SECTION II ***: LES MESURES D'EXPOSITION DES OBLIGATIONS AU RISQUE DE TAUX D'INTERET***

L'entreprise qui se finance sur le marché obligataire est dans une position symétrique par rapport à celle de l'investisseur. Le coût de son financement sur une période dépend de l'évolution du taux sur cette période: si le taux reste stable, son coût le sera aussi ; s'il diminue, l'entreprise émettrice subit *une perte d'opportunité* en s'étant financé à un taux plus élevé et s'il augmente l'entreprise gagne *un gain d'opportunité ;* perte et gain d'opportunité augmentent et diminuent respectivement le coût réel.

Une fluctuation donnée des taux d'intérêt influera différemment sur le cours des obligations assorties de caractéristiques, de coupons, d'échéances, de clauses de protection, etc. différents le fait de pouvoir établir l'incidence d'une variation des taux d'intérêt sur le cours des obligations permettra aux deux parties de prendre de meilleures décisions.

1. La duration

La notion de duration a été introduite en 1938 par F. Macaulay. Elle ne devait alors servir qu'à donner une mesure améliorant celle de la maturité d'une obligation. Dans les années soixante-dix elle fût utilisée comme mesure d'exposition d'un titre à revenu fixe au risque de taux.

1.1. Définition

« Le coefficient de duration d'une obligation peut être défini comme la date moyenne à laquelle son détenteur percevra les flux monétaires auxquels la détention de son obligation lui donne droit »[1].

Avant de présenter ce concept de mesure, faisons un détour et examinons celui de l'élasticité de la valeur d'une obligation. Cette dernière notion est généralement plus familière que celle de la duration dont la définition, pourtant bien précise, ne laisse pas réellement percevoir son rôle et son utilité.

➔ **Elasticité du prix de l'obligation à la variation de taux**

Comme nous l'avons vu précédemment, l'équation de détermination du prix d'une obligation s'écrit :

---

1 BROQUET(C.), et a., *Gestion de portefeuille*, Deboek Université, Bruxelles, 1998, p.425

$$P = \sum_{t=1}^{n} F_t (1+i)^{-t}$$

Où,

P : le prix de marché de l'obligation.

F_t : le flux de liquidité attaché à la détention de l'obligation pour la période t.

t : les périodes 1,2,…,n.

i : le taux de rendement actuariel.

n : la durée de vie.

La dérivée de cette équation par rapport à la variation de ***i*** est la suivante

$$\frac{dP}{d(1+i)} = -\frac{F_1(1+i)^0}{(1+i)^2} - \frac{2F_2(1+i)^1}{(1+i)^4} - \ldots\ldots - \frac{tF_t(1+i)^{t-1}}{(1+i)^{2t}} - \ldots - \frac{nF_t(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{2n}}$$

$$= -\frac{F_1}{(1+i)^2} - \frac{2F_2}{(1+i)^3} - \ldots\ldots - \frac{tF_t}{(1+i)^{t+1}} - \ldots - \frac{nF_n}{(1+i)^{n+1}}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{-tF_t}{(1+i)^{t+1}}$$

Par définition, l'élasticité d'un titre est la variation relative de sa valeur par rapport à la variation relative du taux de rendement. Si ***é*** désigne l'élasticité on a :

$$é = \frac{\frac{dP}{P}}{\frac{d(1+i)}{(1+i)}} = \frac{dP}{d(1+i)} \times \frac{(1+i)}{P}$$

En remplaçant $dP/d(1+i)$ et P par leurs valeurs respectives, nous obtenons l'équation de l'élasticité suivante

$$é = \sum_{t=1}^{n} \frac{-tF_t}{(1+i)^{t+1}} \times \frac{(1+i)}{\sum_t \frac{F_t}{(1+i)^t}}$$

Après transformation, il advient

$$\acute{e} = -\frac{\frac{(1+i)}{(1+i)}\sum_{t=1}^{n} tF_t}{\sum_{t=1}^{n}\frac{F_t}{(1+i)^t}} = -\frac{\sum_{t=1}^{n}\frac{tF_t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^{n}\frac{F_t}{(1+i)^t}}$$

L'élasticité donne la variation en pourcentage de la valeur pour une variation en pourcentage du taux d'intérêt. Elle est forcément négative en raison de la relation inverse qui existe entre les deux variables. Cette élasticité correspond, au signe prés, à ce qu'il convient d'appeler ***la durée de vie moyenne pondérée*** de l'obligation ou, plus exactement encore, le temps de récupération de son prix par les flux de revenus actualisés :

$$\mathbf{D} = \frac{\sum_{t=1}^{n}\frac{tF_t}{(1+i)^t}}{P}$$

Exemple

Examinons le cas d'une obligation à 5 ans dont le taux de coupon est de 13,52 % et un prix de 100. Le taux de rendement sur le marché est de 11 % pour toutes les échéances. Le calcul de la duration s'établit ainsi :

TABLEAU N°4

Calcul de la *duration* d'une obligation

Période (t)	Flux (F_t)	$V_t = F_t/(1+i)^t$	$t.V_t$
1	13,52	12,18	12,18
2	13,52	10,97	21,94
3	13,52	9,89	29,67
4	13,52	8,91	35,64
5	113,52	67,37	336,85
		P = 109,32	436,28

$$D = \frac{436,28}{109,32} = 3,9909 \approx 4$$

Calculons maintenant, dans diverses hypothèses de taux, la valeur de l'obligation au temps (t=4) correspondant à la « *duration* ». Cette valeur est le résultat, d'une part, du réinvestissement des coupons perçus aux temps (t =1, t =2, t =3) et, d'autres part, de la valeur actualisée du revenu qui sera perçu au temps (t = 5). Il vient :

TABLEAU N°5

Variation de la valeur de l'obligation par rapport à la variation du taux du marché

Période (t)	**Flux (F_t)**	**Valeur au temps (t = 4)**		
		i = 10 %	**i = 11 %**	**i = 12 %**
1	13,52	$13{,}52\,(1{,}10)^3$	$13{,}52\,(1{,}11)^3$	$13{,}52\,(1{,}12)^3$
2	13,52	$13{,}52\,(1{,}10)^2$	$13{,}52\,(1{,}11)^2$	$13{,}52\,(1{,}12)^2$
3	13,52	13,52 (1,10)	13,52 (1,11)	13,52 (1,12)
4	13,52	13,52	13,52	13,52
5	113,52	$113{,}52\,(1{,}10)^{-1}$	$113{,}52\,(1{,}11)^{-1}$	$113{,}52\,(1{,}12)^{-1}$
		165,95	**165,95**	**165,95**

On constate que les trois valeurs obtenues sont identiques. Et il en serait de même pour n'importe quelle valeur de *i*. La raison en est que pour (t= D), l'accroissement (la diminution) de la valeur de réinvestissement des coupons obtenus(e) quand le taux monte (descend) par rapport au taux de référence est exactement compensé(e) par la diminution (l'accroissement) de la valeur actualisée au temps (t = D) des revenus postérieurs à la date de la *duration*.

1.2. Propriétés

★ Pour un temps de détention exactement égal à sa *duration*, une obligation est donc un investissement sans risque de taux (en faisant abstraction au risque d'inflation).

★ La *duration* d'une obligation augmente de manière non proportionnelle avec sa maturité. Ceci est dû au fait que le poids des flux des années éloignées est réduit par l'actualisation.

★ Plus le niveau des coupons est faible plus la *duration* sera élevée. A la limite, la *duration* d'une obligation à coupon zéro est égale à sa maturité.

★ La formule de la *duration* n'est valable que pour de faibles variations de taux. En cas de fortes variations, il existe un biais.

2. La *duration* : un indicateur de Sensibilité

Le concept de *duration* s'avère très utile pour apprécier la variation du prix d'une obligation provoquée par un changement de taux du marché.

On utilise, dans bien des cas, une autre mesure de sa sensibilité à cette variation de taux : elle s'appelle ***coefficient de sensibilité « S »*** ou *modified duration*; elle est une autre expression de la volatilité d'une obligation qui mesure la fluctuation relative de son prix pour une variation absolue du taux d'intérêt. Elle se définit par l'expression :

$$S = \frac{dP}{d(1+i)} \times \frac{1}{P}$$

Le coefficient de sensibilité est proche de la *duration*. La relation entre les deux mesures est la suivante.

$$S = -\frac{D}{(1+i)}$$

Le signe négatif fait apparaître qu'une hausse (ou une baisse) du taux provoque une diminution (ou une augmentation) du prix de l'obligation.

Exemple

Si l'on prend l'exemple d'une obligation de coupon 10 % et de maturité 10 ans, pour un taux de rendement du marché de 10 % le prix de cette obligation est de 100.

TABLEAU N°6

Approximation du prix d'une obligation par le moyen de la sensibilité

Taux de rendement du marché	Approximation du prix au moyen de la sensibilité	Variation du prix constatée
9 %	6,14	6,42
11 %	-6,14	-5,89

L'approximation de la sensibilité par la duration n'est efficace que pour des variations de taux très faibles et en tous cas inférieures à 0,5 %.

La sensibilité a les mêmes limites que la *duration*. On peut en conclure que la sensibilité est une fonction de deux variables, la *duration* de l'obligation considérée et le taux d'intérêt sur le marché. Elle est d'autant plus élevée que la *duration* est forte. C'est à dire, que l’investisseur qui anticipe une baisse des taux d’intérêt, serait amené à choisir l’obligation dont la duration est la plus élevée. Inversement, s’il anticipe une hausse, il aura l’avantage d’acquérir l’obligation à sensibilité et duration réduites.

Nous n’avons pas pour autant terminé l’inventaire des facteurs conditionnant la variation d’un titre obligataire sur le marché, la convexité est un dernier élément important à prendre en considération.

3. La convexité d’une obligation

On a vu précédemment qu’en se combinant entre elles, en fonction du temps couru depuis l’émission, du prix de vente de l’obligation et de la fluctuation des taux d’intérêt, les variables déterminant la valeur d’une obligation (le taux nominal, la durée de vie et le taux d’intérêt sur le marché), conduisaient aux concepts de *duration* et de *sensibilité.*

Or on constate que deus obligations ayant même *duration* et même sensibilité n’ont pas une même réaction à une modification du taux d’intérêt sur le marché. L’explication découle du facteur de ***convexité***.

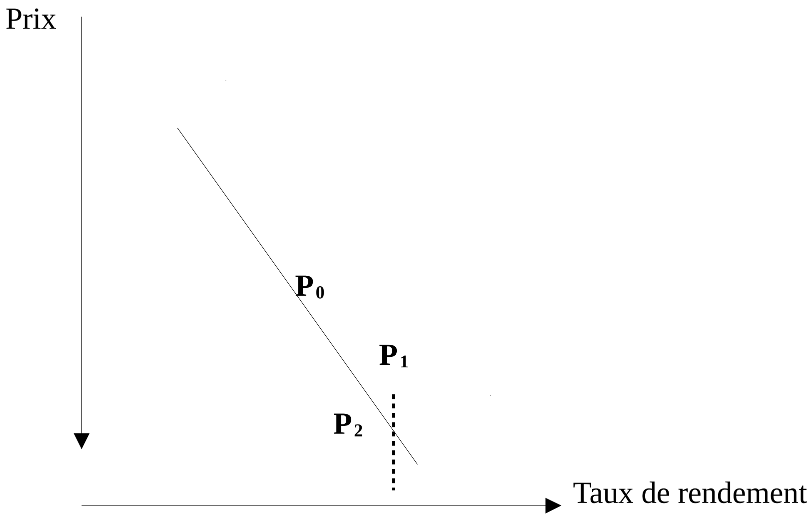
Autrement dit, la relation qui lie le prix d’une obligation au taux d’intérêt n’est pas linéaire mais convexe :

L’impact sur le cours d’une obligation dû à une augmentation des taux diffère de celui engendré par une baisse identique du taux. En effet, il est plus lent dans le premier cas et plus fort dans le second.

La convexité mesure l'écart entre la courbe prix-rendement et la ligne droite issue de la tangente correspondant au taux actuel (P_2, P_1).

GRAPHIQUE N°5

La convexité



- **Formulation**

La convexité se définit ainsi

$$C_x = \frac{1}{P} \times \frac{d^2P}{d_i^2}$$

La convexité s'exprime donc comme la dérivée seconde relative du prix par rapport au rendement. Sur le plan pratique, la convexité se calcule en utilisant l'approximation suivante[2].

$$C_x = 10^8 \times \frac{1}{P} \times [(P_- - P) - (P - P_+)]$$

Où,

---

2 Pour plus de détails, consulter TEULIE (J.) et TOPSACLIAN (P.), op. cit.,p. 309.

C_x représente la convexité ;

P, le prix correspondant au rendement actuel (prix brut avec coupon couru) ;

P_+, le prix correspondant au taux de rendement actuel augmenté de 1 point de base ;

P_-, le prix correspondant au taux actuel diminué de 1 point de base.

Exemple

Reprenons l'obligation de l'exemple précédent.

TABLEAU N°7

Sensibilité/convexité

Taux de rendement	Approximation du prix au moyen de la	Approximation du prix au moyen de la	Prix constaté
9 %	6,14	6,43	6,42
11 %	-6,14	-5,86	-5,89

Ainsi la *duration* mesure le degré d'exposition d'une obligation au risque de taux, la sensibilité, quant à elle, tente d'approcher au mieux la volatilité des cours d'une obligation.

Pour remédier aux imperfections de la sensibilité, la convexité apparaît comme mesure très pertinente.

<u>Conclusion</u>

La valeur d'une obligation est égale à la valeur actualisée des flux monétaires que l'on peut en attendre, soient les intérêts et le remboursement.

La *duration*, initialement conçue comme une mesure améliorée de la maturité d'une obligation, est devenue une mesure très utilisée d'exposition au risque de taux. Cette mesure ne saurait être pertinente pour des variations importantes de taux. La convexité peut servir alors à corriger les effets des variations non négligeables.

L'approche actuarielle, ainsi que les développements qui en découlent, reposent sur deux hypothèses restrictives :

- L'existence d'un taux unique pour toutes les échéances ;
- Une variation identique du taux d'intérêt pour toutes les échéances.

L’évaluation de l’obligation met en évidence l’influence de la variation des taux d’intérêt sur ses prix et ses cours. C’est pour cela que toute entreprise projetant d’émettre des obligations ou épargnant espérant faire un gain à la suite de son placement dans ces titres, doivent bien connaître cet instrument financier.

Ainsi, les modalités d’une émission obligataire sont très variées et résultent de la combinaison de nombreux éléments et d’une mise en place bien adaptée.