approcheJAT:*ondraguele fleuve,cequipermetunniveaud'eauplusfaible. En**conclusions,**ens'attaquant auxcausesdedysfonctionnement,onaméliorelaproductivitéglobaledusystème etonaméliorelaqualitédesproduits.

## 6.3 Les facteurs clés du JAT

La **réussite du passage** d'une organisation classique à une organisation JAT nécessite des *méthodes de gestion très réactives* ainsi que la *maîtrise des aléas*.

### 6.3.1 Recherche d'un plus grande réactivité

On atteindra une plus grande réactivité en augmentant la **flexibilité de la production.** On peut définir la flexibilité comme la capacité du système de production à s'adapter en permanence à la demande. On distingue deux types de flexibilité :

- La **flexibilité quantitative** est la capacité de faire face à pointes de demande :
  - il faut *surdimensionner la capacité*, par exemple, en gardant les anciennes machines lors d'un renouvellement.
  - il faut faire *appel à la flexibilité de la main d'œuvre* : appel aux temporaires, à la sous-traitance, aux heures supplémentaires, ...
- La **flexibilité qualitative** est la capacité de traiter une grande variété de produits :
  - il faut pouvoir passer rapidement d'un produit à l'autre : on utilisera des machines à commandes numériques.
  - la polyvalence du personnel est également souhaitable.

### 6.3.2 Maîtrise des aléas

Il faut ici se **prémunir contre les causes des stocks** que sont les pièces reçues défectueuses, les pannes machine, ainsi les retards de livraison. On visera ici le **zéro défaut** pour les pièces fabriquées. En effet, en l'absence de stock, le défaut d'une pièce livrée interrompt la chaîne de montage. Le **zéro défaut** sera recherché par la *prévention* plutôt que par le contrôle à posteriori.

Il faut également assurer la **fiabilité des équipements.** En effet, l'arrêt d'une machine entraîne l'arrêt de toutes les machines en aval faute d'approvisionnement. De même pour les machines en amont qui, autrement, constitueront des stocks. La fiabilité est obtenue par des procédures de *maintenance préventive*.

Enfin, il existe **relation plus étroite entre le client et le fournisseur** car le fournisseur d'une usine JAT est généralement plus conscient des conséquences de l'envoi d'une pièce défectueuse pour le client.

## 6.4 Lam´ethodeKanban

**L'id´eedelam´ethode**estquelaproductionsoit*tir éeparl'aval:* chaqueposte netravaillequepoursatisfaireunedemandeduposteaval. **L'information**surla demandeduposteavalesttransmiseparundocumentappel´eKanban(´etiquette) donnant:

- ladescriptiondelapi`eceetdel'op´eration`aeffectuer;
- lelieud'origineetdedestinationdelapi`ece;
- laquantit´eparconteneur.

Cettetechniqueutiliseeneffetdes*conteneursstandards*pourlacirculationentre lespostes.

L'´etiquetteestdoncun**ordredefabricationdespi`eces**qui

- descendlefluxdepi`eces(lorsdelafabrication);
- remontecefluxunefoislespi`ecesconsomm´ees.

Le**rythmedefabrication**estdonc´egal`a*lavitessedecirculationdes étiquettes* quiest, elle-m^eme,d´etermin´eeparlerythmedeconsommationdespi`eces. Par exemple,silaconsommationvient`asetarir,les´etiquettesneremontentplusetla fabrications'arr^ete.

Pourunbonfonctionnementdusyst`eme,ilfautune**capacit´esuffisantedes postesamont**pourr´epondre`alademande: cecin´ecessitedonceng´en´eralde pr´evoirune**surcapacit´e.**

### 6.4.1 Syst`emeKanban`auneboucle

Le**fonctionnement**dusyst`emeKanban`auneboucleestlesuivant(cfrfigure6.1):

- L'´etiquetteestappos´eesurleconteneurdepi`ecesquiviennentd'^etrefa-briqu´eesenamont(a);
- Elleaccompagneleconteneuraupostesuivantetrestesurleconteneuren attente(b);
- Aumomento`uleconteneurestmisenfabricationsurleposteaval,leKanban estlib´er´eetretourneauposteamont(c);

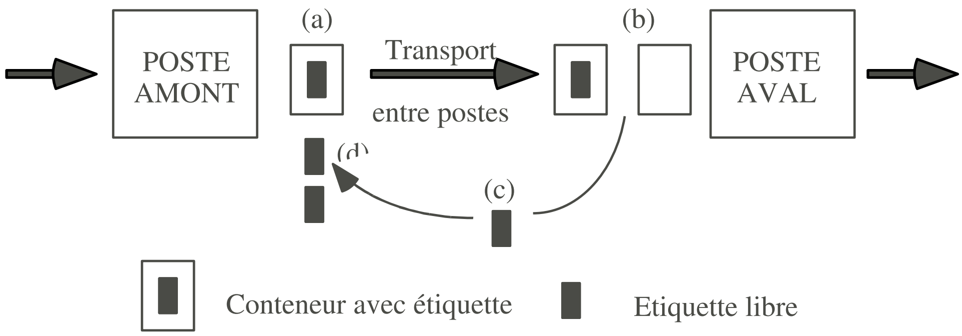


Figure 6.1: Système Kanban à une boucle.

- Il entre dans le planning du poste amont (d) d'où il sort au moment d'une nouvelle fabrication.

On peut faire les **remarques suivantes** sur le fonctionnement du système kanban à une boucle :

1. Tout conteneur rempli possède obligatoirement une étiquette (c'est-à-dire son ordre de fabrication).
2. Une étiquette libre (c'est-à-dire non attachée à un conteneur) représente un ordre de fabrication pour une quantité fixe de pièces sur un poste de travail déterminé.
3. Le nombre d'étiquettes en circulation entre deux postes fixe les stocks d'en cours de fabrication : en effet, le volume des encours, c'est-à-dire le nombre de conteneurs entre les postes, est *inférieur ou égal* au nombre d'étiquettes en circulation.
4. En observant son planning d'étiquettes en attente, le responsable du poste amont peut choisir ses priorités de fabrication d'après les besoins des agents des différents postes aval qu'il fournit.

### 6.4.2 Détermination du nombre d'étiquettes

Un problème fondamental est la **détermination du nombre d'étiquettes** à mettre en circulation. Ce nombre doit, en effet, résulter d'un compromis entre :

- un nombre pas trop élevé : sinon on génère des *stocks intermédiaires* ;
- un nombre pas trop faible : sinon le poste aval risque de tomber en rupture.

Les **données du problème** sont les suivantes :

- $C_u$, la consommation du poste aval en unités par minute ;
- $Q_e$, la taille économique des lots fabriqués en amont ;
- $k$, la capacité d'un conteneur ;
- $T_r$, le délai de réaction du système lorsque le stock atteint le seuil de lancement d'une production. Ce **délai de réaction** comprend
  - le retour du ticket d'alerte vers l'amont,
  - l'attente au planning amont,
  - le réglage de la machine amont,
  - la production du premier conteneur,
  - le transport du conteneur jusqu'au poste aval.

Le **principe** utilisé pour déterminer le nombre d'étiquettes est le suivant : le nombre de conteneurs dans la boucle correspond au *strict minimum pour que le système fonctionne sans rupture pour le poste aval*.

Illustrons ceci sur un **exemple** tiré de Baglin et al [1]. Soit $D = 2000$ pièces, la demande moyenne du poste aval par journée de 8 heures de travail. On en déduit une consommation en unités par minute de :

$$C_u = \frac{2000}{8 \times 60} = 4,1667$$

Soit $k = 100$ pièces, la capacité d'un conteneur. Soit $T_r$, temps de réaction qui résulte d'un temps de retour du ticket de 30 minutes (le ramassage des tickets s'effectue toutes les heures, donc un temps moyen d'une demi heure), d'une attente moyenne de 10 minutes au planning du poste amont, d'un réglage de la machine de 10 minutes, d'un temps de production de 0,1 minute par pièce (donc 10 minutes pour 100 pièces), d'un temps de transport de l'amont vers l'aval de 35 minutes :

$$T_r = 30 + 10 + 10 + 10 + 35 = 95$$

Pendant le temps de réaction, la consommation du poste aval est de :

$$T_r C_u = 95 \times 4,1667 = 395,83$$

Il en résultera qu'il faut au moins 4 étiquettes en permanence dans le système :

$$N \geq \frac{T_r C_u}{k} = 3,96$$

Si l'on veut prendre une *marge de sécurité* de $\alpha = 10\%$ :

$$N \geq \frac{(1+\alpha) T_r C_u}{k} = \frac{1,1 \times 395,83}{100} = 4,3541.$$

Il faudra donc au moins 5 étiquettes en permanence dans le système.

Supposons maintenant que le temps de lancement en fabrication justifie une *production par lot* (cette taille économique est déterminée en arbitrant entre le coût de lancement et le coût de possession) au poste amont de taille optimale :

$$Q_e = 600 \text{ pièces},$$

c'est-à-dire à 6 conteneurs ($Q_e/k$). Il faudra donc *attendre d'avoir six étiquettes accrochées au planning du poste amont* avant de pouvoir lancer en fabrication de quoi remplir le premier conteneur. Il faudra donc ajouter ces 6 conteneurs aux 5 précédents.

Le **nombre de conteneurs dans la boucle** correspond donc en général à la somme :

- du stock correspondant au seuil d'alerte, c'est-à-dire au stock permettant de faire fonctionner le poste aval durant $T_r$, augmenté d'une marge de sécurité $\alpha$ :
$$(1+\alpha) C_u T_r$$
- du lot économique $Q_e$ produit par le poste amont :
$$Q_e$$

le tout divisé par $k$, la capacité d'un conteneur :

$$N \geq \frac{(1+\alpha) C_u T_r + Q_e}{k} \qquad (6.1)$$

Le résultat est arrondi à l'entier supérieur. Ce qui donne ici :

$$N \geq \frac{(1+\alpha) C_u T_r + Q_e}{k} = \frac{435+600}{100} = 10,35$$

Ce qui correspond à *11 conteneurs de 100 pièces.*

## 6.5 Exercice

6.1. **Flux tendus.** Un atelier de fabrication de sous-ensembles approvisionne la chaîne de montage de petits articles électroménagers situé e dans un bâtiment proche. La régularité de la production incite la direction à mettre en place un système d'appel par l'aval entre ces deux postes. Les caractéristiques de la production sont les suivantes: l'atelier fonctionne 8 heures par jour, la chaîne consomme 2000 sous-ensembles par jour, il faut une heure pour régler la machine de l'atelier et cinq secondes pour produire une pièce, la taille économique des lots en amont s'élève à 500 pièces, la capacité des conteneurs est de 250 pièces, la manutention d'un conteneur d'un poste à l'autre nécessite dix minutes, le ramassage des tickets s'effectue lors de l'approvisionnement de la chaîne, c'est-à-dire toutes les heures, le temps d'attente moyen au planning amont peut être estimé à trente minutes. On retiendra pour l'ensemble des calculs un coefficient de sécurité de 20%.

(a) Déterminer le nombre de tickets à mettre en circulation dans la boucle.

(b) Vérifier l'équilibre entre la charge et la capacité.

(c) On décide maintenant de réduire la taille des séries de fabrication de 500 à 250. Calculer le nombre de lancements réalisés par jour. Quelles améliorations devrait-on réaliser pour pouvoir fonctionner ainsi?

6.2. **Calcul du nombre d'étiquettes.** Une entreprise fabrique de façon régulière les produits A, B, C et D à partir des produits achetés E, F et G. Voici la nomenclature pour ces produits:

A utilise 1 C
et 1 E

B utilise 1 C
et 1 F

C utilise 1 D

D utilise 1 G

Cette entreprise, souhaitant fabriquer ces produits sur une ligne de production pilotée par KANBAN, organise ses machines de la façon suivante:

```
                         ---->M3
                        |
M1 ------>M2------|
                        |
                         ----->M4
```

L'entreprise, devant produire 20 A et 30 B par jour, souhaite ne pas définir au hasard le nombre de Kanbans et la taille des containers à mettre en place pour piloter la production entre le poste M1 et M2. Elle fait appel à vous pour l'aider.

Dans votre phase d'analyse, vous relevez les informations suivantes :

- la durée journalière de travail est de 8 heures,
- le poste M1 fabrique les pièces D, X et Y,
- le poste M2 fabrique la pièce C,
- le poste M3 assemble la pièce A,
- le poste M4 assemble la pièce B,
- la fabrication des pièces D nécessite 0,5 heure de réglage du poste et 0,08 heure de fabrication unitaire,
- les pièces D, pesant chacune 5 kg, sont transportées dans des containers ne pouvant pas supporter plus de 50 kg de charge,
- le transfert d'un Kanban (retour de l'étiquette) peut se faire entre M2 et M1 en 5 minutes,
- le temps de transport des containers (temps de transport) effectué par un chariot automoteur entre les postes M1 et M2 peut être estimé à 10 minutes,
- le poste M1 est destiné à fabriquer 2 autres pièces (X et Y) nécessitant des réglages différents de la pièce D. La fabrication des 2 autres pièces, également gérée par Kanban, est estimée à 2,25 heures par jour.

(a) Quel est le flux journalier de production de la pièce D ?

(b) Combien de réglages des séries de pièces D pouvez-vous faire par jour ?

(c) Quelle est la taille du container de la pièce D ?

(d) Quel est le nombre de Kanbans qui doivent être utilisés entre les postes M1 et M2 sachant que l'on peut être en attente au poste M1 pendant 2,25 heures par jour (parfois d'une traite) à cause des autres productions (X et Y) à ce poste ? Pour déterminer la taille du lot minimum qui doit être lancé au poste M1, tenir compte du nombre maximum de lancements admissibles par jour.

# Partie III

# Les décisions stratégiques

# Chapitre 7

# L'ordonnancement de projets

## 7.1 Introduction

Lors de tout projet de grande envergure (construction d'un bateau, d'un avion, d'un bâtiment, ...), un problème crucial qui se pose est celui du calendrier d'exécution des tâches. Le problème est de déterminer dans quel ordre doivent s'enchaîner les diverses tâches de manière à minimiser le temps total d'exécution du projet.

Prenons **un exemple**. On veut construire un nouveau bâtiment de manière à pouvoir déménager au plus tôt. Certaines tâches ne peuvent s'exécuter qu'après que d'autres soient terminées. Par exemple, on ne peut commencer les fondations que lorsque le terrassement est fini. On ne peut monter les murs que lorsque les fondations sont terminées. D'autres tâches peuvent s'exécuter simultanément. Par exemple, les travaux d'électricité et de plomberie peuvent être menés de pair. Les données sont reprises au tableau 7.1 pour cet exemple.

| No | tâche | durée (jours) | préalables |
|---|---|---|---|
| 1 | terrassement | 5 | - |
| 2 | fondations | 4 | 1 |
| 3 | colonnes porteuses | 2 | 2 |
| 4 | charpente toiture | 2 | 3 |
| 5 | couverture | 3 | 4 |
| 6 | maçonnerie | 5 | 3 |
| 7 | plomberie, électricité | 3 | 2 |
| 8 | coulage dalle béton | 3 | 7 |
| 9 | chauffage | 4 | 8 et 6 |
| 10 | plâtre | 10 | 9 et 5 |
| 11 | finitions | 5 | 10 |

Tableau 7.1 : Construction d'un bâtiment

On doit tenir compte, dans les problèmes d'ordonnancement, de divers types decontraintes.

- Les**contraintesdelocalisationtemporelle**exprimentlalocalisationd’une tâchedansletemps: unet^achenepeutcommenceravantunetelledate,ou apr`esunetelledate(parexemple,enraisondesconditionsclimatiques).
- Les**contraintesdesuccessiontemporelle**exprimentlesrelationsd’ant´e-riorit´eentrelest^aches:unetellet^achenepeutcommenceravantlafind’une autre(parexemple,onnecoulepaslesfondationssileterrassementn’est pasfini).
- Les**contraintesdisjonctives**exprimentlefaitquedeuxt^achesnepeuvent avoirlieuenm^emetempssansquel’onpuissedirelaquelledoit^etreeffectu´ee avantl’autre(parexemple,unem^emegrueestutilis´eesurdeuxchantiers).

Leprobl`emed’ordonnancement*avecdescontraintesdelocalisationtempo-relleetdesuccessiontemporelleseulement*estappel´e**probl`emecentrald’ordon-nancement**.Ils’agitdoncded´eterminerlecalendrierded´ebutdechacunedes tâchesdemani`ere`aterminerlechantierauplusviteenrespectantlescontraintes temporelles.

Nousallonsvoirque,aussibienpoursaformulationquepoursar´esolution,ce probl`emeutiliselanotiondegraphe. Onpeut,eneffet,repr´esenterleprobl`emesur ungrapheet,ensuite,r´esoudreleprobl`emegraphiquement. Deplus,lapr´esentation dur´esultatdecalcul(l’ordonnancementdest^aches)serabeaucoupplusclairesur cegraphiquequesuruntableaudechiffres.

Ilexistedeuxm´ethodesder´esolutionpourceprobl`eme,`asavoir:

- la**m´ethodedupotentiel**d´evelopp´eeenFrancedanslesann´ees60etquias-socie`achaquet^acheunnœuddur´eseau,tandisquelesrelationsd’ant´eriorit´e sontrepr´esent´eespardesarcsentrelest^aches(voirfigure7.1);

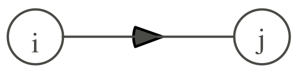


Figure7.1:Graphedelam´ethodedespotentiels.

- la**m´ethodePERT**d´evelopp´eeparall`element auxEtatsUnisd’Am´erique et qui, elle, associechaquet^ache`aunarcdur´eseau, et chaquerelation d’ant´eriorit´e`aunnœud(voirfigure7.2).

Algorithmiquement, lesdeuxm´ethodesder´esolutionsont ´equivalentes,maisla méthodedupotentielpermetd’´ecrirelegrapheder´eseaudemani`eresyst´ematique (sansajouterd’arcfictif).

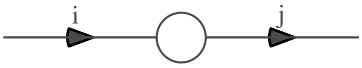


Figure 7.2: Graphe de la méthode des potentiels.

## 7.2 Formulation du problème

Fixons-nous les notations suivantes. Nous avons $n$ tâches à exécuter, indicées $i = 1, \ldots n$. Utilisons également la notation $d_i$ pour désigner la durée d'exécution de la tâche $i$ (qui est ici une donnée).

Les **variables** du problème sont les suivantes: $t_0$ note le temps de début d'exécution du chantier, $t_i$ note le temps de *début d'exécution* de la tâche $i$, et $t_f$ ($= t_{n+1}$) note le temps de fin de chantier.

Formulons maintenant **l'objectif:** il s'agit simplement de minimiser le temps de réalisation du chantier, autrement dit:

$$\min z = t_f - t_0$$

qui consistera à minimiser $t_f$ si on se fixe initialement $t_0 = 0$.

Formulons maintenant les **contraintes** du problème central d'ordonnancement. Elles sont de trois types:

- Les contraintes de **localisation temporelle** expriment que la tâche $i$ ne peut commencer avant le début de chantier:

$$t_i \geq t_0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots n \tag{7.1}$$

- Les contraintes de **succession temporelle** expriment que la tâche $j$ ne peut débuter avant que toute tâche $i$ préalable à $j$ ne soit finie:

$$t_i + d_i \leq t_j, \quad \forall \text{ tâche } i \text{ antérieure à la tâche } j \tag{7.2}$$

- Les contraintes de **fin de chantier** expriment que toute tâche $i$ doit être finie avant la fin de chantier:

$$t_i + d_i \leq t_f, \quad \forall i = 1, 2, \ldots n \tag{7.3}$$

Remarquez que vu la présence des contraintes de sucession temporelle (7.2), il suffit d'écrire (7.1) pour toute tâche n'ayant pas de prédécesseur et (7.3) pout toute tâche n'ayant pas de successeur.

## 7.3 Représentation graphique du problème

On associe donc au problème central d'ordonnancement un graphe dont les **sommets** représentent les diverses tâches du problème d'ordonnancement. On ajoute un nœud $0$ qui correspond à la date de début de chantier et un nœud $f = n + 1$ qui correspond à la fin de chantier. Les **arcs du réseau** représentent les diverses contraintes qui peuvent toutes se mettre sous la forme suivante

$$t_i + d_i \leq t_j$$

en définissant $d_0 = 0$. Le problème central d'ordonnancement se formule donc ainsi:

$$\begin{aligned} & min \quad t_f \, (-t_0) \\ & \text{s.c.q.} \quad t_i + d_i \leq t_j, \quad \forall (i,j) \in A \end{aligned} \tag{7.4}$$

où $A$ note l'ensemble des arcs du réseau.

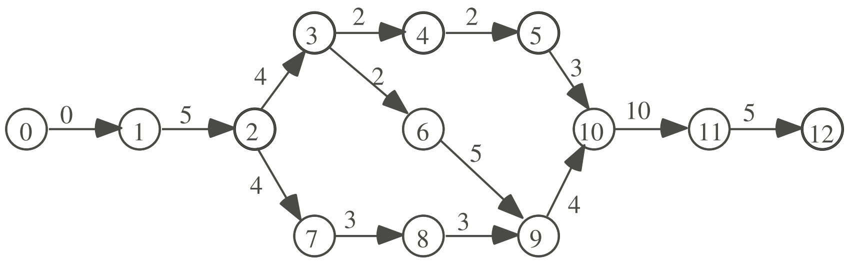


Figure 7.3: graphe associé.

Reprenons l'exemple. On peut construire systématiquement le graphe associé au problème d'ordonnancement de la manière suivante (voir figure 7.3):

1. On relie d'abord toutes les tâches qui peuvent être effectuées sans préalable au nœud $0$, début de chantier par un arc de longueur nulle. Dans l'exemple, seule la tâche $1$ est dans ce cas. Remarquez qu'il s'agit de la représentation des contraintes (7.1).

2. Ensuite, on prend une tâche déjà dans le graphe et on examine si elle précède d'autres. Par exemple, la tâche $1$ doit précéder la tâche $2$. On doit donc avoir

$$t_2 \geq t_1 + d_1.$$

On trace le nœud 2 et on le relie au nœud 1 par un arc de longueur $d_1$. On fait de même pour représenter toutes les contraintes de type (7.2).

3. Enfin, quand toutes les tâches sont dans le graphe, pour les seules tâches qui ne sont suivies d'aucune autre, on les relie au nœud $n+1$, fin de chantier, avec un arc de longueur égale à la durée de la tâche. Ici, seule la tâche finition est dans ce cas, et il faut que cette tâche soit finie pour la fin du chantier. Il s'agit ici de représenter les contraintes du type (7.3).

Disons un mot de la représentation des *trois autres types de contraintes*:

1. Supposons d'abord que la tâche 3 ne puisse commencer avant 10:

$$t_3 \geq 10 \Leftrightarrow t_3 \geq t_0 + 10.$$

   Ceci se représente en joignant les nœuds 0 et 3 par un arc de longueur 10.

2. Ensuite, supposons que la tâche 5 doive être commencée avant 40:

$$t_5 \leq 40 \Leftrightarrow t_0 \geq t_5 - 40.$$

   Ceci se représente en joignant les nœuds 5 et 0 par un arc de "longueur" -40.

3. Enfin, supposons que la tâche 9 doive commencer au plus tard 5 jours après le début de la tâche 8:

$$t_9 \leq t_8 + 5 \Leftrightarrow t_8 \geq t_9 - 5.$$

   Ceci se représente en joignant les nœuds 9 et 8 par une arc de "longueur" -5.

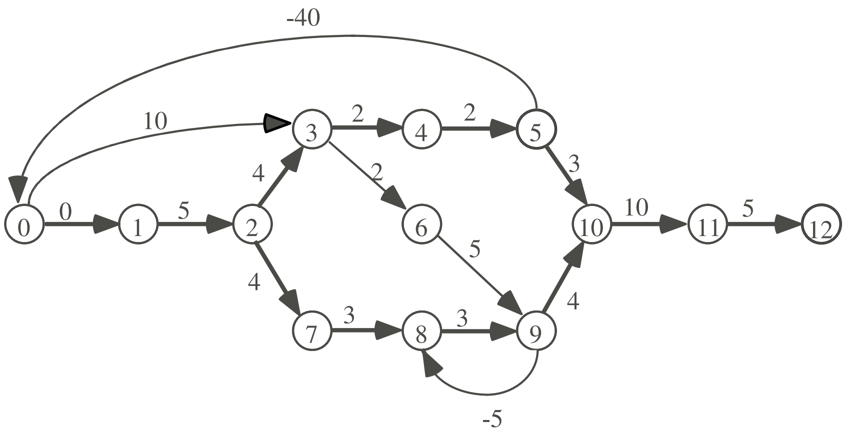


Figure 7.4: Trois autres types de contraintes.

Avant de voir l'algorithme qui permet de résoudre le problème d'ordonnancement, nous allons dire un mot des conditions sous lesquelles ce problème est r´ealisable.Eneffet,lescontraintestemporellespeuventvenirdediversserviceset ˆetreincompatiblesentreselles.

Supposonsquenousayonslasituationsuivante. Latˆache1,quidure $d_1$ jours, doit ˆetretermin´eeavantquelatˆache2necommence. Latˆache2, quidure $d_2$ jours,doitˆetretermin´eeavantquelatˆache3necommence. Latˆache3,quidure $d_3$ jours,doitˆetretermin´eeavantquelatˆache1necommence. Ilestclairqu'un telprobl`emevaconduire`auneimpossibilit´e.

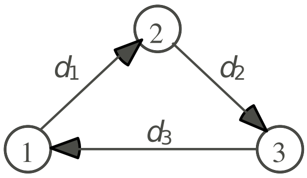


Figure7.5:Circuitdelongueurpositive.

Cettesituationestrepr´esent´ee`alafigure7.5. Onvoiticiquelegraphecontient uncircuit(cycleavectouslesarcsdanslemˆemesens)dontlasommedeslongueurs desarcsestpositive. Ecrivonslescontraintescorrespondantes:

$$\begin{aligned} t_1 + d_1 &\le t_2 \\ t_2 + d_2 &\le t_3 \\ t_3 + d_3 &\le t_1 \end{aligned}$$

Ensommantetensimplifiant,onobtientlaconditionsuivante:

$$d_1 + d_2 + d_3 \le 0$$

Onpeutalorsmontrerler´esultatsuivant.

**Lemme7.1***Lescontraintestemporellessont compatiblesentreellessi et seulementsilegrapheassoci énecomporteaucuncircuitdelongueur(sommedes longueursdesarcsleconstituant)positive.*

Remarquezqu'uncycleavecunesommedeslongueursn´egativeneposepasde probl`eme.Parexemple,`alafigure7.4,latˆache8delongueur3doitˆetrefinieavant quenecommencelatˆache9etlatˆache9doitcommencerend´eansles5joursde d´ebutdelatˆache8:

$$\begin{aligned} t_8 + 3 &\le t_9 \\ t_9 - 5 &\le t_8 \end{aligned}$$

Ceciserepr´esente,commevuci-dessus,parunefl`echede8vers9delongueur3 etunefl`echeretourdelongueur-5. Cecineposepasdeprobl`eme,lasommedes "longueurs"´etantn´egative.

## 7.4 Calcul de l'ordonnancement au plus tôt

Nous allons maintenant voir un algorithme de calcul de l'ordonnancement **au plus tôt**. L'ordonnancement au plus tôt détermine les dates de début au plus tôt des différentes tâches, notées $t_i$, en partant du nœud de début de chantier.

Illustrons les choses sur l'exemple. La tâche 1 peut commencer au plus tôt en $0$ puisqu'elle est reliée au nœud $0$, début de chantier, par un arc de longueur nulle. La tâche 2 peut commencer dès la fin de la tâche 1, c'est-à-dire

$$t_2 = t_1 + d_1 = 5$$

et ainsi de suite, on marque $t_3 = 9$, $t_4 = 11$, $t_5 = 13$,...

Lorsqu'un sommet (comme le sommet 9) a plus d'un prédécesseur (8 et 6), on détermine la date au plus tôt par un maximum :

$$t_9 = max\{t_6 + d_6, t_8 + d_8\} = 16.$$

Il faut, en effet, que les deux tâches précédentes soient finies avant de pouvoir débuter la tâche 9. On arrive ainsi à déterminer la durée totale minimum qui est ici de 35 jours.

L'ordonnancement au plus tôt est indiqué à la figure 7.6 où le temps de début au plus tôt est indiqué au dessus des nœuds.

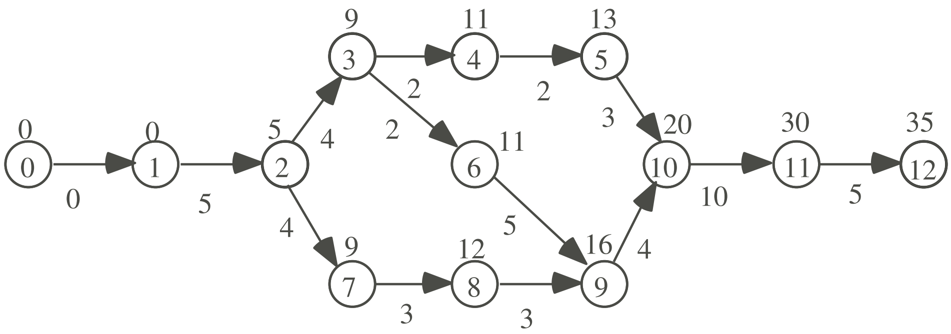

Figure 7.6: Ordonnancement au plus tôt.

## 7.5 Chemin critique et calcul des marges

Certaines tâches sont telles que si on retarde leur date de début, cela aura des répercussions sur la date de fin de chantier. Par exemple, si on retarde la date de début de la tâche 11 (finition), cela va directement retarder la date de fin de chantier. De même, si on retarde la tâche 10 (plâtre), cela va retarder la date de début de la tâche 11 (finition) qui elle-même retarde la date de fin de chantier.

Par contre, si on retarde le début de la tâche 5 (couverture), cela n'aura pas de répercussion, car ce n'est pas à partir de ce nœud que son successeur (10) a été marqué mais bien à partir du nœud 9. On voit donc que l'on peut retarder la date de début de la tâche 5 sans conséquence sur la date de fin de chantier jusqu'à un certain point. En effet, $t_5 = 13$, $t_{10} = 20$, et $d_5 = 3$. Autrement dit, la date de début de la tâche $5$ peut être retardée jusqu'à la valeur :

$$t_{10} - d_5 = 20 - 3 = 17$$

sans retarder la date de début de la tâche $10$. On dit que 17 est **la date de début au plus tard** de la tâche 5. C'est-à-dire que la tâche 5 peut être commencée à cette date au plus tard sans allonger la durée totale minimale des travaux.

On notera une date de début au plus tard par $\bar{t}_i$. On peut calculer **l'ordonnancement au plus tard** de la manière suivante (voir figure 7.7). Partant du nœud fin, pour lequel la date de début au plus tard coïncide avec la date de début au plus tôt

$$\bar{t}_{12} = t_{12} = 35,$$

on retranche à la date au plus tard la durée de la dernière tâche. On détermine ainsi la date de fin au plus tard de la tâche 11 :

$$\bar{t}_{11} = \bar{t}_{12} - d_{11} = 35 - 5 = 30.$$

On marque ensuite à rebours les nœuds 10, 5, ...

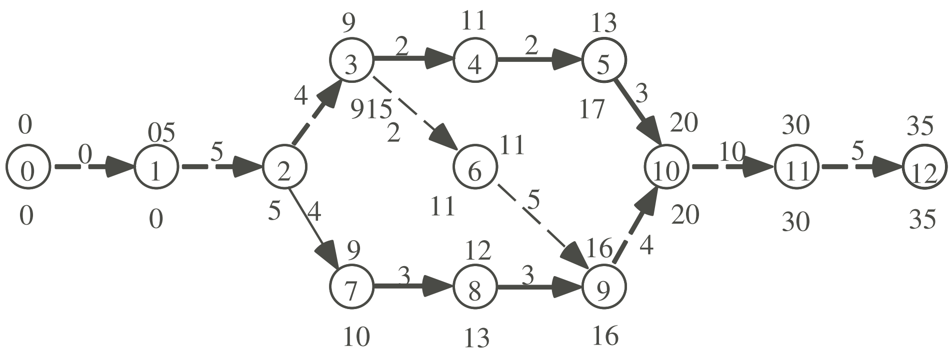


Figure 7.7 : Ordonnancement au plus tard.

Lorsqu'un nœud a plusieurs successeurs, on ne peut marquer ce sommet que si *tous ses successeurs directs sont marqués*. Prenons, à titre d'illustration, le cas du nœud 3. Dans ce cas, il faut prendre le minimum :

$$\bar{t}_3 = min\{\bar{t}_4 - d_4, \bar{t}_6 - d_6\} = min\{15 - 2, 11 - 2\} = 9,$$

sans quoi on retarderait la date de fin de chantier.

On voit directement que l'on a deux sortes de tâches.

- Les **tâches critiques** sont celles qui servent à marquer de proche en proche le sommet $n+1$ à partir du sommet $0$. Elles forment ce que l'on appelle le **chemin critique** qui donne l'ensemble des tâches à surveiller en premier si l'on veut respecter le délai minimum de réalisation du projet. Le **chemin critique**, illustré en hachuré à la figure 7.7, peut être déterminé de la manière suivante. Partant du nœud $n+1$, on ne retient que les sommets qui ont permis de joindre n+1 à partir du nœud 1. Il s'agit, dans l'exemple, des nœuds 12, 11, 10, 9, 6, 3, 2, 1 et 0.

- Pour toutes les autres tâches, c'est-à-dire les **tâches non critiques**, on peut déterminer la **marge d'une tâche** comme la différence entre son temps de début au plus tard et au plus tôt :

$$m_i = \bar{t}_i - \underline{t}_i \tag{7.5}$$

  et donc la marge $m_i$ est strictement positive pour les tâches non critiques tandis qu'elle est nulle pour les tâches critiques.

| $i$ | 4 | 5 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $m_i$ | 4 | 4 | 1 | 1 |

## 7.6 L'ordonnancement par la méthode PERT

La méthode PERT (pour Program Evaluation Review Technique) s'est développée, parallèlement à la méthode du potentiel, aux Etats-Unis en 1958 pour la planification de la construction des sous-marins Polaris. Elle se distingue de la méthode du potentiel par le fait que les tâches ne sont plus associées aux nœuds **mais bien aux arcs du réseau**. L'algorithme de résolution est très semblable à celui de la méthode du potentiel. La différence majeure réside donc dans la construction du graphe : le graphe de la méthode PERT est souvent plus difficile à construire que celui de la méthode du potentiel car on peut être amené à introduire des arcs fictifs qui ne correspondent à aucune tâche.

Dans la méthode PERT, chaque tâche est donc associée à un **arc du graphe**. La longueur de l'arc correspondant à la durée de la tâche en question. Les **sommets** sont utilisés pour traduire les relations de succession temporelle. Ainsi, si la tâche $j$ doit suivre la tâche $i$, l'extrémité terminale de l'arc représentant la tâche $i$ coïncidera avec l'extrémité initiale de l'arc représentant la tâche $j$.

Cecipermetdetracerlegraphepourl'exempledéjàconsidérépourlaméthode dupotentiel. Ceciestfaitàlafigure7.8oùl'onanoté,àcôtédechaquearc,d'une part,lenumérocorrespondantàlatâche,d'autrepart,laduréedelatâche.

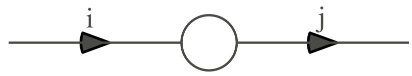


Figure7.8:GrapheassociépourlaméthodePERT.

Si,surcetexemple,legraphedelaméthodedupotentieletceluidelaméthode PERTsont trèsproches, il n'envapastoujoursdemême. Laconstructiondu graphePERTposediversproblèmesquiamènentà**ajouterdesarcsfictifsquine correspondentàaucunetâche**.

Unpremierproblèmeserencontrelorsquel'onveuttenircomptedescont-raintes**delocalisationtemporelle**.P arexemple, supposonsqu'unetâche $i$ ne peutcommenceravantunedate $l_i$.Ilfautintroduireunarcjoignantl'originedes travauxàl'originedel'arcreprésentantlatâche $i$ etayantpourlongueurladate enquestion $l_i$.Onestdoncamené, danscecas, à**ajouterunarcfictif**quine correspondàaucunetâche.

Unsecondproblème,plusdélicat,serencontrepour**lescontraintesdesuc-cessiontemporelle**.Eneffet,supposonsquelatâche1précèdelestâches2et3 etquelatâche4précèdelatâche3. Onpourraittracerlegraphedelafigure7.9. Maiscegrapheintroduitunecontraintesupplémentairequiditquelatâche4doit

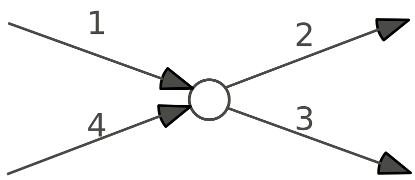


Figure7.9:Introductiond'uncontrainte.

précéderlatâche2. Pourrésoudreladifficulté,ilfautànouveau**ajouterunarc fictif**delongueurnulleentrel'extrémitédelatâche1etledébutdelatâche3. Ceciestillustréàlafigure7.10.

L'ordonnancementsecalculeainsi. D'abord,ondéterminereles**datesdedébut auplustôtdesnœuds,**quenousnoterons $\underline{t_i}$. Ceciestfaitparmarquagedesnœuds àpartirdel'originecommedanslaméthodedupotentiel. Onadditionneautemps dunœudprécédentletempsdelatâche. Encasdeplusieursprédécesseurs, on prendlemaximum. Ensuite,ondéterminelesdatesauplustarddesnœuds,notées $\bar{t_i}$, parmarquageàpartirdelafin, ensoustrayantautempsdunœudsuivantle tempsdelatâche. Encasdeplusieurssuccesseurs,onprendleminimum. Ensuite,

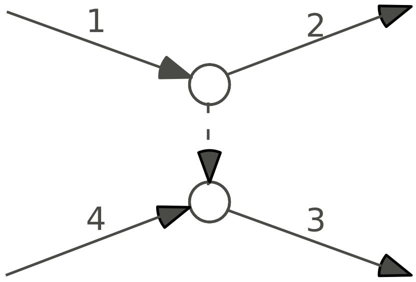


Figure7.10:Arcfictif.

oncalculelamargedelat^ache $(i,j)$ entrelesnœuds $i$ et $j$ comme:

$$m_{ij} = \overline{t_j} - (\underline{t_i} + d_{ij})$$

Autrementdit,lamargeestladiff´erenceentreletempsded´ebutauplustarddu nœud $j$ etl'arriv´eeauplut^ot`acenœudpourlat^ache $(i,j)$ quipeutpartirauplust^ot en $\underline{t_i}$ dunœud $i$.Onobtientalorslesdatesauplustarddest^achesenadditionnant `aladateauplust^otdunoeudded´epart,lamargedelat^ache. Lesr´esultatssont indiqu´esautableauci-dessous.

| Tâche | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dateauplust^ot | 0 | 5 | 9 | 11 | 13 | 11 | 9 | 12 | 16 | 20 | 30 |
| Marge | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Dateauplustard | 0 | 5 | 9 | 15 | 17 | 11 | 10 | 13 | 16 | 20 | 30 |

Uncheminncritiquepeutalorsseconstruire`apartirdunœuddefinenneretenant quelesarcscritiques. L'application`al'exempledonnel'ordonnancementillustr´e `alafigure7.11.

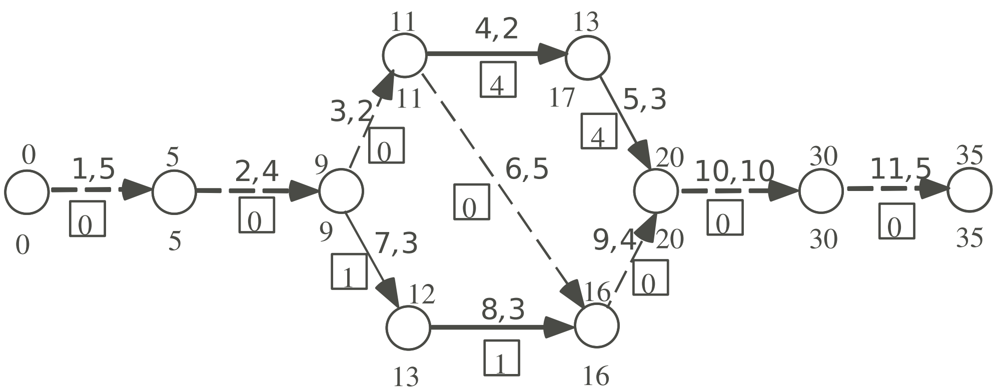


Figure7.11:Ordonnancementparlam´ethodePERT.

## 7.7 La minimisation des coûts

Jusqu'à présent, on a considéré la durée de chaque tâche comme **donnée**. Or la durée d'une tâche particulière $i$ peut varier en fonction, par exemple, de l'embauche de personnel supplémentaire, de l'achat ou de la location de matériel supplémentaire. On voit donc que l'on pourra, en général, réduire la durée de chaque tâche **moyennant un coût supplémentaire**. Nous allons voir ici comment arbitrer entre les deux critères : diminution de la durée d'exécution des tâches et donc du chantier et, d'autre part, augmentation des coûts d'exécution des tâches.

Considérons la tâche $i$. Sa durée d'exécution $d_i$ peut varier entre une durée minimale (incompressible) $\underline{d}_i$ et une durée maximum $\bar{d}_i$. Si l'on admet que le coût

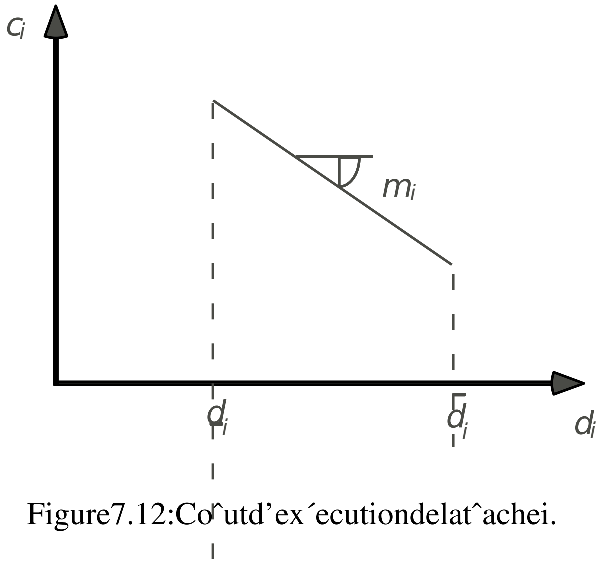


Figure 7.12: Coût d'exécution de la tâche i.

varie linéairement en fonction de la durée, on obtient le graphique de la figure 7.12. Notons par $m_i$ la pente. Pour une durée $d_i$ comprise entre les bornes inférieure et supérieure, le coût de la tâche $i$ est alors calculé par l'équation suivante :

$$c_i(d_i) = c_i(\underline{d}_i) + m_i(d_i - \underline{d}_i)$$

Si on répète la même opération pour chacune des tâches, l'objectif de la minimisation du coût total d'exécution des tâches peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{i=1}^{n} [c_i(\underline{d}_i) + m_i(d_i - \underline{d}_i)] \\ &= K + \sum_{i=1}^{n} m_i d_i \end{aligned}$$

Le premier terme étant constant, il revient au même de minimiser le seul second terme et on obtient **l'objectif suivant**:

$$\min z = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i,$$

les $d_i$ étant, cette fois, des variables pour le problème. Nous avons donc comme **variables** du problème:

$$\begin{aligned} t_i &= \text{le temps de début de la tâche } i; \\ d_i &= \text{la durée d'exécution de la tâche } i; \\ t_f &= \text{le temps de fin de chantier.} \end{aligned}$$

Moyennant ce choix de variables, le problème de minimisation des coûts d'exécution des tâches se formule donc comme suit:

$$c_D(\lambda) = \min z = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i$$

$$\text{s.c.q} \left\{ \begin{array}{lll} t_i \geq t_0 & \text{(localisation temporelle)} & \\ t_j \geq t_i + d_i & \text{(succession temporelle)} & \\ t_f \geq t_i + d_i & \text{(fin de chantier)} & P(\lambda) \\ t_f \leq \lambda & \text{(borne sur } t_f\text{)} & \\ \underline{d}_i \leq d_i \leq \overline{d}_i & \text{(bornes sur la durée)} & \end{array} \right.$$

La borne supérieure sur $t_f$ a dû être ajoutée car il est clair, au vu de la forme des fonctions de coût $c_i(d_i)$ que si non on aura tendance à prendre $d_i = \overline{d}_i$ pout toute tâche et donc à augmenter au maximum la durée du chantier.

On peut alors résoudre ce problème en **fonction du paramètre** $\lambda$. En ajoutant le terme constant que nous avions négligé, on obtient un graphique du genre de celui présenté à la figure 7.13. Ce graphique appelle plusieurs commentaires:

1. Tout d'abord, le paramètre $\lambda$ doit être supérieur à une certaine valeur minimum $\underline{\lambda}$ qui correspond au temps d'exécution minimum lorsque toutes les tâches critiques sont à leur durée minimum $\underline{d}_i$.

2. Ensuite, remarquons que la fonction $c(\lambda)$ est convexe, décroissante et linéaire par morceaux.

3. Enfin, à partir d'une certaine valeur $\overline{\lambda}$ de $\lambda$, on aura systématiquement $d_i = \overline{d}_i$ et l'objectif devient constant. Cette valeur $\overline{\lambda}$ correspond au temps minimum d'exécution du projet lorsque toutes les tâches critiques sont à leur durée maximum $\overline{d}_i$

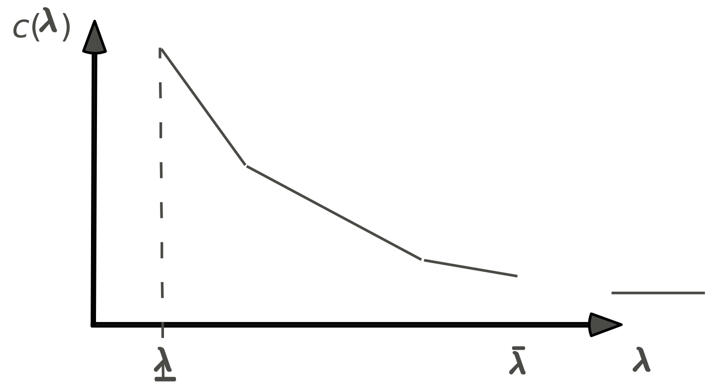


Figure 7.13: Coût d'exécution en fonction de $\lambda$.

Comment va-t-on alors choisir le temps optimum? A voir la forme de la courbe 7.13, il vaudrait mieux prendre $\lambda = \bar{\lambda}$, le temps maximum. Mais ceci ne tient compte que des **coûts directs d'exécution des tâches**.

Il existe aussi des coûts indirects liés à la durée du chantier. Ce sont les frais d'assurances, les salaires de l'encadrement, les frais de location du matériel, et les pénalités par jour de retard. Tous ces frais sont évidemment croissants avec $\lambda$, la durée du chantier. On note $c_I(\lambda)$ ces coûts indirects.

Si on additionne les deux courbes (coûts directs et coûts indirects), comme à la figure 7.14, on obtient la courbe de coût total dont on peut déterminer le minimum:

$$c_T(\lambda) = c_D(\lambda) + c_I(\lambda)$$

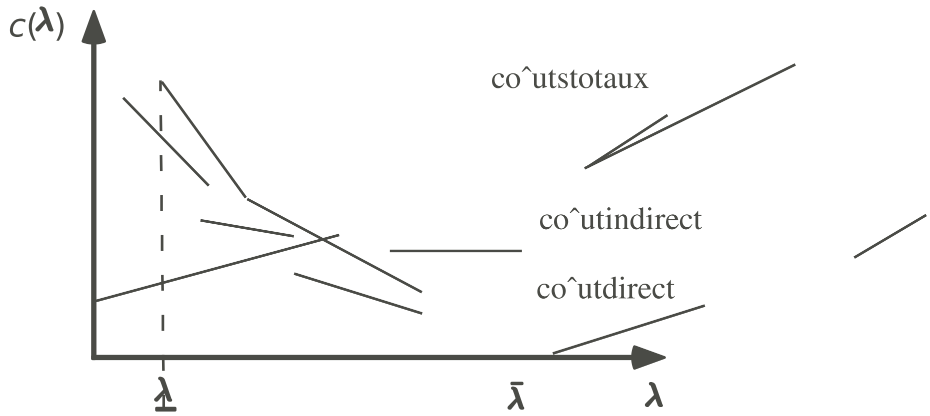


Figure 7.14: Coûts totaux.

On a donc arbitré entre les deux objectifs de *diminution des coûts* et de *diminution du temps d'exécution.*

## 7.8 Exercices

7.1. **Equipementd'unensembleminier.** L'´equipementd'unensembleminier comportelest^achessuivantesdontladur´eeestexprim´eentrimestres.

| No | t^ache | dur´ee | pr´ealables |
|---|---|---|---|
| 1 | Commanded'unepiste | 6 | - |
| 2 | Constructiond'unportprovisoire | 3 | - |
| 3 | Commandedemat´erielportuaire | 2 | - |
| 4 | Posed'unevoieferr´ee | 4 | 2 |
| 5 | Constructiond'unecit´eadministrative | 7 | 2 |
| 6 | Constructionduportd´efinitif | 2 | 2 |
| 7 | Constructiondel'installationmini`ere | 4 | 1et4 |
| 8 | Equipementportuaired´efinitif | 3 | 3et6 |

(a) Construirelegrapherelatif`alam´ ethodedupotentiel.

(b) Calculerlesdatesded´ebutauplust^ot,lesdatesded´ebutauplustard. D´eterminerlechemincritique.

(c) Commentmodifierlegraphesi,onveutquelat^ache7necommence pasavant8trimestres?Recalculezlesdatesded´ebutauplust^ot,les datesded´ebutauplustard.

(d) Comment modifierlegraphesi onveut enplusquelat^ache8ne commencepasapr`es4trimestres?Ditessileprobl`emerestesoluble.

7.2. **Constructiond'unb^atiment.** Consid´eronslesdiff´erentest^aches`aeffectuer pourconstruireunb^atiment. Ellessontreprisesci-dessous.

| No | t^ache | dur´ee | pr´ealables |
|---|---|---|---|
| 1 | fondations | 6 | - |
| 2 | murs | 10 | 1 |
| 3 | plomberieint´erieure | 5 | 2 |
| 4´ | electricit´e72 | | |
| 5 | toit | 6 | 2 |
| 6 | plomberieext´erieure | 4 | 5 |
| 7 | menuiserie | 8 | 3et4 |
| 8 | sols | 4 | 7 |
| 9 | peintureint´erieure | 5 | 7 |
| 10 | finitionsint´erieures | 6 | 8et9 |
| 11 | peintureext´erieure | 9 | 6 |
| 12 | finitionsext´erieures | 2 | 11 |

(a) Tracez le graphe relatif à la méthode du potentiel.

(b) Calculez les dates de début au plus tôt, les marges et déterminez le(s) chemin(s) critique(s).

(c) Les tâches 9 (peinture intérieure) et 11 (peinture extérieure) doivent être disjointes car effectuées par les mêmes ouvriers. Comment résoudre cette disjonction? La date de fin des travaux est-elle affectée?

7.3. **La méthode PERT.** Une entreprise décide de commercialiser un nouveau produit. La planification de ce lancement fait apparaître les tâches reprises au tableau 7.2 avec leur durée (en semaines) et leurs préalables.

(a) Tracer le graphe correspondant à la méthode PERT.

(b) Calculez les dates de début au plus tôt, au plus tard, les marges et le chemin critique.

(c) L'entreprise voudrait réduire la durée totale d'exécution des travaux. Pour cela, il est possible de réduire la durée des tâches 5 et 11 de une ou deux semaines au prix d'un coût supplémentaire de 100000 EURO par semaine de réduction pour la tâche 5 et de 200000 EURO par semaine pour la tâche 11. De combien peut-on réduire la durée totale des travaux et à quel coût?

| No | tâche | durée | préalables |
|---|---|---|---|
| 1 | Sélection des équipements | 1 | - |
| 2 | Choix de la méthode de production | 2 | 1 |
| 3 | Procédures de contrôle de qualité | 2 | 2 |
| 4 | Choix des matières premières | 2 | 1 |
| 5 | Réception des équipements | 7 | 1 |
| 6 | Commande des matières premières | 1 | 4 |
| 7 | Réception des matières premières | 3 | 6 |
| 8 | Essais de production | 2 | 5,3 et 7 |
| 9 | Première fourniture aux magasins | 6 | 8 et 11 |
| 10 | Conception du conditionnement | 4 | 1 |
| 11 | Production du conditionnement | 5 | 10 |
| 12 | Réunion des vendeurs | 1 | 11 |
| 13 | Formation des vendeurs | 1 | 12 |

Tableau 7.2: Lancement d'un nouveau produit

7.4. **Minimisation des coûts.** On considère un chantier de construction qui fait intervenir cinq tâches dont les durées, les tâches préalables et les frais directs (main d'œuvre, heures machine) sont donnés au tableau 7.3.

| Tâche | durée (jours) | tâches préalables | frais directs (EUR) |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | - | 30000 |
| 2 | 6 | - | 40000 |
| 3 | 5 | 1 | 50000 |
| 4 | 8 | 2 et 3 | 50000 |
| 5 | 7 | 4 | 10000 |

Tableau 7.3: Minimisation des coûts

(a) Tracer le graphe correspondant à la méthode du potentiel.

(b) Déterminer les dates de début au plus tôt au plus tard et le chemin critique.

(c) Les durées des tâches 3 et 5 peuvent être réduites jusqu'à 3 et 5 jours au prix d'accroissements de coûts de 20000 et 10000 EURO par jour. Ecrire le programme exprimant la minimisation du coût direct pour une durée totale $t_f$ donnée. On commencera par exprimer les coûts directs $c_3$ et $c_5$ des tâches $3$ et $5$ comme fonctions affines des durées $d_3$ et $d_5$ qui deviennent variables.

(d) On désire étudier, en fonction du paramètre $t_f$, les variations du coût minimal direct total $C_D$ obtenu à l'aide du programme précédent. Donner la forme de la courbe représentant les variations de ce coût en fonction de $t_f$. Déterminer numériquement l'évolution du coût direct $C_D$ en fonction de $t_f$ en partant du résultat de la question (b) et en réduisant progressivement la durée $t_f$ de façon à ce que le coût direct soit toujours minimal.

(e) En plus des coûts directs, l'entreprise supporte aussi des frais indirects. Ces frais indirects comportent les salaires de l'encadrement, des frais de location de matériel, des frais d'assurance et des frais financiers pour un montant total de 10000 + 5000 $t_f$ et aussi une pénalité de 10000 EURO par jour de retard au delà du 22ème jour. Décrire sur un même graphique l'évolution du coût indirect $C_I$, du coût direct $C_D$ et du coût total en fonction de la durée de fin de chantier. Quelle valeur donner à cette durée?

7.5. **Lancementd'unnouveauproduit.** Unesoci´et´emet`al'étudelelancement d'unnouveauproduit. Celancementn´ecessitelar´ealisationde10t^aches rep´er´eesparleslettresA`aJ,etdontlescaract´eristiquessontdonn´ees`ala table7.4.

| tâche | dur´ee | anc^etre(s) | observations |
|---|---|---|---|
| A | 7 | C,F | RecouvrementpossibleavecC de3semaines |
| B | 3 | D,H,G | |
| C | 6 | J | Nepeutcommenceravant led´ebutdela14`emesemaine. |
| D | 3 | - | |
| E | 2 | D | |
| F | 5 | JetI | |
| G | 4 | - | |
| H | 5 | - | |
| I | 7 | GetH | |
| J | 4 | EetB | |

Tableau7.4:Lancementd'unnouveauproduit

(a) Etablirlegraphiquedelam´ethodedupotentiel.

(b) V´erifiersurlegraphiquequeleprobl`emeestsoluble(expliquersuc-cinctementpourquoi).

(c) Calculerlesdatesded´ebutauplust^ot,auplustard,lesmarges.

(d) Donnertouslescheminscritiques.

| tâche | co^ut |
|---|---|
| C | 10.000EURO |
| F | 15.000EURO |
| B | 5.000EURO |
| I | 6.000EURO |

Tableau7.5:R´eductionpossibledeladur´ee

(e) Ledirecteurcommercialsouhaiteraccourcirladur´eed'ex´ecutiondu projetd'unesemaine. Lest^achessurlesquellesilestpossibled'agir ainsiqueleco^utcorrespondant `aleurdiminutiondedur´eed'unese-mainesontdonn´es`alatable7.5. Quesugg´erez-vous?

# Chapitre8

# Conceptiond’uncentredeproduction

## 8.1 Introduction

Les**d´ecisionsd’implantationd’uncentredeproduction**incluent

1. lad´ecisionde*localisationducentre*quid´ependde:
   - lalocalisationdesclients:ilfautminimiserlesco^utsdetransportvers ceux-ci;
   - ladisponibilit´eetleco^ utdelamaind’œuvre;
   - ladisponibilit´edesmati`erespremi`eres;
   - lesaidesnationalesetlocales`al’investissement;
   - lavolont´edep´en´etrerunmarch´elocaldifficile;
   - laqualit´edesh^opitaux,laqualit´educadredevie, ...

   Atitred’exemple,onpeutciterlalocalisationd’unenouvelleusineTOYOTA pr`esdeValenciennes, quiestsitu´eeaucœurdel’Europeetdanslepays europ´eenleplusprotectionnisteenfaveurdesesmarquesnationales.

2. lechoixdela*capacit édeproduction*quid´epend:
   - delapr´evisiondelademande`alongterme;
   - delavolont´edel’entreprisededominerunmarch´e;
   - delapossibilit´eder´ epondrerapidement`adesvariationsdedemande.

   Vul’incertitudesurlademande,onimplantesouventunenouvelleusinepar phasessuccessives. CeseralecasdelanouvelleusinedeToyotapr`esde Valenciennes.

3. la*configurationducentredeproduction:*ils’agitded´eterminercomment lesdiff´erents´equipementsetpostesdetravaildoivent^etredispos´es.

## 8.2 Configuration d'un centre de production

Il s'agit donc ici de déterminer la manière de disposer les équipements et les postes de travail les uns par rapport aux autres. Il existe au moins **trois types de configurations possibles:**

1. La *configuration en ateliers spécialisés* est utilisée lorsqu'il y a une grande variété d'articles différents à produire. On peut alors regrouper dans un atelier l'ensemble des machines assurant *une fonction donnée*. Par exemple, dans un garage, l'atelier de peinture, l'atelier carrosserie, ...
2. La *configuration en terme de produit* est utilisée lorsqu'il y a une demande importante et continue de quelques produits. On organise la production soit en ligne (c'est le cas des lignes d'assemblage d'automobiles) soit en industrie de process (c'est le cas des raffineries de pétrole).
3. On parle de *configuration à poste fixe* lorsque l'opérateur doit se déplacer entre deux opérations. On peut citer comme exemples:
   - un client qui se déplace entre les différents rayons d'un supermarché;
   - un magasinier qui se déplace entre les différents rayonnages d'un magasin de stockage de carrelage.

### 8.2.1 Configuration en ateliers spécialisés

Illustrons cette configuration par l'exemple tiré de MacClain [13] d'une maternité qui regroupe les *différents services* concernés sur un même étage d'un hôpital:

- accueil
- salle d'attente
- consultation prénatale
- échographie
- salle d'accouchement

Une **question** cruciale pour une bonne organisation de ce type de configuration est la *localisation relative* de ces différents services. On doit **tenir compte** de:

1. du volume de trafic entre deux services de sorte que deux services avec un flux important soient localisés proches l'un de l'autre;

2. du fait qu'il peut y avoir répulsion entre deux services.

Une **matrice de proximité** peut être utilisée pour indiquer la proximité voulue
A: Absolument nécessaire
S: Spécialement important
I: Important
G: Généralement proche,
: sans importance
X: à éviter
La figure 8.1 illustre cette matrice dans le cas de la maternité. On peut également,

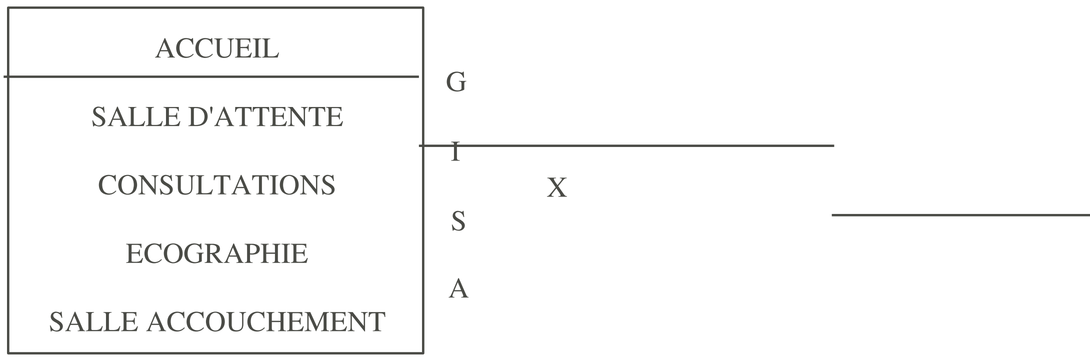


Figure 8.1: Matrice de proximité

plutôt que de noter la proximité, donner une **matrice de flux** entre les différents services. On peut alors concevoir une localisation des différentes services qui *minimise la somme des flux entre services pondérée par la distance entre ces services*.

Supposons que l'on note l'intérêt d'être proche par la grille de poids suivante:
4: Absolument nécessaire
3: Spécialement important
2: Important
1: Généralement proche
0: sans importance
-1 : à éviter

On peut alors définir la matrice de poids $w_{ik}$ mesurant l'importance pour le service $i$ d'être proche du service $k$ donnée au tableau 8.1.

Les cinq services sont à placer à une des cinq places disponibles sur le plateau de l'hôpital représenté à la figure 8.2.

On peut mesurer la distance $d_{jl}$ entre les emplacements $j$ et $l$. Elles sont reprises au tableau 8.2.

| $w_{ik}$ | $k=1$ | $k=2$ | $k=3$ | $k=4$ | $k=5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $i=1$ | | 1 | | | $-1$ |
| $i=2$ | 1 | | 2 | | |
| $i=3$ | | 2 | | 3 | |
| $i=4$ | | | 3 | | 4 |
| $i=5$ | $-1$ | | | 4 | |

Tableau8.1:Matricedepoidsmesurantl’importanced’ˆetreproches

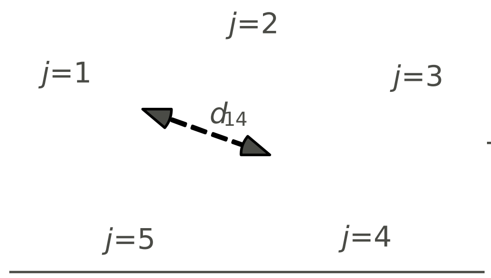


Figure8.2:Dispositionrelativedeslocaux`aaffecter

| $d_{jl}$ | $l=1$ | $l=2$ | $l=3$ | $l=4$ | $l=5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $j=1$ | | 5 | 7 | 5 | 4 |
| $j=2$ | 5 | | 4 | 2 | 3 |
| $j=3$ | 7 | 4 | | 2 | 3 |
| $j=4$ | 5 | 2 | 2 | | 1 |
| $j=5$ | 4 | 3 | 3 | 1 | |

Tableau8.2:Matricedesdistancesentrelocaux

Nous allons maintenant formuler le problème comme un **problème d'affectation quadratique**. On a donc $5$ services à localiser à une des $5$ places possibles. On choisit ici comme *variables:*

$$\begin{aligned} x_{ij} &= 1 \quad \text{si le service } i \text{ est localisé en place } j, \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Dans ce cas, *l'objectif* peut s'écrire de la manière suivante:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} w_{ik} d_{jl} x_{ij} x_{kl}$$

avec $d_{jl}$ la distance entre les localisations $j$ et $l$ et $w_{ik}$, le poids dans la matrice de proximité.

Expliquons la forme de cette fonction: on ne retrouvera dans cet objectif que les termes où $x_{ij} x_{kl} = 1$, c'est-à-dire où $i$ est mis en place $j$ et $k$ en place $l$. L'objectif minimise la somme des distances entre les paires de lieux $(j,l)$, pondérée par l'importance d'une localisation proche des paires de services $(i,k)$, pour autant que $x_{ij}$ et $x_{kl}$ soient égaux à un. Afin de minimiser ce produit, on mettra donc comme coefficient des $w_{ik}$ les plus élevés, les $d_{jl}$ les plus faibles, c'est-à-dire les plus proches l'un de l'autre ceux qui y ont le plus grand intérêt.

Les *contraintes* sont de deux types:

- "Toute place $j$ est occupée:"

  $$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall j = 1, \ldots n$$

  La contrainte indique que chaque place $j$ est occupée par exactement un service $i$.

- "Tout service $i$ est placé:"

  $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall i = 1, \ldots n$$

  La contrainte indique que chaque service $i$ est placé à une place $j$.

Il faut bien sûr également imposer le caractère entier des variables:

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \forall i,j.$$

Nous ne verrons pas, dans le cadre de ce cours, de méthode de résolution de ce problème.

### 8.2.2 Configuration en ligne de production

Lorsqu'un produit est fabriqué en grande quantité, on peut gagner en efficacité en organisant la *production en ligne.* A titre d'exemple, on peut citer les usines d'assemblage automobiles ou les tunnels de lavage de voitures (car-wash).

Le **problème principal** réside dans *l'équilibrage de la chaîne:* il faut que les différentes opérations prennent le même temps car la chaîne tourne à la vitesse de l'opération la plus lente.

Une **ligne d'assemblage** est dite *parfaitement équilibrée* si chaque poste de travail est occupé à 100%.

Illustrons ceci sur l'exemple suivant tiré de MacClain [13]. Un appareil électroménager est constitué de 11 composants, notés B1 à B11, de 3 sous-ensembles notés SA1 à SA3. Le tableau 8.3 fournit les tâches, leurs durées et leurs préalables. Le temps total d'assemblage est de 100 minutes au minimum.

| Label | Temps | Objet | Prédécesseurs |
|---|---|---|---|
| A2 | | placer le chassis sur la chaîne | - |
| B7 | | attacher B4 sur chassis | A |
| C5 | | attacher B2 sur B1 | - |
| D2 | | attacher B3 sur B1 | - |
| E15 | | tester SA1 | C,D |
| F7 | | attacher SA1 sur chassis | A,E |
| G6 | | attacher B6 à B5 | - |
| H4 | | attacher SA2 au chassis | B,G |
| I9 | | attacher B7 au chassis | A |
| J10 | | attacher B9 à B8 | - |
| K4 | | attacher B10 à B8 | - |
| L8 | | attacher B11 à B8 | J,K |
| M6 | | attacher SA3 au chassis | A,L |
| N15 | | tester l'appareil | tous |
| Total | 100 | | |

Tableau 8.3: Equilibrage d'une chaîne

On dispose de cinq opérateurs.

On peut tracer un **graphe de préséance** qui n'est rien d'autre que le graphe de la méthode du potentiel où chaque tâche est représentée par son label et sa durée.

On a représenté ce graphe à la figure 8.3.

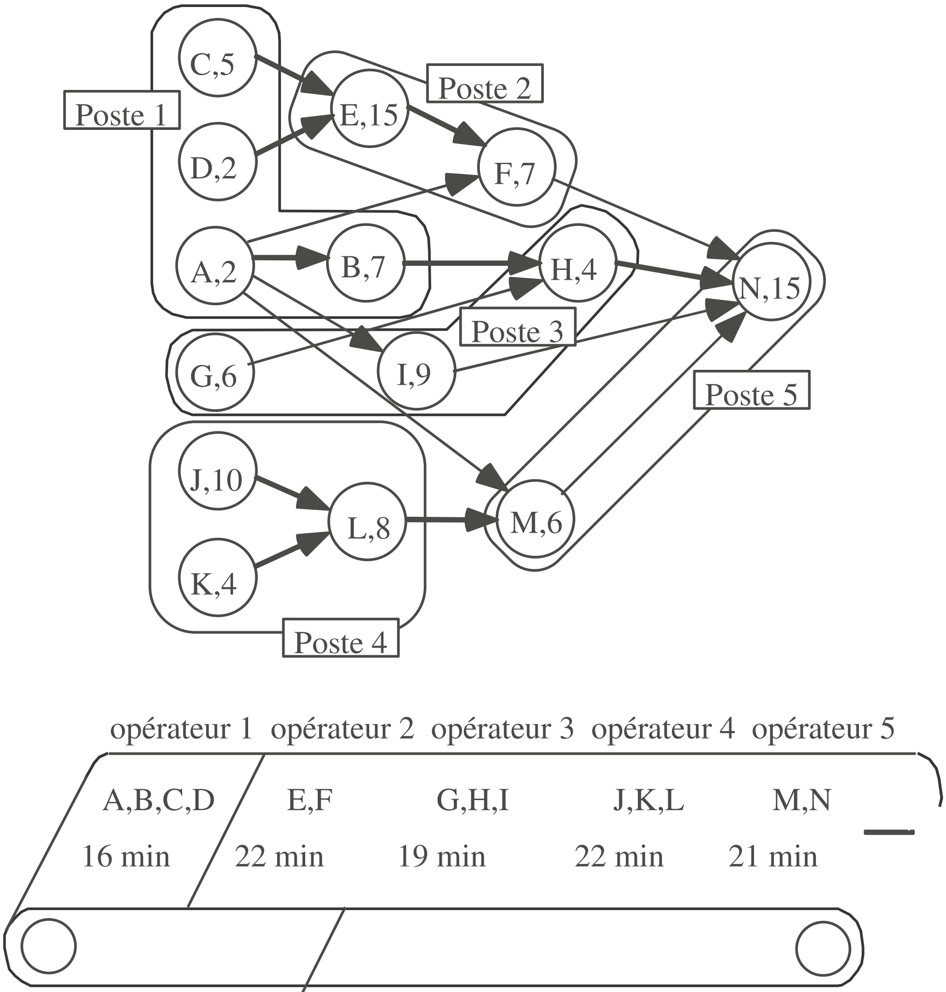


Figure 8.3: Une affectation possible

Une **affectation possible des tâches aux opérateurs** est obtenue en traçant cinq sous-ensembles, correspondant aux tâches des cinq opérateurs, tout en respectant les contraintes de préséance. Le temps total de montage, pour le choix fait à la figure 8.3, est de:

$$5 \text{ opérateurs} \times 22 \text{ minutes par cycle} = 110 \text{ homme-minutes.}$$

Il y a donc un *temps mort* de 10 minutes, ce qui correspond à un pourcentage de:

$$\frac{10}{110} = 9,1\%$$

Une **mesure de la qualité de la solution** est précisément ce rapport du temps mort sur le temps total de montage. Ce rapport est appelé *retard d'équilibre* et se calculeparlaformulesuivante:

$$RE = \frac{nc - T}{nc}$$

avec $n$ = nombredepostesdetravail,
$c$ = tempsd'uncycle
= inversedelafréquence,
$T$ = tempstotalrequisparunarticle
= sommedestempsindividuels.

Remarquonsqu'ici onn'apasatteint l'objectifd'unéquilibrageparfait qui impliqueraitdeconstruire3articlesparheureavecuntempsdecyclede20minutes. Remarquonsqu'iln'est*pastoujourspossibled'atteindrel' équilibreparfaitdela chaîne*puisquelestâchesnesontpasdivisiblesàl'infini.

Voyonsmaintenant comment **résoudreleproblème.** Trouverl'affectation quiminimiseREestunproblèmeennombresentiersparticulièrementdifficileà résoudre. Uneheuristiquequipermetdetrouverrapidementunesolution(sans garantiequ'ellesoitoptimale)estlasuivante. Onsefixeuneduréemaximumpour chaquepostedetravail. Icifixonsnousuneduréemaximumde19minutes. On vaalorsremplircespostesdelamanièresuivante:

**Pas1.** Attribuerunscoreàchaquetâcheetclasserlestâchesparscoredécroissant. Ici,onutilisecomme**score1**laduréedelatâche. Onobtient:

$$E,N,J,I,L,B,F,G,M,C,H,K,A,D$$

**Pas2.** Mettreàjourl'ensembledestâchesdisponibles(c'est-à-direlestâchesdont touslesprédécesseursimmédiatssontaffectés)Audébut,cesontcellessans prédécesseur:

$$S = \{J,G,C,K,A,D\}$$

**Pas3.** Affecterlatâcheaveclescoreleplusélevédanslepremierposteoùla capacitéetlescontraintesdepréséancenesontpasviolées:

$J$ auposte1.

Allerenau**Pas2.**

Onremplitalorsprogressivementletableausuivant.

| Poste1 | Poste2 | Poste3 | Poste4 | Poste5 | Poste6 | Poste7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| J,10<br>G,6<br>A,2 | C,5<br>K,4<br>L,8<br>D,2 | I,9<br>B,7 | M,6<br>H,4 | E,15 | F,7 | N,15 |
| 18 | 19 | 16 | 10 | 15 | 7 | 15 |

Ledétaildesitérationsestreprisci-dessous:

$S=\{G,C,K,A,D\}$ :Gen1; $S=\{C,K,A,D\}$ :Cen2; $S=\{K,A,D\}$ :Ken2; $S=\{L,A,D\}$ :Len2; $S=\{A,D\}$ :Aen1; $S=\{I,B,M,D\}$ :Ien3; $S=\{B,M,D\}$ :Ben3; $S=\{M,H,D\}$ :Men4; $S=\{H,D\}$ :Hen4; $S=\{D\}$ :Den2; $S=\{E\}$ :Een5; $S=\{F\}$ :Fen6; $S=\{N\}$ :Nen7

Onpeutalorscalculerleretardd'équilibredecettesolution:

$$\mathrm{RE}=\frac{nc-T}{nc}=\frac{7\times 19-100}{7\times 19}=24{,}81\%$$

Onvoitquelasolutionn'estpasd'unetrèsgrandequalité. Onpeututiliser plutôtun**secondscore**quiconsisteàadditionneràladuréedelatâche, celles detouteslestâchesquilasuivent. Ainsi, àladuréedelatâcheA,onajoutele tempsdestâchesF,B,I,M,HetN.Lecalculdusecondscoredonnelesrésultats suivants:

| *A* | *B* | *C* | *D* | *E* | *F* | *G* | *H* | *I* | *J* | *K* | *L* | *M* | *N* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 26 | 42 | 39 | 37 | 22 | 25 | 19 | 24 | 39 | 33 | 29 | 21 | 15 |

Leclassementdestâchessuivantcesecondscoreestlesuivant:

$$A,C,D,J,E,K,L,B,G,I,F,M,H,N$$

Onremplitletableaucommesuit

| Poste1 | Poste2 | Poste3 | Poste4 | Poste5 | Poste6 |
|---|---|---|---|---|---|
| A,2<br>C,5<br>D,2<br>J,10 | E,15<br>K,4 | L,8<br>B,7 | G,6<br>I,9<br>H,4 | F,7<br>M,6 | N,15 |
| 19 | 19 | 15 | 19 | 13 | 15 |

Ledétaildesitérationsestdonnéci-dessous.

$S=\{A,C,D,J,K,G\}$ :Aen1; $S=\{C,D,J,K,B,G,I\}$ :Cen1; $S=\{D,J,K,B,G,I\}$ :Den1; $S=\{J,E,K,B,G,I\}$ :Jen1; $S=\{E,K,B,G,I\}$ :Een2; $S=\{K,B,G,I,F\}$ :Ken2; $S=\{L,B,G,I,F\}$ :Len3; $S=\{B,G,I,F,M\}$ :Ben3; $S=\{G,I,F,M\}$ :Gen4; $S=\{I,F,M,H\}$ :Ien4; $S=\{F,M,H\}$ :Fen5; $S=\{M,H\}$ :Men5; $S=\{H\}$ :Hen4 $S=\{N\}$ :Nen6.

On peut alors calculer le retard d'équilibre de cette solution :

$$RE = \frac{19 \times 6 - 100}{19 \times 6} = 12,3\%$$

On voit que la solution est meilleure sans être optimale. On peut également agir sur la durée maximum de 19 qui est un paramètre de l'heuristique.

### 8.2.3 Configuration à poste fixe

Lorsque l'opérateur voyage entre les différentes opérations, on parle de *conception à poste fixe*. Comme **exemples,** on peut citer :

- les magasins en self-service où le client se déplace de rayon en rayon ;
- les entrepôts de stockage de carrelages, de tapis-pleins, etc ...
- une centrale de stockage intermédiaire d'une société de distribution ;
- une infirmière qui se déplace d'une chambre à l'autre dans un hôpital, ...

Le **problème principal** réside dans la localisation des aires de stockage de manière à minimiser soit

- le *coût total de manipulation* en mettant les produits les plus utilisés aux endroits les plus accessibles ;
- le *temps maximum d'accès* dans le cas, par exemple, de la localisation de centres d'intervention d'urgence.

**Cas d'un entrepôt :**

Illustrons ce cas par l'exemple de la société Sommer qui produit en grandes séries ses différentes références de tapis pleins qui sont vendues en quelques unités à ses clients qui sont les centres de bricolage et les surfaces spécialisées en revêtement de sol. On approvisionne le stock en grandes quantités (de l'ordre de 200 rouleaux d'un même type). On déstocke, à la demande, en petites quantités (un ou deux rouleaux). Le stockage est rendu nécessaire par la différence entre la taille économique d'un lot à la production et la taille moyenne d'un lot demandé.

Pour le **placement optimal des rouleaux,** on a intérêt à *placer les articles ayant le plus fort taux de rotation de stock aux emplacements les plus accessibles.* Il y a *deux manières de stocker :*

- *Stocker à des places dédiées:* une référence donnée sera toujours à la même place. Ce qui facilite le contrôle et l'information. **L'inconvénient** est que l'on perd beaucoup de place car chaque emplacement est rempli à 50% en moyenne.

- *Stocker à la première place disponible:* ceci nécessite un système informatique de localisation: chaque lot est localisé par le numéro de l'allée, la distance dans l'allée, et la hauteur dans le rayon.

La **solution adoptée chez Sommer** est le dédicacement par zone: on place le produit dans la première place disponible dans une zone (assez large) correspondant à son taux de rotation. Ceci est donc un compromis entre une capacité de stockage réduite et la rapidité d'accès aux produits à forte rotation de stock.

**Cas des centres d'intervention d'urgence:**

Dans ce second cas, **l'objectif** est de minimiser le temps d'accès au client le plus éloigné. Par exemple, dans un service hospitalier, on veut localiser le local des infirmières de manière à avoir un temps de réaction auprès de chaque patient aussi court que possible. La **solution**, dans ce cas, est de construire un étage circulaire avec le local des infirmières au centre. Remarquez qu'ici souvent la solution impliquera des *localisations multiples* afin de bien couvrir une zone: par exemple, dans le cas des pompiers, on aura diverses antennes délocalisées permettant d'atteindre rapidement des villages décentrés.

## 8.3 Décisions de capacité

Nous allons illustrer les décisions de choix d'une capacité sur l'exemple tiré de MacClain [13] d'une boulangerie industrielle qui fournit les supermarchés de sa région et qui s'attend à une croissance de la demande.

Les **données numériques** sont les suivantes:

1. *Modélisation de la demande:* il y a incertitude sur la demande future du produit. Si le succès du produit est important, une capacité supplémentaire de 5000 unités par semaine sera nécessaire pour un profit de 40000$ par semaine hors frais d'amortissement du capital. Si le succès du produit est mitigé, une capacité de 2000 unités par semaine sera suffisante et la compagnie fera un profit de 16000$ par semaine. La demande est connue au bout d'un an. On suppose que les bénéfices sont comptabilisés en fin d'année. Une année comporte 52 semaines d'ouverture du magasin.

2. *Données de coût d'investissement.* Une capacité de 2000 unités par semaine peut être construite pour 800000\$. Une capacité de 5000 unités par semaine peut être construite pour 1,5 millions de \$. Une capacité de 2000 peut être étendue à une capacité de 5000 pour 1 million de \$. Les surcapacités sont sans valeur.
3. La *durée de vie des équipements* est de 20 ans.
4. Le *facteur d'actualisation*, nécessaire car les profits sont répartis dans le futur, est de 25% l'an.
5. La *probabilité de succès* du lancement du produit est estimée à 20% sur base d'expériences d'introduction d'autres produits.

Les différents **choix possibles** peuvent être utilement illustrés sur un arbre de décision tel que celui de la figure 8.4. Un carré représente une décision. Un cercle

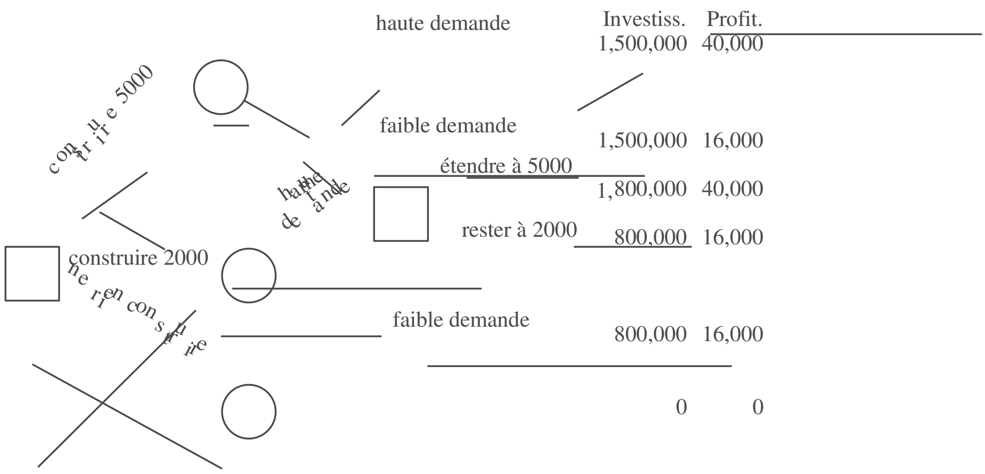


Figure 8.4: Arbre de décision

représente un état du monde.

Pour le **choix d'une capacité,** on va sélectionner la *capacité d'espérance de profit la plus élevée*.

**Définition 8.1** *On appelle valeur nette présente, la somme actualisée des profits futurs moins l'investissement initial.*

Appliquons ceci à l'exemple. Si, au début de la deuxième année, on étend la capacité de 2000 à 5000, ceci rapporte un supplément de profit pour les années 2 à 20, rapporté à la fin de la première année de:

$$\sum_{j=1}^{19} (40000-16000)\times 52\times \left(\frac{1}{1,25}\right)^{j}$$

On peut démontrer la formule suivante pour le **calcul d'annuités:**

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+i}\right)^{j} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Appliquons ceci à notre exemple:

$$\sum_{j=1}^{19}\left(\frac{1}{1,25}\right)^{j} = \frac{1-(1,25)^{-19}}{0,25} = 3,942$$

On obtient donc une valeur nette au bout d'un an de:

$$24000 \times 52 \times 3942 = 4920057.$$

dont on déduit la valeur nette présente de l'investissement fait au bout d'un an:

$$\text{VNP} = 4920057 - 1000000 = 3920057.$$

On en conclut que l'on a intérêt à faire l'investissement puisque la Valeur Nette Présente est positive: on aura un return positif de l'investissement.

Considérons la *construction initiale de 2000 augmentée de 3000, en cas de demande forte.* L'investissement initial de 2000 rapporte 16000$ durant 20 ans et l'investissement de 2ème année rapporte 3920057 au bout d'un an:

$$(16000 \times 52) \times \sum_{j=1}^{20}\left(\frac{1}{1,25}\right)^{j} + 3920057\frac{1}{1,25} - 800000 = 5625677.$$

Considérons maintenant la *construction de 2000 en cas de demande faible:*

$$(16000 \times 52) \times \sum_{j=1}^{20}\left(\frac{1}{1,25}\right)^{j} - 800000 = 2489631.$$

Considérons la *construction initiale de 5000 en cas de demande forte:*

$$(40000 \times 52) \times \sum_{j=1}^{20}\left(\frac{1}{1,25}\right)^{j} - 1500000 = 6724076.$$

Considérons maintenant la *construction initiale de 5000 en cas de demande faible:*

$$(16000 \times 52) \times \sum_{j=1}^{20}\left(\frac{1}{1,25}\right)^{j} - 1500000 = 1789631.$$

Les résultats dans les différents cas sont résumés au tableau 8.4.

On peut alors calculer **les profits espérés** dans chacun des trois cas:

| Décision | demande | VNP |
|---|---|---|
| construire 5000 | forte | 6724076 |
| construire 5000 | faible | 1789631 |
| construire 2000+3000 | forte | 5625677 |
| construire 2000 | faible | 2489631 |
| construire 0 | forte | 0 |
| construire 0 | faible | 0 |

Tableau 8.4: Calcul de la VNP

- *Construire 5000:*

$$E(VNP) = 0,2 \times 6724076 + 0,8 \times 1789631 = 2776519\$.$$

- *Construire 2000:*

$$E(VNP) = 0,2 \times 5625677 + 0,8 \times 2489631 = 3117039\$.$$

En conclusions, il vaut mieux construire une petite capacité et étendre après un an si nécessaire. Remarquons que le résultat dépend crucialement de la probabilité de succès du produit (voir exercice ci-dessous).

## 8.4 Décisions de localisation

La **décision de localisation** d'un centre de production doit être analysée en *tenant compte de plusieurs critères:*

1. la facilité d'accès, les coûts de transport;
2. la disponibilité, qualification et le coût de la main d'œuvre;
3. le coût de construction, les taxes locales;
4. l'attraction des clients;
5. la disponibilité des matières premières;
6. les attitudes des autorités locales et nationales.

**L'importance relative de ces critères** dépend du type d'activité à localiser:

- *localiser un super-marché:* les coûts de transport et l'attraction des clients sont prépondérants;
- *localiser une usine:* le coût de la main d'œuvre et la disponibilité des matières premières sont prépondérants.

Les modèles de localisation optimale considèrent généralement *un seul critère*. Deux techniques sont appliquées suivant l'objectif poursuivi: la *technique de gravité* si on veut minimiser les coûts totaux de transport ou celle *de discrétisation* si on veut minimiser le temps d'accès au client le plus éloigné.

Comme nous l'avons dit, il existe deux techniques qui correspondent chacune à un choix d'objectif:

- La *technique du centre de gravité.* Si l'on veut minimiser le nombre total de tonnes-kilomètres de produit transporté, on a intérêt à se situer au centre de gravité des clients et fournisseurs. Par exemple, dans la localisation d'une usine de production de béton, on a intérêt à se situer au centre de gravité des carrières et des gros clients.
- La *méthode de discrétisation.* Lorsque le critère temps d'accès est le plus important, on aura recours le plus souvent à des *emplacements multiples* afin d'avoir un bon accès à tous. Par exemple, lors de la *localisation d'un centre d'intervention de pompiers,* on veut minimiser le temps d'accès au client le plus éloigné. Ce qui conduit à implanter des antennes décentralisées.

## 8.5 Utilisation de la programmation mathématique

Pour terminer ce chapitre, nous allons illustrer l'utilité de la programmation mathématique dans les décisions de localisation et de choix de capacités sur un exemple également tiré de tiré de MacClain [13].

Les différentes **données du problème** sont reprises aux tableaux 8.5 et 8.6. Les coûts de transport entre les différentes usines et les différents clients sont donnés au tableau 8.5 en $ par kg. Les demandes des clients sont données au tableau 8.5 en millions de kg par jour. Les coûts de production sont donnés au tableau 8.6 en $ par kg. Les capacités de production sont données au tableau 8.6 en milliers de kg par jour.

On veut déterminer le plan de distribution qui minimise les coûts de production et les coûts de transport.

| Versle leclient | Coˆutdel'usine($/kg) | | | Demandeduclient ($10^6$ kg/jour) |
|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | |
| 1 | 0,021 | 0,039 | 0,035 | 0,5 |
| 2 | 0,024 | 0,029 | 0,034 | 0,8 |
| 3 | 0,019 | 0,040 | 0,029 | 0,5 |
| 4 | 0,048 | 0,027 | 0,026 | 0,9 |
| 5 | 0,037 | 0,024 | 0,032 | 0,9 |
| 6 | 0,029 | 0,023 | 0,041 | 0,8 |
| 7 | 0,020 | 0,041 | 0,032 | 0,6 |
| 8 | 0,041 | 0,034 | 0,019 | 0,6 |
| 9 | 0,050 | 0,034 | 0,018 | 0,8 |
| 10 | 0,047 | 0,035 | 0,018 | 0,7 |

Tableau8.5:Coˆutsdetransportetdemandes

| Usine | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Coˆutdeproduction($/kg) | 0,347 | 0,326 | 0,351 |
| Capacit´edeproduction( $10^6$ kg/jour) | 1,8 | 4 | 1,6 |

Tableau8.6:Coˆutsetcapacit´esdeproduction

Nous allons formuler le problème comme un **problème de programmation mathématique:**

- *Choix des variables.*

  Notons $x_{ij}$, le nombre de millions de kg produits à l'usine $i$ et livrés au client $j$.

- *Expression de l'objectif.*

  Il s'exprime simplement par:

$$min \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{10} c_{ij} x_{ij}$$

  avec $c_{ij}$, le coût de fourniture d'un million d'unités de l'usine $i$ vers le client $j$. Ce coût est la somme du coût de production et du coût de transport.

- *Expression des contraintes.*

  Elles sont de deux types:

  – "Respecter la capacité de l'usine $i$ :"

$$\sum_{j=1}^{10} x_{ij} \leq CAP_i$$

  où $CAP_i$ note la capacité de l'usine $i$.

  – "Satisfaire la demande du client $j$ :"

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = DEM_j$$

  où $DEM_j$ note la demande du client $j$.

La **solution optimale** peut être trouvée par l'algorithme du Simplexe puisqu'il s'agit d'un problème purement linéaire. Examinons maintenant le problème de la **localisation d'une nouvelle usine**. Supposons que l'usine C doive être remplacée. Les alternatives possibles sont:

1. Accroître l'usine B à 6 millions de kg par jour.

2. Construire une nouvelle C de 2 millions de kg/jour.

3. Construire une nouvelle C de 4 millions de kg/jour.

| Lesalternatives | coûtfixe | coûtmarginal |
|---|---|---|
| 6millionsB | 18millionsde$ | 0,326 |
| 2millionsC | 18millionsde$ | 0,335 |
| 4millionsC | 34millionsde$ | 0,320 |

Tableau8.7:Donnéesdecoûtdesalternatives

Leurscoûtsrespectifssontdonnésautableau8.7.

Effectuonsune**comparaisondes3alternatives**etdelasituationactuelle. Il s'agitderésoudresuccessivementquatreproblèmeslinéairesnotés(LP1)à(LP4) autableau8.8. Danslacolonne“coûtjournalier”,ondonnelasommeducoûtde productionetducoûtdetransport,horsfraisfixesd'investissement.

| | Lesalternatives | coûtjournalier | coûtfixe |
|---|---|---|---|
| (LP1) | situationactuelle | 2561600 | |
| (LP2) | 6millionsB | 2547300 | 18millions |
| (LP3) | 2millionsC | 2533100 | 18millions |
| (LP4) | 4millionsC | 2469700 | 34millions |

Tableau8.8:Donnéesdecoûtdesalternatives

Unepremièreconclusionquipeutêtretiréedecetableauestque(LP2)peut êtreéliminécarayantuncoûtfixeidentiqueàceluide(LP3),unealternativequi auncoûtjournalierinférieur. Calculonsl'économiede(LP3)sur300joursde productionparrapportàlasituationactuelle:

$$(2561600 - 2533100) \times 300 = 8555000$$

Soituneéconomiede8,555millionsparanpouruninvestissementinitialde18 millionsde$. Cetinvestissementestcertainementrentable,quelquesoitlefacteur d'actualisation.

Calculonsmaintenantl'économieadditionnellede(LP4)parrapportà(LP3):

$$(2533100 - 2469700) \times 300 = 19020000$$

Soitunéconomieadditionnellede19,020millionsparanpouruninvestissement additionnel de16millionsde$. Anouveau, cet investissement est hautement profitable. Onchoisiradonclasolution(LP4):construirelanouvelleusineCà4 millionsdekgparjour.

Remarquons que, dans la solution de (LP4), l'usine A n'est plus utilisée du tout et peut être fermée.

Enfin, terminons ce chapitre en illustrant l'importance de **l'utilisation de variable binaires** dans les décisions de choix de capacité. Prenons l'exemple de l'ouverture éventuelle d'une nouvelle usine D de 2 millions de capacité. La décision d'ouverture de la nouvelle usine peut être modélisée par la variable binaire :

$$y_4 \in \{0, 1\}$$

avec $y_4$ valant 1 si l'usine $D$ est ouverte et zéro sinon.

Cette variable binaire interviendra dans la contrainte de capacité de la nouvelle usine comme suit :

$$\sum_{j=1}^{10} x_{4j} \leq 2y_4$$

En effet, si l'usine $D$ est fermée, le membre de droite est nul et rien ne peut sortir de l'usine.

Cette variable interviendra aussi dans la fonction objectif. En effet, à la somme des coûts de transport, on peut ajouter le coût fixe du nouvel investissement. Ceci conduit à l'expression suivante pour l'objectif :

$$\min z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{10} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=2}^{4} K_i y_i$$

où $K_i$ est le coût fixe d'ouverture de l'usine $i$.

Remarquez aussi que les variable binaires peuvent être utilisées pour décider du niveau de la capacité d'une nouvelle usine parmi un nombre discret de valeurs possibles. Ainsi, si l'usine $D$ peut avoir comme capacité 2 millions ou 5 millions d'unités, on peut écrire :

$$\sum_{j=1}^{10} x_{4j} \leq 2y_4 + 5y_4$$

avec la contrainte supplémentaire que

$$y_4 + y_4 = 1,$$

ce qui va assurer qu'une seule des deux capacités est sélectionnée.

Remarquez enfin que l'utilisation de variables binaire conduit à un *problème en nombres entiers*. Il s'agit d'un problème plus difficile à résoudre que les problèmes linéaires (LP1) à (LP4). Il peut être résolu par application de la méthode de branch and bound.

## 8.6 Exercices

8.1. **Equilibrage d'une chaîne.** Pour l'exemple de la section 8.2.2,

(a) au moyen d'une heuristique au choix, déterminer une répartition entre 7 opérateurs de temps de cycle maximum de 18 minutes.

(b) calculer le retard d'équilibre de la chaîne ainsi obtenue.

8.2. **Montage en chaîne d'une lampe.** Le montage d'une lampe de bureau nécessite la réalisation de 7 tâches (notées A à G) dont les temps élémentaires de montage sont donnés en deuxième colonne du tableau 8.9. Les contraintes d'antériorité sont données en troisième colonne du tableau 8.9. L'objectif de production est de 9000 lampes par mois. Un mois est constitué de 20 jours de 8 heures par jour.

| Tâche | Temps (secondes) | Préalables |
|---|---|---|
| A | 22 | - |
| B | 14 | A |
| C | 27 | - |
| D | 40 | B,C |
| E | 9 | - |
| F | 41 | D,E |
| G | 12 | F |

Tableau 8.9: Montage de lampes à la chaîne.

(a) Déterminez le temps maximum de cycle de la chaîne d'assemblage pour respecter cet objectif. Autrement dit, une lampe doit sortir de la chaîne toutes les $c$ secondes pour respecter cet objectif. On demande de déterminer $c$.

(b) Représentez sur un graphique de réseau les relations d'antériorité.

(c) Calculez le SCORE2 pour chacune des tâches de montage. Pour rappel, le SCORE2 est la somme du temps de la tâche et de toutes les tâches qui la suivent.

(d) En utilisant ce SCORE2, déterminez, en utilisant l'heuristique vue au cours, une affectation des 7 tâches aux postes de travail successifs de la chaîne.

(e) Calculez le retard d'équilibre de votre résolution.

8.3. **Choixd'unecapacité.** Pourlesdonnéesd'investissementdelasection8.3 maisavecuneprobabilitédesuccèsduproduitde50%,

(a) recalculerlesvaleursprésentesnettesdestroisinvestissements;

(b) expliquerpourquoiladécisionoptimalechange;

(c) déterminerlaprobabilitépourlaquelleladécisionoptimalechange.

8.4. **Optimisationdefluxdetransports.** L'entrepriseBâtimentTravauxPublics NantesAtlantiquea3chantiersencours:C1,C2,C3. Ellepossède2unités deproductiondebéton,B1etB2,et2carrières,G1etG2,oùsontproduits lesgravillonsqui entrent danslafabricationdubéton. Si laproduction internenesuffitpas,ilestpossibledefaireappelàlasous-traitancepourla productiondegravillons(unitéG3)et/oupourlaproductiondebéton(unité B3). Danslamesuredupossible, onévited'utiliserlasous-traitance. Il faut1/2tonnedegravillonspour1tonnedebéton. Lesquantitésdebétonà fournirdanslapériodeauxchantiersC1,C2etC3sontrespectivement100, 200et130tonnes. LescapacitésdeproductionengravillonsdesunitésG1 etG2sontrespectivement75et60tonnespendantlapériode. Lacarrière dusous-traitantG3peutfournir100tonnesaumaximum. Lescapacités deproductionenbétondesunitésB1etB2sontrespectivementde60et 120tonnes. Lesous-traitantB3aunecapacitéde600tonnespendantla mêmepériode. LescentralesàbétonB1,B2etB3utilisentuniquementles gravillonsprovenantdeG1,G2ouG3.

| EURO/tonne | versB1 | versB2 | versB3 |
|---|---|---|---|
| deG1 | 100 | 80 | 85 |
| deG2 | 60 | 70 | 65 |
| deG3 | 120 | 180 | 140 |

Tableau8.10:Coûtsdetransportdesgravillons

Lescoûtsdetransportunitaire(enEURO/tonne)desgravillonssontdonnés àlatable8.10tandisquelescoûtsdetransportunitaire(enEURO/tonne) desbétonsontdonnésàlatable8.11.

Onveutdéterminercommentsatisfairelescommandesacceptéesàcoût de transportminimum,toutenn'ayantrecoursàlasous-traitancequepourles capacitésmanquantesdefaçoninterne. Formulezleproblème.

8.5. **Ouverturededépôts.** Unefirmetravailleuniquementpour4grosclients situésàBruxelles,Charleroi,NamuretOstende,respectivement. Elleveut réorganisersadistributionetalapossibilitédesatisfairelademandedeses

| EURO/tonne | vers C1 | vers C2 | vers C3 |
|---|---|---|---|
| de B1 | 40 | 50 | 60 |
| de B2 | 25 | 30 | 30 |
| de B3 | 40 | 45 | 60 |

Tableau 8.11: Coûts de transport des béton

clients à partir de 3 dépôts différents, à Anvers, Liège et Mons, respectivement. Si un dépôt est ouvert une année, cela représente un coût fixe (administration, gardiennage, etc ... ) de 25 pour Anvers, 15 pour Liège et 15 pour Mons. Les capacités annuelles de ces dépôts, si ils sont ouverts, sont de 40, 25 et 25 respectivement.

Le directeur des ventes de cette firme consulte ses fiches de commandes des dernières années et estime que, pour l'année prochaine, il devra livrer 20, 12, 9 et 14 unités du produit à ses quatre clients. Les coûts de transport d'une unité de produit entre les usines et les villes sont donnés au tableau 8.12.

| Coût de transport | Bruxelles | Charleroi | Namur | Ostende |
|---|---|---|---|---|
| Anvers | 100 | 150 | 180 | 90 |
| Liège | 120 | 170 | 80 | 210 |
| Mons | 70 | 30 | 90 | 140 |

Tableau 8.12: Coûts unitaires de transport.

Sachant que l'approvisionnement d'un client peut se faire à partir de plusieurs dépôts, on veut déterminer:

- quels dépôts la firme doit-elle ouvrir l'année prochaine?
- comment organiser le transport entre les dépôts et clients?

pour minimiser la somme des coûts d'investissement et de transport. Les coûts de production sont identiques dans les trois usines et n'entrent donc pas en considération. Formuler le problème de minimisation des coûts.

# Bibliographie


[1] BAGLINGérard, Olivier BRUEL, AlainGARREAU, Michel GREIFet ChristianVANDELFT, *ManagementIndustrieletLogistique*, Economica, Paris,1996.

[2] BROOKEAnthony, DavidKENDRICKetAlexanderMEERAUS,GAMS User'sguideRelease2.25,TheScientificPress,SanFrancisco,1992.

[3] CHVÁTALVašek,*LinearProgramming*,FreemanandCompany,1983.

[4] DEWOLFDaniel,OlivierJANSSENSdEBISTHOVENetYvesSMEERS, TheSimplexalgorithmextendedtopiecewiselinearlyconstrainedproblems, COREDISCUSSIONPaper9119,UniversitéCatholiquedeLouvain,1991.

[5] EXCEL,*Guidedel'utilisateur*,Microsoft,1992.

[6] GIARDVincent,*Gestiondelaproduction*,Economica,Paris,1988.

[7] GUERRIENBernard,*Initiationauxmathématiques*,Economica,1991.

[8] F.S.HILLIERetG.S.LIEBERMAN,*IntroductiontoOperationsResearch*, 6èmeédition,MacGraw-HillInternationalEditions,Singapour,1995.

[9] F.S.HILLIER,M.S.HILLIERetG.S.LIEBERMAN,*IntroductiontoManagementSciences*,1èreédition,MacGraw-HillInternationalEditions,Boston, 2000.

[10] G.JAVEL,*Organisationetgestiondelaproduction*,MASSON,1997.

[11] LACAZEDominique,*Optimisationappliquée àlagestionet àl' économie*, Economica,1990.

[12] D.G.LUENBERGER,*LinearandNonlinearProgramming,*AddisonWesley,1984.

[13] J.O.MACCLAIN,L.J.THOMASetJ.B.MAZZOLA,*OperationsManagement:ProductionofGoodsandServices*,PrenticeHall,1992.

[14] NEMHAUSER, G.L. et L.A. WOLSEY, *Integer and Combinatorial Optimization,* Wiley, New York, 1988.

[15] Y. NORBERT, R. OUELLET et R. PARENT, *La recherche opérationnelle*, Gaëtan Morin Editeur, Montréal-Paris, 1995.

[16] SIMMONARD Michel, *La programmation linéaire*, Dunod 1972.

[17] M.P. WILLIAMS, *Model building in Mathematical Programming*, John Wiley, 1990.

[18] M.P. WILLIAMS, *Model solving in Mathematical Programming*, John Wiley, 1992.

[19] XPRESS-MP, *User Guide and Reference Manual*, Release 10, Dash Associate, 1997.

# Annexe A

# Formulaire pour la gestion de production

## A.1 La gestion calendaire de stock

**Coût de gestion:**

$$C(S) = c_p I_p(S) + c_r I_r(S) (+ c_c 1)$$

avec $I_p(S)$ = stock moyen possédé:

$$I_p(S) = S - \bar{X} + I_r(S) \quad \text{(cas de stock à rotation nulle)}$$

$$I_p(S) = S - \frac{\bar{X}}{2} + \frac{I_r(S)}{2} \quad \text{(cas de stock à rotation non nulle)}$$

et $I_r(S)$ = nombre moyen de demandes non satisfaites:

$$I_r(S) = \lambda P(X > S - 1) - S P(X > S) \quad \text{si } X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

$$I_r(S) = \sigma[f(t_S) - t_S P(t > t_S)] \quad \text{si } X \sim N(\mu, \sigma)$$

avec:

$$t_S = \frac{S - \bar{X}}{\sigma} \quad \text{et} \quad f(t_S) = \frac{e^{-t_S^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

**Politique optimale en stock à rotation nulle:**

$$S^* \text{ tel que } P(X > S^*) \leq \frac{c_p}{c_p + c_r} \leq P(X > S^* - 1) \quad \text{si } X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

$$S^* \text{ tel que } P(X > S^*) = \frac{c_p}{c_r + c_p} \quad \text{si } X \sim N(\mu, \sigma)$$

**Politique optimale en stock à rotation non nulle:**

$$S^* \text{ tel que } P(X > S^*) \leq \frac{c_p}{c_r + \frac{c_p}{2}} \leq P(X > S^* - 1) \quad \text{si } X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

$$S^* \text{ tel que } P(X > S^*) = \frac{c_p}{c_r + \frac{c_p}{2}} \quad \text{si } X \sim N(\mu, \sigma)$$

**Conséquences économiques du choix:**

- coût de gestion:

$$C(S) = c_r I_r(S) + c_p I_p(S) (+ c_c 1)$$

- marge nette moyenne:

$$B(S) = m_u \bar{X} - C(S)$$

avec $m_u$, la marge unitaire.

## A.2 La gestion par point de commande

**Coût de gestion en univers certain:**

$$C(q) = c_c I_c(q) + c_p I_p(q) = c_c \frac{D}{q} + c_p \frac{q}{2}$$

avec $I_c(q)$ = nombre moyen de commandes par an;
$I_p(q)$ = stock moyen possédé;
$D$ = demande annuelle;
$q$ = quantité commandée.

**Niveau optimal de commande:**

$$q^* = \sqrt{\frac{2 c_c D}{c_p}}$$

avec $c_p$, le coût unitaire de possession durant un an en stock.

**Point de commande:**

$$s = DL$$

avec $L$ = délai d'approvisionnement, exprimé en année.

**Coût de gestion en cas de demande aléatoire:**

$$C = c_c I_c + c_p I_p + c_r I_r$$

La **quantité économique** $q$ est déterminée en arbitrant entre le coût de commande et le coût de possession à partir de $D$, la demande moyenne annuelle :

$$q^* = \sqrt{\frac{2 c_c D}{c_p}}$$

Le **point de commande** $s$ est déterminé en arbitrant entre le coût de rupture et le coût de possession en utilisant la gestion calendaire **pendant le délai d'obtention** $L$ et en retenant comme $s$ le niveau de recomplètement optimal $S$ :

$$P(X > S^*) = \frac{c_p}{c_r + c_p/2}$$

avec $c_p$, le coût unitaire de possession entre deux commandes :

$$c_p = c_p \frac{q^*}{D}.$$

**Conséquences économique du choix :**

- Le *stock de sécurité* est la différence entre le point de commande et la demande moyenne durant $L$ :
$$s - DL$$
- Le *stock moyen possédé* en cas de *ventes manquées perdues :*
$$I_p(s,q) = \frac{q}{2} + (s - DL) + \frac{I_r^c(s)}{2},$$
où $I_r^c(s)$ note les ruptures par cycle (durant le délai d'obtention).
- Le *stock moyen possédé* en cas de *ventes manquées différées :*
$$I_p(s,q) = \frac{q}{2} + (s - DL) + \frac{DL}{2q} I_r^c(S),$$
où $I_r^c(s)$ note les ruptures par cycle (durant le délai d'obtention).

## A.3 Les techniques de juste à temps

**Détermination du nombre d'étiquettes :**

$$N \geq \frac{(1+\alpha) C_u T_r + Q_e}{k}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| avec | $C_u$ | = | consommation du poste aval en unités par minute ; |
| | $Q_e$ | = | taille économique des lots fabriqués en amont ; |
| | $k$ | = | la capacité d'un conteneur ; |
| | $T_r$ | = | temps de réaction du système. |

## A.4 Equilibraged'unechaînedeproduction

**Leretardd'équilibre:**

$$\mathrm{RE} = \frac{nc - T}{nc}$$

avec $n$ = nombredepostesdetravail,
$c$ = tempsd'uncycle,
$T$ = tempstotalrequisparunarticle.

## A.5 Calculd'annuités

$$\sum_{t=1}^{n} \left(\frac{1}{1+i}\right)^{t} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

avec $n$ = nombred'années,
$i$ = tauxd'actualisationannuel.

# Annexe B

# Tables pour la gestion de stocks

## B.1 Table de la loi Poisson($\lambda$)

| | $\lambda$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,35 | 0,4 | 0,45 | 0,5 |
| 0 | 0,0488 | 0,0952 | 0,1393 | 0,1813 | 0,2212 | 0,2592 | 0,2953 | 0,3297 | 0,3624 | 0,3935 |
| 1 | 0,0012 | 0,0047 | 0,0102 | 0,0175 | 0,0265 | 0,0369 | 0,0487 | 0,0616 | 0,0754 | 0,0902 |
| 2 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0005 | 0,0011 | 0,0022 | 0,0036 | 0,0055 | 0,0079 | 0,0109 | 0,0144 |
| 3 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0005 | 0,0008 | 0,0012 | 0,0018 |
| 4 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0002 |
| 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |

Donne la probabilité $P[\text{Poisson}(\lambda) > x]$

| | $\lambda$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0,55 | 0,6 | 0,65 | 0,7 | 0,75 | 0,8 | 0,85 | 0,9 | 1 | 1,5 |
| 0 | 0,4231 | 0,4512 | 0,4780 | 0,5034 | 0,5276 | 0,5507 | 0,5726 | 0,5934 | 0,6321 | 0,7769 |
| 1 | 0,1057 | 0,1219 | 0,1386 | 0,1558 | 0,1734 | 0,1912 | 0,2093 | 0,2275 | 0,2642 | 0,4422 |
| 2 | 0,0185 | 0,0231 | 0,0283 | 0,0341 | 0,0405 | 0,0474 | 0,0549 | 0,0629 | 0,0803 | 0,1912 |
| 3 | 0,0025 | 0,0034 | 0,0044 | 0,0058 | 0,0073 | 0,0091 | 0,0111 | 0,0135 | 0,0190 | 0,0656 |
| 4 | 0,0003 | 0,0004 | 0,0006 | 0,0008 | 0,0011 | 0,0014 | 0,0018 | 0,0023 | 0,0037 | 0,0186 |
| 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0006 | 0,0045 |
| 6 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0009 |
| 7 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 |
| 8 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |

Donnelaprobabilité $P[\text{Poisson}(\lambda) > x]$

| | $\lambda$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 22,533,544,5 | | | | | | 5 | 5,5 | 6 | 6,5 |
| 0 | 0,8647 | 0,9179 | 0,9502 | 0,9698 | 0,9817 | 0,9889 | 0,9933 | 0,9959 | 0,9975 | 0,9985 |
| 1 | 0,5940 | 0,7127 | 0,8009 | 0,8641 | 0,9084 | 0,9389 | 0,9596 | 0,9734 | 0,9826 | 0,9887 |
| 2 | 0,3233 | 0,4562 | 0,5768 | 0,6792 | 0,7619 | 0,8264 | 0,8753 | 0,9116 | 0,9380 | 0,9570 |
| 3 | 0,1429 | 0,2424 | 0,3528 | 0,4634 | 0,5665 | 0,6577 | 0,7350 | 0,7983 | 0,8488 | 0,8882 |
| 4 | 0,0527 | 0,1088 | 0,1847 | 0,2746 | 0,3712 | 0,4679 | 0,5595 | 0,6425 | 0,7149 | 0,7763 |
| 5 | 0,0166 | 0,0420 | 0,0839 | 0,1424 | 0,2149 | 0,2971 | 0,3840 | 0,4711 | 0,5543 | 0,6310 |
| 6 | 0,0045 | 0,0142 | 0,0335 | 0,0653 | 0,1107 | 0,1689 | 0,2378 | 0,3140 | 0,3937 | 0,4735 |
| 7 | 0,0011 | 0,0042 | 0,0119 | 0,0267 | 0,0511 | 0,0866 | 0,1334 | 0,1905 | 0,2560 | 0,3272 |
| 8 | 0,0002 | 0,0011 | 0,0038 | 0,0099 | 0,0214 | 0,0403 | 0,0681 | 0,1056 | 0,1528 | 0,2084 |
| 9 | 0,0000 | 0,0003 | 0,0011 | 0,0033 | 0,0081 | 0,0171 | 0,0318 | 0,0538 | 0,0839 | 0,1226 |
| 10 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0010 | 0,0028 | 0,0067 | 0,0137 | 0,0253 | 0,0426 | 0,0668 |
| 11 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0009 | 0,0024 | 0,0055 | 0,0110 | 0,0201 | 0,0339 |
| 12 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0008 | 0,0020 | 0,0045 | 0,0088 | 0,0160 |
| 13 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0007 | 0,0017 | 0,0036 | 0,0071 |
| 14 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0006 | 0,0014 | 0,0030 |
| 15 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0005 | 0,0012 |
| 16 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0004 |
| 17 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 |
| 18 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 |
| 19 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |

Donnelaprobabilité $P[\text{Poisson}(\lambda) > x]$

| | $\lambda$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 77,588,599,5 | | | | | | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 0 | 0,9991 | 0,9994 | 0,9997 | 0,9998 | 0,9999 | 0,9999 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 1 | 0,9927 | 0,9953 | 0,9970 | 0,9981 | 0,9988 | 0,9992 | 0,9995 | 0,9998 | 0,9999 | 1,0000 |
| 2 | 0,9704 | 0,9797 | 0,9862 | 0,9907 | 0,9938 | 0,9958 | 0,9972 | 0,9988 | 0,9995 | 0,9998 |
| 3 | 0,9182 | 0,9409 | 0,9576 | 0,9699 | 0,9788 | 0,9851 | 0,9897 | 0,9951 | 0,9977 | 0,9989 |
| 4 | 0,8270 | 0,8679 | 0,9004 | 0,9256 | 0,9450 | 0,9597 | 0,9707 | 0,9849 | 0,9924 | 0,9963 |
| 5 | 0,6993 | 0,7586 | 0,8088 | 0,8504 | 0,8843 | 0,9115 | 0,9329 | 0,9625 | 0,9797 | 0,9893 |
| 6 | 0,5503 | 0,6218 | 0,6866 | 0,7438 | 0,7932 | 0,8351 | 0,8699 | 0,9214 | 0,9542 | 0,9741 |
| 7 | 0,4013 | 0,4754 | 0,5470 | 0,6144 | 0,6761 | 0,7313 | 0,7798 | 0,8568 | 0,9105 | 0,9460 |
| 8 | 0,2709 | 0,3380 | 0,4075 | 0,4769 | 0,5443 | 0,6082 | 0,6672 | 0,7680 | 0,8450 | 0,9002 |
| 9 | 0,1695 | 0,2236 | 0,2834 | 0,3470 | 0,4126 | 0,4782 | 0,5421 | 0,6595 | 0,7576 | 0,8342 |
| 10 | 0,0985 | 0,1378 | 0,1841 | 0,2366 | 0,2940 | 0,3547 | 0,4170 | 0,5401 | 0,6528 | 0,7483 |
| 11 | 0,0533 | 0,0792 | 0,1119 | 0,1513 | 0,1970 | 0,2480 | 0,3032 | 0,4207 | 0,5384 | 0,6468 |
| 12 | 0,0270 | 0,0427 | 0,0638 | 0,0909 | 0,1242 | 0,1636 | 0,2084 | 0,3113 | 0,4240 | 0,5369 |
| 13 | 0,0128 | 0,0216 | 0,0342 | 0,0514 | 0,0739 | 0,1019 | 0,1355 | 0,2187 | 0,3185 | 0,4270 |
| 14 | 0,0057 | 0,0103 | 0,0173 | 0,0274 | 0,0415 | 0,0600 | 0,0835 | 0,1460 | 0,2280 | 0,3249 |
| 15 | 0,0024 | 0,0046 | 0,0082 | 0,0138 | 0,0220 | 0,0335 | 0,0487 | 0,0926 | 0,1556 | 0,2364 |
| 16 | 0,0010 | 0,0020 | 0,0037 | 0,0066 | 0,0111 | 0,0177 | 0,0270 | 0,0559 | 0,1013 | 0,1645 |
| 17 | 0,0004 | 0,0008 | 0,0016 | 0,0030 | 0,0053 | 0,0089 | 0,0143 | 0,0322 | 0,0630 | 0,1095 |
| 18 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0007 | 0,0013 | 0,0024 | 0,0043 | 0,0072 | 0,0177 | 0,0374 | 0,0698 |
| 19 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0005 | 0,0011 | 0,0020 | 0,0035 | 0,0093 | 0,0213 | 0,0427 |
| 20 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0004 | 0,0009 | 0,0016 | 0,0047 | 0,0116 | 0,0250 |
| 21 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0004 | 0,0007 | 0,0023 | 0,0061 | 0,0141 |
| 22 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0010 | 0,0030 | 0,0076 |
| 23 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0005 | 0,0015 | 0,0040 |
| 24 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0007 | 0,0020 |
| 25 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0010 |
| 26 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0005 |
| 27 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 |
| 28 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 |
| 29 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |

Donnelaprobabilit´e $P$[Poisson($\lambda$) $>x$]

| | $\lambda$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 0 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 1 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 2 | 0,9999 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 3 | 0,9995 | 0,9998 | 0,9999 | 1,0000 | 1,0000 |
| 4 | 0,9982 | 0,9991 | 0,9996 | 0,9998 | 0,9999 |
| 5 | 0,9945 | 0,9972 | 0,9986 | 0,9993 | 0,9997 |
| 6 | 0,9858 | 0,9924 | 0,9960 | 0,9979 | 0,9990 |
| 7 | 0,9684 | 0,9820 | 0,9900 | 0,9946 | 0,9971 |
| 8 | 0,9379 | 0,9626 | 0,9780 | 0,9874 | 0,9929 |
| 9 | 0,8906 | 0,9301 | 0,9567 | 0,9739 | 0,9846 |
| 10 | 0,8243 | 0,8815 | 0,9226 | 0,9509 | 0,9696 |
| 11 | 0,7400 | 0,8152 | 0,8730 | 0,9153 | 0,9451 |
| 12 | 0,6415 | 0,7324 | 0,8069 | 0,8650 | 0,9083 |
| 13 | 0,5356 | 0,6368 | 0,7255 | 0,7991 | 0,8574 |
| 14 | 0,4296 | 0,5343 | 0,6325 | 0,7192 | 0,7919 |
| 15 | 0,3306 | 0,4319 | 0,5333 | 0,6285 | 0,7133 |
| 16 | 0,2441 | 0,3359 | 0,4340 | 0,5323 | 0,6249 |
| 17 | 0,1728 | 0,2511 | 0,3407 | 0,4360 | 0,5314 |
| 18 | 0,1174 | 0,1805 | 0,2577 | 0,3450 | 0,4378 |
| 19 | 0,0765 | 0,1248 | 0,1878 | 0,2637 | 0,3491 |
| 20 | 0,0479 | 0,0830 | 0,1318 | 0,1945 | 0,2693 |
| 21 | 0,0288 | 0,0531 | 0,0892 | 0,1385 | 0,2009 |
| 22 | 0,0167 | 0,0327 | 0,0582 | 0,0953 | 0,1449 |
| 23 | 0,0093 | 0,0195 | 0,0367 | 0,0633 | 0,1011 |
| 24 | 0,0050 | 0,0112 | 0,0223 | 0,0406 | 0,0683 |
| 25 | 0,0026 | 0,0062 | 0,0131 | 0,0252 | 0,0446 |
| 26 | 0,0013 | 0,0033 | 0,0075 | 0,0152 | 0,0282 |
| 27 | 0,0006 | 0,0017 | 0,0041 | 0,0088 | 0,0173 |
| 28 | 0,0003 | 0,0009 | 0,0022 | 0,0050 | 0,0103 |
| 29 | 0,0001 | 0,0004 | 0,0011 | 0,0027 | 0,0059 |
| 30 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0006 | 0,0014 | 0,0033 |
| 31 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0007 | 0,0018 |
| 32 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0004 | 0,0010 |
| 33 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0005 |
| 34 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 |
| 35 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 |
| 36 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 |
| 37 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |

## B.2 Tabledelaloinormale $Z \sim N(0,1)$

| $P$ | $z_j$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
| 0,0 | 0,5000 | 0,4960 | 0,4920 | 0,4880 | 0,4840 | 0,4801 | 0,4761 | 0,4721 | 0,4681 | 0,4641 |
| 0,1 | 0,4602 | 0,4562 | 0,4522 | 0,4483 | 0,4443 | 0,4404 | 0,4364 | 0,4325 | 0,4286 | 0,4247 |
| 0,2 | 0,4207 | 0,4168 | 0,4129 | 0,4090 | 0,4052 | 0,4013 | 0,3974 | 0,3936 | 0,3897 | 0,3859 |
| 0,3 | 0,3821 | 0,3783 | 0,3745 | 0,3707 | 0,3669 | 0,3632 | 0,3594 | 0,3557 | 0,3520 | 0,3483 |
| 0,4 | 0,3446 | 0,3409 | 0,3372 | 0,3336 | 0,3300 | 0,3264 | 0,3228 | 0,3192 | 0,3156 | 0,3121 |
| 0,5 | 0,3085 | 0,3050 | 0,3015 | 0,2981 | 0,2946 | 0,2912 | 0,2877 | 0,2843 | 0,2810 | 0,2776 |
| 0,6 | 0,2743 | 0,2709 | 0,2676 | 0,2643 | 0,2611 | 0,2578 | 0,2546 | 0,2514 | 0,2483 | 0,2451 |
| 0,7 | 0,2420 | 0,2389 | 0,2358 | 0,2327 | 0,2296 | 0,2266 | 0,2236 | 0,2206 | 0,2177 | 0,2148 |
| 0,8 | 0,2119 | 0,2090 | 0,2061 | 0,2033 | 0,2005 | 0,1977 | 0,1949 | 0,1922 | 0,1894 | 0,1867 |
| 0,9 | 0,1841 | 0,1814 | 0,1788 | 0,1762 | 0,1736 | 0,1711 | 0,1685 | 0,1660 | 0,1635 | 0,1611 |
| 1,0 | 0,1587 | 0,1562 | 0,1539 | 0,1515 | 0,1492 | 0,1469 | 0,1446 | 0,1423 | 0,1401 | 0,1379 |
| 1,1 | 0,1357 | 0,1335 | 0,1314 | 0,1292 | 0,1271 | 0,1251 | 0,1230 | 0,1210 | 0,1190 | 0,1170 |
| 1,2 | 0,1151 | 0,1131 | 0,1112 | 0,1093 | 0,1075 | 0,1056 | 0,1038 | 0,1020 | 0,1003 | 0,0985 |
| 1,3 | 0,0968 | 0,0951 | 0,0934 | 0,0918 | 0,0901 | 0,0885 | 0,0869 | 0,0853 | 0,0838 | 0,0823 |
| 1,4 | 0,0808 | 0,0793 | 0,0778 | 0,0764 | 0,0749 | 0,0735 | 0,0721 | 0,0708 | 0,0694 | 0,0681 |
| 1,5 | 0,0668 | 0,0655 | 0,0643 | 0,0630 | 0,0618 | 0,0606 | 0,0594 | 0,0582 | 0,0571 | 0,0559 |
| 1,6 | 0,0548 | 0,0537 | 0,0526 | 0,0516 | 0,0505 | 0,0495 | 0,0485 | 0,0475 | 0,0465 | 0,0455 |
| 1,7 | 0,0446 | 0,0436 | 0,0427 | 0,0418 | 0,0409 | 0,0401 | 0,0392 | 0,0384 | 0,0375 | 0,0367 |
| 1,8 | 0,0359 | 0,0351 | 0,0344 | 0,0336 | 0,0329 | 0,0322 | 0,0314 | 0,0307 | 0,0301 | 0,0294 |
| 1,9 | 0,0287 | 0,0281 | 0,0274 | 0,0268 | 0,0262 | 0,0256 | 0,0250 | 0,0244 | 0,0239 | 0,0233 |
| 2,0 | 0,0228 | 0,0222 | 0,0217 | 0,0212 | 0,0207 | 0,0202 | 0,0197 | 0,0192 | 0,0188 | 0,0183 |
| 2,1 | 0,0179 | 0,0174 | 0,0170 | 0,0166 | 0,0162 | 0,0158 | 0,0154 | 0,0150 | 0,0146 | 0,0143 |
| 2,2 | 0,0139 | 0,0136 | 0,0132 | 0,0129 | 0,0125 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 |
| 2,3 | 0,0107 | 0,0104 | 0,0102 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0094 | 0,0091 | 0,0089 | 0,0087 | 0,0084 |
| 2,4 | 0,0082 | 0,0080 | 0,0078 | 0,0075 | 0,0073 | 0,0071 | 0,0069 | 0,0068 | 0,0066 | 0,0064 |
| 2,5 | 0,0062 | 0,0060 | 0,0059 | 0,0057 | 0,0055 | 0,0054 | 0,0052 | 0,0051 | 0,0049 | 0,0048 |
| 2,6 | 0,0047 | 0,0045 | 0,0044 | 0,0043 | 0,0041 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 |
| 2,7 | 0,0035 | 0,0034 | 0,0033 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,0026 |
| 2,8 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0024 | 0,0023 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0021 | 0,0020 | 0,0019 |
| 2,9 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0018 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0014 |
| 3,0 | 0,0013 | 0,0013 | 0,0013 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0010 |

Donnelaprobabilit´e $P(Z > z_i + z_j)$

## B.3 Table pour le calcul de $I_r(S)$

| $g(t_S)$ | $t_j$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_i$ | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
| -3 | 3,0005 | 3,0104 | 3,0202 | 3,0304 | 3,0403 | 3,0505 | 3,0603 | 3,0702 | 3,0804 | 3,0903 |
| -2,9 | 2,9004 | 2,9105 | 2,9204 | 2,9305 | 2,9406 | 2,9504 | 2,9606 | 2,9704 | 2,9805 | 2,9904 |
| -2,8 | 2,8006 | 2,8107 | 2,8207 | 2,8308 | 2,8405 | 2,8506 | 2,8607 | 2,8705 | 2,8805 | 2,8906 |
| -2,7 | 2,7010 | 2,7109 | 2,7209 | 2,7309 | 2,7409 | 2,7508 | 2,7608 | 2,7708 | 2,7809 | 2,7909 |
| -2,6 | 2,6014 | 2,6115 | 2,6214 | 2,6312 | 2,6414 | 2,6513 | 2,6612 | 2,6711 | 2,6811 | 2,6910 |
| -2,5 | 2,5020 | 2,5120 | 2,5218 | 2,5318 | 2,5419 | 2,5517 | 2,5617 | 2,5716 | 2,5817 | 2,5915 |
| -2,4 | 2,4027 | 2,4126 | 2,4225 | 2,4326 | 2,4425 | 2,4524 | 2,4624 | 2,4721 | 2,4821 | 2,4920 |
| -2,3 | 2,3037 | 2,3137 | 2,3234 | 2,3334 | 2,3434 | 2,3531 | 2,3632 | 2,3730 | 2,3828 | 2,3929 |
| -2,2 | 2,2049 | 2,2146 | 2,2246 | 2,2344 | 2,2445 | 2,2543 | 2,2641 | 2,2740 | 2,2839 | 2,2938 |
| -2,1 | 2,1064 | 2,1164 | 2,1261 | 2,1359 | 2,1457 | 2,1556 | 2,1654 | 2,1753 | 2,1852 | 2,1949 |
| -2 | 2,0084 | 2,0183 | 2,0280 | 2,0378 | 2,0476 | 2,0574 | 2,0672 | 2,0771 | 2,0868 | 2,0967 |
| -1,9 | 1,9111 | 1,9207 | 1,9305 | 1,9402 | 1,9499 | 1,9597 | 1,9694 | 1,9792 | 1,9889 | 1,9987 |
| -1,8 | 1,8143 | 1,8240 | 1,8335 | 1,8433 | 1,8529 | 1,8625 | 1,8723 | 1,8820 | 1,8916 | 1,9013 |
| -1,7 | 1,7182 | 1,7279 | 1,7374 | 1,7470 | 1,7566 | 1,7661 | 1,7758 | 1,7853 | 1,7951 | 1,8047 |
| -1,6 | 1,6232 | 1,6327 | 1,6422 | 1,6516 | 1,6611 | 1,6706 | 1,6801 | 1,6896 | 1,6992 | 1,7088 |
| -1,5 | 1,5293 | 1,5387 | 1,5479 | 1,5574 | 1,5667 | 1,5761 | 1,5855 | 1,5949 | 1,6043 | 1,6138 |
| -1,4 | 1,4366 | 1,4458 | 1,4551 | 1,4643 | 1,4736 | 1,4829 | 1,4922 | 1,5013 | 1,5107 | 1,5200 |
| -1,3 | 1,3455 | 1,3546 | 1,3636 | 1,3726 | 1,3818 | 1,3909 | 1,4000 | 1,4092 | 1,4183 | 1,4274 |
| -1,2 | 1,2561 | 1,2650 | 1,2739 | 1,2828 | 1,2916 | 1,3006 | 1,3096 | 1,3186 | 1,3275 | 1,3365 |
| -1,1 | 1,1686 | 1,1773 | 1,1859 | 1,1947 | 1,2034 | 1,2121 | 1,2209 | 1,2296 | 1,2384 | 1,2473 |
| -1 | 1,0833 | 1,0918 | 1,1002 | 1,1087 | 1,1171 | 1,1256 | 1,1342 | 1,1428 | 1,1513 | 1,1599 |
| -0,9 | 1,0004 | 1,0086 | 1,0168 | 1,0250 | 1,0333 | 1,0415 | 1,0499 | 1,0582 | 1,0666 | 1,0749 |
| -0,8 | 0,9202 | 0,9281 | 0,9360 | 0,9440 | 0,9519 | 0,9599 | 0,9680 | 0,9760 | 0,9842 | 0,9923 |
| -0,7 | 0,8429 | 0,8504 | 0,8581 | 0,8658 | 0,8735 | 0,8812 | 0,8889 | 0,8967 | 0,9045 | 0,9123 |
| -0,6 | 0,7686 | 0,7760 | 0,7833 | 0,7906 | 0,7980 | 0,8054 | 0,8128 | 0,8203 | 0,8277 | 0,8353 |
| -0,5 | 0,6978 | 0,7047 | 0,7117 | 0,7187 | 0,7257 | 0,7328 | 0,7399 | 0,7471 | 0,7542 | 0,7614 |
| -0,4 | 0,6304 | 0,6370 | 0,6436 | 0,6503 | 0,6569 | 0,6636 | 0,6704 | 0,6772 | 0,6840 | 0,6909 |
| -0,3 | 0,5668 | 0,5730 | 0,5792 | 0,5855 | 0,5918 | 0,5981 | 0,6045 | 0,6109 | 0,6174 | 0,6239 |
| -0,2 | 0,5069 | 0,5127 | 0,5186 | 0,5245 | 0,5304 | 0,5363 | 0,5424 | 0,5484 | 0,5545 | 0,5606 |
| -0,1 | 0,4509 | 0,4564 | 0,4618 | 0,4673 | 0,4728 | 0,4784 | 0,4840 | 0,4897 | 0,4954 | 0,5011 |
| 0 | 0,3989 | 0,4040 | 0,4090 | 0,4141 | 0,4193 | 0,4244 | 0,4297 | 0,4349 | 0,4402 | 0,4456 |

| $g(t_S)$ | $t_j$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_i$ | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
| 0 | 0,3989 | 0,3940 | 0,3890 | 0,3841 | 0,3793 | 0,3744 | 0,3697 | 0,3649 | 0,3602 | 0,3556 |
| 0,1 | 0,3509 | 0,3464 | 0,3418 | 0,3373 | 0,3328 | 0,3284 | 0,3240 | 0,3197 | 0,3154 | 0,3111 |
| 0,2 | 0,3069 | 0,3027 | 0,2986 | 0,2945 | 0,2904 | 0,2863 | 0,2824 | 0,2784 | 0,2745 | 0,2706 |
| 0,3 | 0,2668 | 0,2630 | 0,2592 | 0,2555 | 0,2518 | 0,2481 | 0,2445 | 0,2409 | 0,2374 | 0,2339 |
| 0,4 | 0,2304 | 0,2270 | 0,2236 | 0,2203 | 0,2169 | 0,2136 | 0,2104 | 0,2072 | 0,2040 | 0,2009 |
| 0,5 | 0,1978 | 0,1947 | 0,1917 | 0,1887 | 0,1857 | 0,1828 | 0,1799 | 0,1771 | 0,1742 | 0,1714 |
| 0,6 | 0,1686 | 0,1660 | 0,1633 | 0,1606 | 0,1580 | 0,1554 | 0,1528 | 0,1503 | 0,1477 | 0,1453 |
| 0,7 | 0,1429 | 0,1404 | 0,1381 | 0,1358 | 0,1335 | 0,1312 | 0,1289 | 0,1267 | 0,1245 | 0,1223 |
| 0,8 | 0,1202 | 0,1181 | 0,1160 | 0,1140 | 0,1119 | 0,1099 | 0,1080 | 0,1060 | 0,1042 | 0,1023 |
| 0,9 | 0,1004 | 0,0986 | 0,0968 | 0,0950 | 0,0933 | 0,0915 | 0,0899 | 0,0882 | 0,0866 | 0,0849 |
| 1 | 0,0833 | 0,0818 | 0,0802 | 0,0787 | 0,0771 | 0,0756 | 0,0742 | 0,0728 | 0,0713 | 0,0699 |
| 1,1 | 0,0686 | 0,0673 | 0,0659 | 0,0647 | 0,0634 | 0,0621 | 0,0609 | 0,0596 | 0,0584 | 0,0573 |
| 1,2 | 0,0561 | 0,0550 | 0,0539 | 0,0528 | 0,0516 | 0,0506 | 0,0496 | 0,0486 | 0,0475 | 0,0465 |
| 1,3 | 0,0455 | 0,0446 | 0,0436 | 0,0426 | 0,0418 | 0,0409 | 0,0400 | 0,0392 | 0,0383 | 0,0374 |
| 1,4 | 0,0366 | 0,0358 | 0,0351 | 0,0343 | 0,0336 | 0,0329 | 0,0322 | 0,0313 | 0,0307 | 0,0300 |
| 1,5 | 0,0293 | 0,0287 | 0,0279 | 0,0274 | 0,0267 | 0,0261 | 0,0255 | 0,0249 | 0,0243 | 0,0238 |
| 1,6 | 0,0232 | 0,0227 | 0,0222 | 0,0216 | 0,0211 | 0,0206 | 0,0201 | 0,0196 | 0,0192 | 0,0188 |
| 1,7 | 0,0182 | 0,0179 | 0,0174 | 0,0170 | 0,0166 | 0,0161 | 0,0158 | 0,0153 | 0,0151 | 0,0147 |
| 1,8 | 0,0143 | 0,0140 | 0,0135 | 0,0133 | 0,0129 | 0,0125 | 0,0123 | 0,0120 | 0,0116 | 0,0113 |
| 1,9 | 0,0111 | 0,0107 | 0,0105 | 0,0102 | 0,0099 | 0,0097 | 0,0094 | 0,0092 | 0,0089 | 0,0087 |
| 2 | 0,0084 | 0,0083 | 0,0080 | 0,0078 | 0,0076 | 0,0074 | 0,0072 | 0,0071 | 0,0068 | 0,0067 |
| 2,1 | 0,0064 | 0,0064 | 0,0061 | 0,0059 | 0,0057 | 0,0056 | 0,0054 | 0,0053 | 0,0052 | 0,0049 |
| 2,2 | 0,0049 | 0,0046 | 0,0046 | 0,0044 | 0,0045 | 0,0043 | 0,0041 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 |
| 2,3 | 0,0037 | 0,0037 | 0,0034 | 0,0034 | 0,0034 | 0,0031 | 0,0032 | 0,0030 | 0,0028 | 0,0029 |
| 2,4 | 0,0027 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0024 | 0,0024 | 0,0021 | 0,0021 | 0,0020 |
| 2,5 | 0,0020 | 0,0020 | 0,0018 | 0,0018 | 0,0019 | 0,0017 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0017 | 0,0015 |
| 2,6 | 0,0014 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0012 | 0,0014 | 0,0013 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0010 |
| 2,7 | 0,0010 | 0,0009 | 0,0009 | 0,0009 | 0,0009 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0009 | 0,0009 |
| 2,8 | 0,0006 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0008 | 0,0005 | 0,0006 | 0,0007 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0006 |
| 2,9 | 0,0004 | 0,0005 | 0,0004 | 0,0005 | 0,0006 | 0,0004 | 0,0006 | 0,0004 | 0,0005 | 0,0004 |
| 3 | 0,0005 | 0,0004 | 0,0002 | 0,0004 | 0,0003 | 0,0005 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0004 | 0,0003 |

Donne $g(t_S) = [f(t_S) - t_S P(t > t_S)]$