Universi té Mohammed V- Agdal
Faculté des Scie nces
D´e parteme nt de Mathématique s et Infor matique
Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014
Rabat, Maroc

Fili`er e DE UG:

Scie nces Math´e matiques et Infor matique (SMI)
etSciences Math´e matiques (SM)

Mo dule Math´ematiques INOTES DE COURS D’ANALYSE IChapitr

TABLE DES MATIE RES

Chapitre 1

Fonctions réelles à une variable réelle et théorèmes de base

On suppose $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle et de domaine de définition $D_f \subset \mathbb{R}$. On rappelle que $f(D_f) = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in D_f \ avec \ y = f(x)\}$ est l'image de D_f par f.

1.1 Rappels

Définition (Graphe d'une fonction): On appelle graphe de f, l'e

où $x \in D_f$. Dans un plan rapporté à un repère (o, i, j) (généralement orthonormé). Les points $M(x, f(x))$ avec $x \in D_f$ constituent la courbe représentative de f notée $C_f = \{M(x, f(x)) : x \in D_f\}$.

Définition (Périodicité): f est dite périodique s'il existe $T > 0$ tel que: $i) \forall x \in D_f, (x +$

Définition (Parité) : *On suppose que D_f admet 0 pour centre de symétrie* i) f est dite

$\in D_f$ et $f(a + x) + f(a - x) = 2f(a)$. *Remarque : Si la fonction f est paire, impaire, périó*

S. EL HAJJI et T. GHEMIRES

Exemple:

Soit $f(x) = \sin(x)$ *On a* $D_f = \mathbb{R}$,

f est périodique et de période $2\pi \Longrightarrow D_E = [-\pi, \pi]$.

f est impaire, donc le domaine d'étude de f sera même à $D_E = [0, \pi]$

Définition (Fonctions bornées):

i) f est dite majorée (resp minorée) si $f(D_f)$ est une partie majorée (resp minorée) de $\mathbb{R}$ **ii)** f est dite bornée si $f(D_f)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$

Exemples: 1) $f(x) = \sin(x)$; f est bornée car $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq f(x) \leq 1$

2) $f(x) = e^x$ est non bornée, mais elle est minorée par 0. *car* $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq e^x$.

Remarque: L'image d'une partie bornée par une application n'est pas forcément bornée.

En effet si on prend : $f(x) = \frac{1}{x}$, *si* $x \in]0, 1]$

on a $f :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *mais* $f(]0,1])$ *n'est pas bornée.*

1.2 Limites

1.2.1 Définition et propriétés

Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, un intervalle ... $_0 + \alpha[$, où $\alpha > 0$, est appelé voisinage de x_0. Un voisinage de x_0 sera noté $V(x_0)$. Dans toute la suite on suppose que D_f contient un voisinage de x_0, sauf éventuellement x_0 (c'est à dire : $V(x_0)\setminus\{x_0\} \subset D_f$).

Définition. On dit que f possède une limite l au point x_0, si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta_\varepsilon > 0$; $\forall x \in V$ ... $l| \leq \varepsilon$

On écrit alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ ou $f(x) \to_{x\to x_0} l$. Remarque: D'après la définition on a: ... $(x_0)\setminus\{x_0\} \Longrightarrow f(x) \in V(l)$)

Théorème 1: (Unicité de la limite): S'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ...

Démonstration: Supposons que $l_1 = \lim_{x\to x_0} f(x)$ et $l_2 = \lim_{x\to x_0} f(x)$ avec $l_1 = l_2$. So... ; d'après la définition de la limite $\exists \eta_\varepsilon > 0$ tel que:

$\forall x \in V(x_0)\{x_0\}, |x - x_0| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow (|f(x) - l_1| < \varepsilon$ et $|f(x) - l_2| < \varepsilon)$

$\Longrightarrow |l_1 - l_2| \leq |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2| < 2\varepsilon = |l_1 - l_2|$; d'où la contradiction et alors $l_1 = l_2$.

Proposition 1 Si f admet une limite l en x_0 alors f est bornée au voisinage de x_0

Proposition 2 (lien entre suite et limite)**:** On a l'équivalence suivante:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = l}$$

$$\boxed{\text{pour toute suite } (u_n)_n \subset V(x_0)\setminus\{x_0\} \text{ qui converge vers } x_0, \text{ on a: } \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l}$$

Démonstration:

$\Rightarrow$) $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0; \forall x \in V(x_0)\setminus\{x_0\}, |x - x_0| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Or $\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0$ et $\eta_\varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - x_0| < \eta_\varepsilon$.

Donc on a: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f(u_n) - l| <$

ce qui est équivalent à $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l$.

$\Longleftarrow$) Supposons que pour toute suite $(u_n)_n$, $(\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l)$.

Si f ne possède pas la limite l au point x_0, on aura:

$\exists \varepsilon > 0$, tel que $\forall \eta > 0, \exists x \in V(x_0)\setminus\{x_0\}, |x - x_0| < \eta$ et $|f(x) - l| > \varepsilon$.

Donc pour tout entier n, $\exists u_n \in V(x_0)\setminus\{x_0\}, |u_n - x_0| < \frac{1}{n+1}$ et $|f(u_n) - l| > \varepsilon$.

$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = x_0$ et $(f(u_n))_n$ ne converge pas vers l. Ce qui est absurde car $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l$.

Exemple : Si $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ alors $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas. En effet pour

$x_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0$ on a: $f(x_n) = \sin(2n\pi) = 0$

$y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0$, on a : $f(y_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$

Proposition 3 (Opération sur les limites) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$ alors 1) li

$= \frac{l}{l}$

6) $(f \geq g) \Longrightarrow (l \geq l)$ 7) $(f \leq h \leq g) \Longrightarrow (l \leq \lim_{x\to x_0} h(x) \leq l)$. **Exemple :** $f(x) = (x^2+1)^2+2x2x$

4 $\Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1$

Comme $0 \leq |x\cos\frac{1}{x}| \leq |x|$ et $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, on a $\lim_{x\to 0} (x\cos\frac{1}{x}) = 0$.

$g(x) = 3 + x\cos\frac{1}{x} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} g(x) = 3 + \lim_{x\to x_0} (x\cos\frac{1}{x}) = 3$

donc $\lim_{x\to 0}[f(x) + g(x)] = 4$, $\lim_{x\to 0}[f(x)g(x)] = 3$, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{3}$

1.2.2 Limites à droite et limites à gauche

Définition 1) On dit que f ad

On note $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$ ou $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = l$

Proposition 4 On a l'équivalence suivante:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = l}$$

$$\boxed{f \text{ possède une limite à droite et une à gauche au point } x_0 \text{ et } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l = \lim_{x\to x_0^-} f(x)}$$

Démonstration:

$\Leftarrow$) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \Longrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists \eta_{1,\varepsilon} > 0$ tel que $\forall x \in V(x_0), x_0 < x < x_0 + \eta_{1,\varepsilon} \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$ $\lim_{x\to x-0} f(x) = l \Longrightarrow$

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists \eta_{2,\varepsilon} > 0$ tel que $\forall x \in V(x_0), x_0 - \eta_{2,\varepsilon} < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$

On pose $\eta = \min(\eta_{1,\varepsilon}, \eta_{2,\varepsilon})$ alors $\forall x \in V(x_0) \setminus x_0, |x - x_0| < \eta_\varepsilon$, on a

$$\begin{cases} x_0 - \eta < x < x_0 \Longrightarrow x_0 - \eta_{2,\varepsilon} < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon \\ \text{ou} \\ x_0 < x < x_0 + \eta \Longrightarrow x_0 < x < x_0 + \eta_{1,\varepsilon} \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon \end{cases}$$

d'où $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0; \forall x \in V(x_0) \setminus x_0, x_0 - \eta_\varepsilon < x < x_0 + \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow$) facile à vérifier, en utilisant les définitions.

Remarque :1) Si $\lim_{x\to x+0} f(x) = l_1$ *et* $\lim_{x\to x-0} f(x) = l_2$ *avec* $l_1 \neq l_2$ *alors f n'admet pas de limite en* x_0.

2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to x+0} f(x) = \lim_{x\to x-0} f(x) = l$

1.2.3 Limites à l'infini et limites infinies

Définition: $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists \eta > 0; \forall x \in V(x_0) \setminus x_0, |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x)| > A$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists \eta > 0; \forall x \in V(x_0) \setminus x_0, |x - x_0| < \eta \Longrightarrow f(x) < -A$

Définition $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon > 0, x > A_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \Leftarrow$

$\overline{\quad 4 \quad} = +\infty$.

2) $\lim_{x\to+\infty} (\frac{1}{x}\cos x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} (\frac{1}{x}\cos x) = 0.$

Formes indéterminées: Définition : Dans le calcul des limites, on appelle forme indéterminée toute situation qui conduit à un cas où les théorème s portant sur les opérations sur les limites ne permettent p

Les formes indéterminées les plus courantes sont:

$$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 \times \infty, -\infty + \infty, 1^\infty, 0^0, 0^\infty, \infty^0, \text{ etc ....}$$

Exemple:

Si $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$ alors $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

On dit que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ est une forme indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$.

1.3 Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

1.3.1 Définitions et Notations:

Soit f une fonction réelle définie sur une pa
suivante: f continue au point x

0

Pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de D qui converge vers x_0, $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x_0)$.

Démonstration: 1) Supposons f continue au point x_0

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0$, tel que: $\forall x \in D, |x - x_0| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0$, pour $\eta_\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - x_0| < \eta_\varepsilon$.

Ce qui implique $|f(u_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ et alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x_0)$.

2) Réciproquement, si on suppose que f est discontinue au point x_0, on a:

$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D, |x - x_0| < \eta$ et $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists u_n \in D, |u_n - x_0| < \frac{1}{n+1}$ et $|f(u_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

La suite $(u_n)_n$ converge vers x_0 et la suite $(f(u_n))_n$ ne converge pas vers $f(x_0)$.

Exemple:1) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f est discontinue en 0, car $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \neq f(1)$.

2)Mais la fonction $x \to e^{-\frac{1}{x^2}}$ peut être prolongée par continuité. Ainsi la fonction $g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Définition:

On dit f est continue à droite (resp. à gauche) au point x_0 si $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$)

Remarque: f est continue dans l'intervalle $[a, b]$ si elle est continue en tout point x de $]a, b[$, à droite de a et à gauche de b.

Proposition (Opération sur les fonctions continues**)**

1) Soient f et g deux fonctions continues au point x_0, alors:

i) $|f|$, $f+g$, $f-g$ et $f\times g$ sont continues en x_0.

ii) Si $g(x)=0$ au vois inage de x_0 et $g(x_0)=0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0

2) Si f est continue au point x_0 est g est continue au point $f(x_0)$, alors $g\circ f$ est continue au point x_0. **Exemples de fonctions continues:** 1) Les fonctions polynômes $P(x)=a_n$

Cas de la fonction sinus : $f(x)=\sin(x)$. Pour tout x et $x_0\in\mathbb{R}$, on a : $\sin(x)-\sin(x_0)=2$

$) \cos(\frac{x+x_0}{2})$

Or p our tout $u\in\mathbb{R}$, $|\sin(u)|\leq|u|$ d'o `u $|\sin(x)-\sin(x_0)|\leq 2|\sin(\frac{x-x_0}{2}$

$)|\times 1\leq|x-x_0|$

donc $\forall\varepsilon>0$, $\exists\eta=\varepsilon$; $|x-x_0|<\eta\Longrightarrow|\sin(x)-\sin(x_0)|\leq|x-x_0|\leq\varepsilon$.

Ainsi la fonc tion $\sin(x)$ es t continue s ur $\mathbb{R}$.2) Les f onctions ´el´e mentaires sont c onti

efinition resp ectif.

par exemple: la fonction: $x\to e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x\to\ln(x)$ es t continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.3.2 Th´eor`e me de s valeur s interm´ediair es .

On admet la propri´e

e et ferm´ee.

Th´eor`eme 1: Soit f une fonction r´eelle d´efinie et continue sur un intervalle ferm´e

$f(x_1)=M$ **Remarque:** Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ d´efinie par $f(x)=\frac{1}{x}$ si $x\in]0,1]$

1 si $x=0$

f n'est pas continue en 0 et $f([0,1])=\{0\}\cup[1,+\infty[$.

Ainsi l'image de $[0,1]$ par f n'est pas born´ee. Dans ce cas f n'est pas continue sur [

Th´eor`eme 2** (th´eor`eme des valeurs interm´ediaires):** Soit f une fonction d´efinie

eelstric te ment compris

entre $f(a)$ et $f(b)$ (c'est `a dire. $f(a)<y<f(b)$ ou $f(b)<y<f(a)$).

Alors il existe au moins un point $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=y$. **D´emonstration** Suppose

$a \in E \Longrightarrow E \neq \emptyset$. De plus E est majoré par b, Donc E admet une borne supérieure notée c. Comme c est un ma jorant de E et $a \in E$ on a $c \geq a$.

Comme c est le plus petit ma jorant de E on a $c \leq b$.

Donc $c \in [a, b]$. On va montrer que $f(c) = y$.

- Supp osons $f(c) < y$, alors $c < b$. Posons alors $\alpha = y - f(c) > 0$:

puisque f est continue en c, on a $\exists c' \in]c, b[$ tel que $f(c') - f(c) < \alpha$.

Ce qui entraîne $f(c') < \alpha + f(c) = y$ et alors $c' \in E$ et $c' > c$.

Donc c n'est pas un ma jorant de E ; ce qui est absurde.

- Supp osons $f(c) > y$, alors $c > a$. Posons alors $\beta = f(c) - y > 0$:

puisque f est continue en c, on a: $\exists c'' \in]a, c[$ tel que: $\forall x \in]c'', c[$, $f(x) - f(c) > -\beta$.

Ce qui entraîne $f(x) > f(c) - \beta = y$, $\forall x \in]c'', c[$ et alors c'' majore E et $c'' < c$.

Donc c n'est pas le plus petit ma jorant de E ; ce qui est absurde.

conclusion: $f(c) = y$. **Remarque:** On p eut résumer les propriétés des deux théorèmes précédents:

"L'image par une fonction continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné". **Exemple:** Soit $f : x \in [-1, +1] \longrightarrow |x| \in \mathbb{R}$ f est continue sur $[-1, 1]$ et $f([-1, 1$

$\exists c \in]a, b[$ telque

$f(c) = 0$. **Remarque:** *Dans le théorème des valeurs intermédiaires, le point c n'est pa*

En effet pour $f(x) = \sin(x)$ *dans* $[0, 4\pi]$,on a: $\sin(\frac{\pi}{2}$

$)$. $\sin(\frac{7\pi}{2}) < 0$,

et $\sin(\pi) = 0$, $\sin(2\pi) = 0$ *et*

$\sin(3\pi) = 0$.

Remarque:Soit $f : [-1, +1] \longrightarrow \{0, 1\}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

On a $f([-1, +1]) = \{0,1\}$ n'est pas un intervalle car f n'est pas continue sur $[-1, +1]$

Exemple : Soit l'équation $f(x) = 0$, *où* $f(x) = x^3 + x^2 + 3x - 2$.

f est continue s ur $\mathbb{R}$, $f(0) = -2$ et $f(1) = 3$ donc $f(0) < 0 < f(1)$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0, 1[$: $f(c) = 0$.

Remarque : Une des applications du théorème des valeurs intermédiaires: le calcul approché d'une racine. En reprenant l'exemple précédent:

- Si on p ose $\alpha_1 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, on a $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} < 0 \Rightarrow f(\frac{1}{2}) f(1) < 0$.

Donc il exis te $c \in]\frac{1}{2}, 1[$: $f(c) = 0$.

- Si on pose $\alpha_2 = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}$, on a $f(\frac{3}{4}) = \frac{79}{64} > 0 \Rightarrow f(\frac{1}{2}) f(\frac{3}{4}) < 0$.

Donc il exis te $c \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$: $f(c) = 0$.

Donc n'imp orte quelle valeur dans $]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$ est une approximation de l'une des racine s de f, qui se trouve dans cet intervalle , avec une précision de 25% car $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$

1.4 Dérivées et théorème des accroissements finis

1.4.1 Définitions et Notations:

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition: Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $x_0 \in I$.

On dit que f est dérivable en x_0 si le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$ lors que $x \longrightarrow x_0$. On écrit alors: $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$f'(x_0)$ est appelée la dérivée de f au point x_0. **Exemple:** Si $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = x+x_0$ et alors $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 2x_0$

Remarques *:i) Si on pose $x = x_0 + h$ alors $x \longrightarrow x_0 \Leftrightarrow h \longrightarrow 0$ et* $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ii) Si f est dérivable au point x_0 ,et si *on pose* $\varepsilon(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)$, on a: $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$

car $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \Rightarrow \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$;

et alors on peut écrire: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$

Propriété : Si f est dérivable au point x_0 alors f est continue au point x_0.

Démonstration: Si f est dérivable au point x_0, alors $f(x_0+h) - f(x) = h[f'(x_0) + \varepsilon(h)]$ $\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$

$\Longrightarrow \lim_{h\to 0}[f(x_0+h) - f(x)] = \lim_{h\to 0} h[f'(x_0) + \varepsilon(h)] = 0$

$\Longrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x) \Rightarrow f$ est continue au point x_0

Remarque :La réciproque de la propriété précédente est fausse.En effet , la foncti

$$\frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 \text{ si } x<0 \\ +1 \text{ si } x>0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -1$

et $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$

donc $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ *n'admet pas de limite lorsque* $x \to 0$

Interprétation géométrique:

Soit $M_0 \left| \begin{matrix} x_0 \\ f(x_0) \end{matrix} \right.$ et $M \left| \begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right.$ deux points de la courbe représentative de f:

on a: $x - x_0 = \overline{M_0H}$ et $f(x) - f(x_0) = y - y_0 = \overline{MH}$

La fonction $g(x) = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\overline{MH}}{\overline{M_0H}}$ représente le co efficient directeur de la droite M_0M,

$g(x)$ est la pente de la droite M_0M.

On dit que la droite M_0M de p ente $g(x)$ tend vers une droite-limite de p ente $f(x_0)$. C'est la tangente `a la courb e au p oint M_0 .Posons $x - x_0 = \Delta x$:accroissement de la variable

$$f(x) - f(x_0) = \Delta f(x) \text{ :accroissement de la fonction.}$$

Il vie nt : $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Equation de la tangente `a la courb e au p oint : $M_0 \left| \begin{array}{l} x_0 \\ f(x_0) \end{array} \right.$

$$y - f(x_0) = f(x_0)(x - x_0)$$

D´e finition : D´eriv´ee `a droite et d´e riv´ee `a gauchei) On dit que f est d´erivable ... $_0$ si

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \left(\text{resp ectivement } \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) \text{existe;}$$

on note $f_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (respectivement $f_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$).

ii) On dit que f est d´erivable dans $[a, b]$ si f est d´erivable en tout point $\in]a, b[$, d´erivable `a gauche au point $b$ et d´erivable `a droite au point a.*Remarques :i) si f est d´erivable* ... $_0$) *alors f est d´erivable en* x_0 *.et on a :* $f_g(x_0) = f_d(x_0) = f(x_0)$ *.ii) f peut ˆetre d´erivable `a gauche*

$$= -1 \text{ et } f_d(0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

donc $f_g(0) = f_d(0) \Rightarrow$ *f n'est pas d´erivable au point* 0.

1.4.2 Op´erations sur les

est d´erivable sur I et on a: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

2) D´eriv´ee logarithmique : Soit f une fonction d´erivable et non nulle sur I,On a...

.

D´eriv´ee logarithmique d'un pro duit de deux fonction:

On considère deux fonctions dérivables $u \neq 0$ et $v \neq 0$

$$\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'v + v'u}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$$

Dérivée logarithmique d'un quotient de deux fonctions:

$$\frac{\left(\frac{u}{v}\right)'}{\frac{u}{v}} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$$

3) Dérivée d'une fonction composée : Soit f et g deux fonctions telles que: f : $\longrightarrow \mathbb{R}$, avec $J \subset K$

Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si g est dérivable en $y_0 = f(x_0) \in J$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a : $(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] \times f'(x_0)$. **Démonstration:** On a : $(g \circ f)(x_0 + h) -$ $g[f(x_0)] = k[g'[f(x_0)] + \varepsilon_2(k)] = h[f'(x_0) + (h)][(g' f(x_0)] + \varepsilon_2(k))] = hf'(x_0).g' f(x_0) + h\varepsilon_3$

$$= g'[f(x_0)] \times f'(x_0)$$

4) Dérivée d'une fonction réciproque:

Soit f une fonction définie continue sur $[a, b]$. On suppose que sa fonction réciproque $g = f^{-1}$ existe. Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors $i)$ g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ $ii)$ et on

$$\circ f^{-1} \quad \text{i.e. } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \text{ et } g'(y) = \frac{1}{f'(x_0))}.$$

Démonstration : $x_0 = g(y_0) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$ $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$ $\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$

$$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\lim \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0))}$$

1.4.3 Théorème de Rolle et applications:

Théorème de Rolle:

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et vérifiant $f(a) = f(b)$.

Alors il existe au moins une valeur $c \in]a, b[$ telle que $f'(c) = 0$.

Démonstration

i) Si f est une fonction constante alors $f'(x) = 0, \forall x \in]a, b[$ alors tout $x \in]a, b[$, x vérifie la proposition.ii) Si f n'est pas constante sur $]a, b[$, f étant continue alors $f([a, b]) = [m, M]$ avec

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x), m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \text{ et } m \neq M$$

puisque $f(a) = f(b)$ et $m \neq M$ alors l'une des deux valeurs m ou M est l'image par f d'u point de l'intervalle ouvert $]a, b[$. Supposons qu'il s'agit de M; il existe alors au moins u $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$Pour $x \in]a, b[$, considérons le rapport $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$

$$\text{Si} x > c, \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c^+) \leq 0$$

$$\text{Si} x < c, \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c^-) \geq 0$$

f étant dérivable au point $c \in]a, b[$, alors $f'(c_+) = f'(c_-) = f'(c)$ et

$f'(c) \geq 0 f'(c) \leq 0 \Rightarrow f'(c) = 0$**Généralisation: Extension du théorème de Rolle**Se

érifiant

$\lim_{x \to a^+} f(a) = \lim_{x \to b^-} f(b) = +\infty$ $(ou - \infty)$Alors il existe au moins une valeur $c \in]a, b[$ tel
R. On a : $f(-1) = f(1)$ mais $f'(0) = 0$13

1.4.4 Théorème des accroissements finis:

Théorème:
Soit f une fonction définie, continue sur un $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$
Alors il existe au moins une valeur $c \in]a, b[$ tel que:

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c) \text{ avec } a < c < b$$

Démonstration Pour tout $x \in [a, b]$, on pose:

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$$

Comme f est supposée continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, on a
ϕ est définie, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus $\phi(a) = \phi(b) = 0$.
D'après le théorème de Rolle appliqué à ϕ: $\exists c \in]a, b[$ tel que: $\phi'(c) = 0$
Comme $\phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, on a: $\phi'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
$\Rightarrow f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$. **Interprétation géométrique:** Soit $A(a, f(a))$ et $B(b, f$

$$\frac{\quad}{- a} \text{ pente de } AB$$

Le théorème des accroissements finis affirme l'existence d'au moins un point M (c
la courbe C_f distinct de $A(a, f(a))$ et de $B(b, f(b))$ pour lequel la tangente à la courbe est parallèle à la pente AB. **Autre forme de la formule des accroissements finis**

$c \in]a, b[\Longleftrightarrow a < c < b \Longleftrightarrow 0 < c - a < b - a \Rightarrow 0 < \frac{c-a}{b-a} < 1 \Rightarrow$ on peut trouver $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\frac{c - a}{b - a} = \theta \Rightarrow c = a + \theta(b - a)$$

Si on pose $b - a = h \Rightarrow c = a + \theta h$ et la formule des accroissements finis s'écrit

$$f(a + h) = f(a) + h f'(a + \theta h) \text{ avec } 0 < \theta < 1$$

Théorème: Forme générale de la formule des accroissements finis
Soit f et g deux fonction vérifiant les hypothèses du théorème des accroissements finis sur $[a, b]$ et g' non nulle sur $]a, b[$. Alors il existe au moins une valeur $c \in]a, b[$ tel que: $f(b)$

$$\frac{\quad}{- g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Démonstration: On a : $g(b) = g(a)$, sinon d'après le théorème de Rolle,
$\exists c \in]a, b[$ tel que: $g'(c) = 0$ (en contradiction avec g' non nulle sur $]a,b[$). Soit $\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x) - g(a)]$
ϕ est définie, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $\phi(a) = \phi(b) = 0$

Donc d'après le théorème de Rolle il existe $c \in]a, b[$ tel que $\phi(c) = 0$.

Comme $\phi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$ on a

$\phi(c) = 0 \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Exemple d'application du théorème des accroissements finis

1) Montrer que pour $0 < a < b$, on a les inégalités : $\frac{b-a}{1+b^2} < Ar\,ctg\,(b) - Ar\,ctg\,(a) < \frac{b-a}{1+a^2}$.

On applique le théorème des accroissements finis pour la fonction : $f(x) = Ar\,ctg$ ... $[a,b]$: $\exists c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\Rightarrow Ar\,ctg\,(b) - Ar\,ctg\,(a) = (b-a)\frac{1}{1+c^2},\ c \in]a, b[$$

$c \in]a, b[\Rightarrow 0 < a < c < b \Rightarrow a^2 < c^2 < b^2 \Rightarrow 1 + a^2 < 1+c^2$ et $1+b^2 > 1+c^2$.

Donc $\frac{1}{1+a^2} > \frac{1}{1+c^2}$ et $\frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2}$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{1+b^2} < Ar\,ctg\,(b) - Ar\,ctg\,(a) < \frac{b-a}{1+a^2}$$

2) En déduire que :

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < Arctg\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

On pose $b = \frac{4}{3}$ et $a = 1 \Rightarrow Ar\,ctg\,(a) = \frac{\pi}{4}$

$\Longrightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{\frac{4}{3}-1}{1+(\frac{4}{3})^2} < Arctg\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{\frac{4}{3}-1}{2}$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < Arctg\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

Corollaire : i) Pour qu'une fonction f soit constante sur un intervalle I, il faut et il suffit qu'elle ait une dérivée nulle sur I. **ii)** Pour qu'une fonction f dérivable sur un intervalle I, s... écroissante) sur I il faut et il suffit que $f' \geq 0$ (resp $f' \leq 0$) sur I. **iii)** Soit f une fonction définie, continue, d... $f' > 0$ (resp $f' < 0$) sur I alors f est strictement croissante (resp décroissante). *Remarque : La réciproque* ... existe au moins une valeur $c \in]x_1, x_2[$ telle que: $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c) \Rightarrow f'(x_1)$ ...

$$\geq 0 \Rightarrow f'(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

Réciproquement :($f' \geq 0 \Rightarrow f$ croissante sur I)$(x_1, x_2) \in I^2$, $x_1 = x_2$. Supposons x_1 ... $_1, x_2]$ est définie et continue sur $[x_1, x_2]$; elle est dérivable sur $]x_1, x_2[$. Donc d'après les accroissements finis, il existe au moins une valeur $c \in]x_1, x_2[$ telle que:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$$

Or $f'(c) \geq 0$ et $x_2 - x_1 > 0$, $\Longrightarrow (x_2 - x_1)f'(c) \geq 0 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ et f est croissante sur I.

1.5 Dériv´ees d'ordre sup´erieur et règle de l'Hospital

1.5.1 Dériv´ees d'ordre sup´erieur

D´efinition : Soit f une fonction derivab

D'une façon g´en´erale, la d´eriv´ee $n^{\grave{e}me}$ de f, app el´ee aussi d´eriv´ee d'ordre n efinie par la formule de recurrence : $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, $\forall n \geq 1$ avec $f^{(0)} = f$. **Exemples :1)** Pour tout x

$$f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$f''(x) = \sin x = \sin(x + \frac{2\pi}{2})$$

$$\ldots f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$$

2) Si p our tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$ alors,p our tout $n \in \mathbb{N}$ et p our tout $x \in \mathbb{R}$

$$-1)(p-2)\cdots(p-n+1)x^{p-n}$$

$f(x) = x^p$, $p \in \mathbb{N}^*$ $f'(x) = px^{p-1} \ldots f^{(n)}(x) = p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)x^{p-n}$ Si $n = p \longrightarrow f$

$$).$$

Formule de Leibnitz: Soient u et v deux fonctions n fois d´erivables sur I $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v$

(1) $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l \Rightarrow \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = l$

(2) $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \infty$

Démonstration: On applique le théorème des accroissements finis généralisé sur l'intervalle $[a, x]$, il existe au moins $c \in]a, x[$ tel que : $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(c)}{g(c)}$.

Puisque $c \in]a, x[$, si $x \longrightarrow a^+$ alors $c \to a^+$ et $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{c\to a^+} \frac{f(c)}{g(c)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Comme conséquence immédiate on a le corollaire suivant: Corollaire: Soit $x_0 \in [a,b]$ ... $[a,b]\backslash\{x_0\}$. On suppose que $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ pour tout $x \in]a,b[\backslash\{x_0\}$, On a alors: (1) ...

$\frac{}{} = l \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = l$

(2) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \infty$

Exemple: 1) Calcul de $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

On a une forme indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$.

$f(x) = \cos x$ et $g(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2) Calcul de $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

On a une forme indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$$

En effet $f(x) = \sin x - x \Rightarrow f(0) = 0$

$$g(x) = x^3 \Rightarrow g(0) = 0 \quad \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{\sin x - x}{x^3}$$

$f(x) = \cos x - 1$ et $g(x) = 3x^2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$$

Appliquons une deuxième fois la règle de l'hospital: $f(x) = \cos x - 1 \Rightarrow f(0) = 0$ g ...

$$= -\frac{1}{6} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Attention:
Avant d'appliquer la règle de l'Hospital, il faut vérifier toujours les hypothèses.

La règle de l'Hospital permet de résoudre un très grand nombre de formes indéterminées (toutes celles de la forme $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ et toutes celles qui s'y ramènent). Mais elle a quelques inconvénients:

1 - Avant de l'appliquer, il faut savoir si l'on est dans des cas d'application de cette règle ou de ses généralisations. 2 - Il faut calculer des dérivées de fonctions

3 - Son utilisation demande parfois des astuces dans la façon de mener le quotient et il peut être nécessaire de transformer ce quotient avant de lui appliquer cette règle.

4 - Elle ne marche pas toujours: L'étude de $\lim_{x\to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x})$ ne se fait pas par la règle de l'Hospital.

1.6 Formule de Taylor

1.6.1 Formules de Taylor et Mac-Laurin.

Définition : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

i) On dit que f est continûment dérivable sur I si elle est dérivable et sa dérivée f' est continue sur I. **ii)** On dit que f est n fois continûment dérivable sur I si elle est dérivable n fois et que ses dérivées $f', f'', \cdots, f^{(n-1)}, f^{(n)}$ sont continues sur I. ($n \in \mathbb{N}$). On dit alors que la fonction f est de classe C^n. Si f est un polynôme de degré n c'est à dire: $f(x) = P_n(x) = a_n x^n +$

$x + a_0.$

On a : $f(0) = a_0$. Or $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \ldots 2a_2 x + a_1 \Rightarrow f'(0) = a_1$. De m

2.

De façon générale, et après k itérations, (par récurrence) on voit que $f^{(k)}(0) = k!a$

$$x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Peut-on généraliser cette propriété à une fonction f "quelconque"? D'après le th

$[0, x]$ et dérivable dans $]0, x[$, il existe $c \in]0, x[: f(x) = f(0) + xf'(c)$. Plus générale

i) f est n fois continûment dérivable sur le segment $[a, b]$.
ii) $f^{(n+1)}$ existe sur l'ouvert $]a, b[$.
Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que:

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + .. + \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + .. + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Remarques :1) Si $n = 0$, on retrouve la formule des Accroissements finis : $f(b) = f(a) +$

2) Cette égalité est appelée formule deTaylor à l'ordre $(n+1)$ dans $[a,b]$.La forme

$\frac{\quad}{\quad} f^{(n+1)}(c)$ est appelée reste de Lagrange.

Si f est un un polynômede degré $\leq n$, le reste R_n est nul.

Démonstration: On considère la fonction polynômiale suivante:

$$P_n(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

on a $degré(P_n) \leq n$.On remarque que $P_n(a) = f(a)$ et $P_n'(x) = f'(a) + (x-a)f''(a) + \cdots + ($

$$\frac{\quad}{-1)!} f^{(k)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{(n-1)}}{(n-1)!} f^{(n)}(a)$$

On a donc: $P_n(a) = f(a)$, $P_n'(a) = f'(a)$, $\cdots$, $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, $\cdots$, $P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$.

P_n peut s'écrire sous la forme $P_n(x) = P_n(a) + (x-a)P_n'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}$

$$\frac{\quad}{\quad} P_n''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^k}{k!} P_n^{(k)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} P_n^{(n)}(a)$$

On considère la fonction ϕ_n définie par: $\phi_n(x) = f(x) - P_n(x) - \alpha_n \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

où α_n est une constante réelle choisie de telle sorte que $\phi_n(b) = 0$, c'est à dire: $\alpha_n = (f(b) - P_n(b)) \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}$

La fonction ϕ_n est définie continue sur le segment $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et on a:

$$\phi_n(a) = \phi_n(b) = 0$$

D'après le théorème de Rolle , il existe au moins une valeur $c_n \in]a, b[$ telle que: $\phi_n'(c_n) = 0$.

La dérivée de ϕ_n est $\phi_n'(x) = f'(x) - P_n'(x) - \alpha_n \frac{(x-a)^n}{n!}$. la fonction ϕ_n' est continue sur le segment $[a, c_n]$ et dérivable sur $]a, c_n[$, et qui vérifie: $\phi_n'(a) = \phi_n'(c_n) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction ϕ_n' , il existe au moins une valeur $c_{n-1} \in]a, c_n[$ telle que:

$$\phi_n''(c_{n-1}) = 0 \quad \phi_n''(x) = f''(x) - P_n''(x) - \alpha_n \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

On continue de manière analogue en appliquant successivement le théorème de Rolle à ϕ_n'', $\phi_n^{(3)}$, .., $\phi_n^{(n)}$.

Ainsi on a l'existence des points $c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_2$ puis c_1 telles que:

$$c_{n-1} \in]a, c_n[,\quad c_{n-2} \in]a, c_{n-1}[,\ \ldots,\ c_2 \in]a, c_3[,\ c_1 \in]a, c_2[$$

avec $\phi_n(c_{n-1}) = 0, \ldots\ldots\ldots, \phi_n^{(n)}(c_1) = 0.$

Comme $\phi_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x) - \alpha_n(x-a)$, $\phi_n^{(n)}$ est continue sur le segment $[a, c_1]$ et dérivable sur $]a, c_1[$ et on a $\phi_n^{(n)}(a) = \phi_n^{(n)}(c_1) = 0$, on applique le théorème de Rolle:

Il existe au moins une valeur $c \in]a, c_1[$ telle que: $\phi_n^{(n+1)}(c) = 0$.

Or $\phi_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - P_n^{(n+1)}(x) - \alpha_n$

et degré$(P_n) \leq n \Longrightarrow (P_n^{(n+1)}(x) = 0\ \forall x) \Longrightarrow \phi_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \alpha_n$;

donc $\phi_n^{(n+1)}(c) = 0 \Longrightarrow f^{(n+1)}(c) = \alpha_n$

d'où $\phi_n(x) = f(x) - P_n(x) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$

$$\Longrightarrow \phi_n(b) = f(b) - P_n(b) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) = 0$$

car α_n a été choisi de telle sorte que $\phi_n(b) = 0$ $f(b) = P_n(b) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) :: c \in]a, b[$

d'où la formule de Taylor à l'ordre $(n+1)$

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + .. + \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + .. + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Autre écriture de la formule de Taylor à l'ordre $(n+1)$:En posant $b - a = h \Longrightarrow b$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad c \in]a, a+h[$$

Autre forme de la formule de Taylor à l'ordre $(n+1)$: $c \in]a, a+h[\Longrightarrow 0 < c - a < h$, $0 < \frac{c-a}{h} < 1 \Longrightarrow \exists\ \theta \in]0, 1[, \theta = \frac{c-a}{h} \Longrightarrow c = a + \theta h$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h), \theta \in]0, 1[$$

Formule de Mac-Laurin : C'est le cas particulier où $a = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),\ c \in]0, x[$$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x),\ \theta \in]0, 1[$$

1.6.2 Exemples:

Formule de Taylor de quelque s fonctions usuelles p our x au vois inage de 0 : (Pour les au voisinage de a, il suffit de p ose r $x - a = x$).

1) $f(x) = e^x$. Comme $f^{(n)}(x) = e^x$ et $f^{(n)}(0) = 1$, on a:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}, \text{ avec } 0 < c < x.$$

2) $f(x) = \sin(x)$. On a $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$,

$$f^{(2p)}(x) = (-1)^p \sin(x),\ f^{(2p+1)}(x) = (-1)^p \cos(x)$$

donc $f^{(2p)}(0) = 0$ et $f^{(2p+1)}(0) = 1$. Ainsi $\sin(x) = x$

$$\boxed{- \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1} + [\frac{(-1)^{p+1}}{(2p+2)!} \sin(c)] x^{2p+2}, \text{ avec } 0 < c < x.}$$

De manière analogue on a:

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} + [\frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \cos(c)] x^{2p+1}, \text{avec } 0 < c < x.}$$

3) Pour les fonctions hyp erb oliques: $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$:

Les dériv´ees successives de chx sont: $sh(x)$, chx, shx, chx,.....$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} sh(c)$, avec $0 < c < x$.

$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{2(n+1)}}{(2n+2)!} ch(c)$, avec $0 < c < x$.

4) $f(x) = \frac{1}{1-x}$. On a:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}; \ldots; f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \text{ donc } f^{(n)}(0) = n!.$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + [\frac{1}{(1-c)^{n+2}}] x^{n+1} \text{ avec } 0 < c < x.}$$

5) Si $|x| < 1$, $f(x) = \log(1-x)$ es t bien définie et on a:

$$f'(x) = -\frac{1}{1-x}, \ldots, f^{(k)}(x) = -\frac{(k-1)!}{(1-x)^k} \text{ donc}$$
$$f'(0) = -1,\ f''(0) = -1,\ f^{(3)}(0) = \ldots\ldots f^{(k)}(0) = -(k-1)!.$$

Ainsi pour $|x| < 1$, log(1

$$\boxed{-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \frac{1}{(n+1)(1-c)^{n+1}} x^{n+1} \text{ avec } 0 < c < x.}$$

6)Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, s oit $f(x) = (1+x)^\alpha$. On a:

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, ...,(et par recurrence) $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$.

donc $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))$ et $\exists c \in]0, x[$ tel que:

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+c)^{\alpha-n-1}x^{n+1} \text{ avec } 0 < c < x}$$

Cas particuliers:

(i) Si $\alpha = -1$; $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p+1)}{p!} = (-1)^p$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + Ax^{n+1}$$

avec $A = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(1+c)^{n+2}}$ et $0<c<x$.

(ii) Si $\alpha = \frac{1}{2}$; $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p+1)}{p!} = \frac{1(-1)(-3)\dots(-2p+3)}{p!2^p} = (-1)^{p-1}\frac{1.3\dots(2p-3)}{2.4.6\dots(2p)}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2.4.6\dots(2n)}x^n + Ax^{n+1}$$

avec $A = (-1)^n\frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n+2)}\frac{1}{(1+c)^{n+\frac{1}{2}}}$ et $0<c<x$.

1.6.3 Application de la Formule de Taylor au Calcul numérique:

Si f est une fonction de classe C^{n+1} au voisinage de a:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h), \theta \in]0,1[$$

On suppose connue les valeurs $f(a), f'(a), \dots, f^{(n)}(a)$.On prend pour valeur approché

Si on pose, $g(a) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$

L'erreur commise est $f(a+h) - g(a) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$

L'erreur commise est donnée donc par $\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$

$$a < a+\theta h < a+h$$

Donc, si M est un majorant de $f^{(n+1)}(a+\theta h)$ sur $]a, a+h[$ on a

$$|f^{(n+1)}(a+\theta h)| < M$$

$$\left|\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)\right| < \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}M$$

Donc $f(a+h)$ est égale à $g(a)$ avec une erreur absolue inf à $\frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}M$

Exemple : Calculer $\sin(31^\circ)$ à 10^{-6} près $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2} = 0.5$

$$\sin(a+h) = \sin(a) + h\cos(a) - \frac{h^2}{2}\sin(a) + \frac{h^3}{3!}\cos(a+\theta h)$$

$h = 1^\circ = \frac{\pi}{180} = 0.0174$

$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$

$$\sin(31^\circ) = 0.5 + 0.0174 \times 0.8660 - \frac{0.0174^2}{2} \times 0.5 - \frac{0.0174^3}{3!}\cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\frac{\pi}{180}\right)$$

$$\left|\frac{0.0174^3}{3!}\cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\frac{\pi}{180}\right)\right| < 10^{-6}$$

donc à 10^{-6}, $\sin(31^\circ)$ 0.513550.(La valeur fournie par le logiciel MATLAB est $\sin(31^\circ)$ 0.51503807491005).

Exercice: Calculer une approximation de Arctg (1. 001) à 10^{-2} près

1.7 Fonctions Récipro ques (ou inverses)

1.7.1 Rapp els:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , on rapp elle que:

(1) f est stric te ment croiss ante si ($x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$).

(2) f est stric te ment décrois sante si ($x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$)

Remarques: Si f est une fonction strictement croissante de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ *alors*

$$\forall x \in [a, b], a \leq x \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

d'où $f(a)$ est le minimum ($f(a) = m$) et $f(b)$ est le maximum ($f(b) = M$).

Donc $[f(a), f(b)] = [m, M] = f([a, b])$. *De même si f est strictement décroissante* de dans $\mathbb{R}$, *on a* $[f(b), f(a)] = [m, M] = f([a, b])$. **Théorème:** f est une fonction continue et strictement croissante (resp. décrois sante) sur un inte rvalle $[a, b]$, alors f est une bijection de $[a, b]$ vers $[f(a), f(b)]$ (resp. $[f(b), f(a)]$).

démonstration: Si f est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervall alors, d'après le théorème des valeurs intérmediaires, $f([a, b]) = [f(a), f(b)] \Longrightarrow f$ est surjective de

$[a, b] \longrightarrow [m, M]$ alors f admet une fonction reciproque notée f^{-1} avec $f^{-1} : [m, M] \longrightarrow$ $(a), f(b)]$. Soit $x, y \in [f(a), f(b)]$, a-t-on, $x < y \overset{?}{\Longrightarrow} f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$ Démonstration par l'

Soit $y_0 \in [f(a), f(b)]$, montrons que f^{-1} est continue en y_0. Il faut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que: } |y - y_0| < \eta \Longrightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)|$$

$y_0 \in [f(a), f(b)] \Rightarrow \exists\ x_0 \in [a, b]$ tel que $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Posons $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ et $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$

f étant stricte ment crois sante nous donne

Pour tout $x_0 \in]a, b[$ et $\varepsilon > 0$, on a: $x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon$

Comme f étant strictement croissante dans $[a, b]$,

$x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \Leftrightarrow f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$ i.e. $y_1 < y_0 < y_2$

D'autre part, $|y - y_0| < \eta \Leftrightarrow -\eta < y - y_0 < \eta \Leftrightarrow y_0 - \eta < y < y_0 + \eta$

Pour $\eta = \min\{y_0 - y_1, y_2 - y_0\}$, $|y - y_0| < \eta \Rightarrow y_0 + \eta < y_2$ et $y_1 < y_0 - \eta$

D'où : $y_1 < y_0 - \eta < y < y_0 + \eta < y_2$

$\Longrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_0 - \eta) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \eta) < f^{-1}(y_2)$

$\Longrightarrow x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y_0 - \eta) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \eta) < x_0 + \varepsilon$

Or $x_0 = f^{-1}(y_0)$ d'où $f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon \Longrightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$.

Graphe d'une fonction réciproque : Dans un repère orthonormé le graphe de f^{-1} réciproque de f, est le symétrique par rapport à la première bissectrice (droite $y = x$) du graphe de la fonction f.

Exemple : Si $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ alors $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ est la fonction réciproque de $f(x) = x^2$.

Pour $y_0 = f(x_0)$ $f'(x_0) = 2x_0 \Longrightarrow (f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}$.

1.7.2 Exemples de fonctions réciproques.

1) La fonc tion $f : x \in \mathbb{R}. \longrightarrow e^x \in \mathbb{R}_+$ est une fonction continue et stric te ment croiss ante. Sa fonction réciproque est par définition la fonction $\ln$; $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

2) La fonction réciproque de la fonction sin La restriction à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction $y = \sin x$ est une fonction continue et strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$

Elle admet donc une fonction réciproque continue et strictement croissante, notée $Arc\sin$.

$$Arc\sin : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$Arc\sin(x)$ est l'arc dont le sinus est x. C'est la fonction réciproque de la fonction sin, celle -ci est définie de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$.

$$x = Arc\sin(y) \quad -1 \leq y \leq 1 \Longleftrightarrow y = \sin(x) \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

3) La fonction réciproque de la fonction cos

La re stric tion à $[0, \pi]$ de la fonction $y = \cos(x)$ est une fonc tion continue et stricte ment décroissante de $[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ Elle admet donc une fonction réciproque continue strictement décroissante, notée $Arccos$ $Arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$

$$x = Arc\cos(y) \quad -1 \leq y \leq 1 \Longleftrightarrow y = \cos(x) \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$y = \frac{1}{(\cos(y))'} = \frac{1}{-\sin(y)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Exemples:

1) Montrer que dans $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $Arc\sin(\sin(x)) = \pi - x$

Soit $f(x) = Arc\sin(\sin(x))$ On a : $D_f = \mathbb{R}$ $f(x)$ est periodique et de période de 2π d'où l'étude sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Longrightarrow Arc\sin(\sin(x)) = x$

si $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \Longrightarrow -x \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}] \Longrightarrow \pi - x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\sin(x) = \sin(\pi - x) \Longrightarrow Arc\sin(\sin(x)) = Arc\sin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$

$\Longrightarrow Arc\sin(\sin(x)) = \pi - x$. **2)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Arc\cos(x) + Arc\sin(x) = \frac{\pi}{2}$.

Soit $g(x) = Arc\cos(\cos(x))$ On a : $D_g = \mathbb{R}$ g est une fonction paire $g(-x) = g(x)$. g est p'er

$-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow \forall x \in [-1, 1], \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \in [0, \pi]$

$\Rightarrow \forall x \in [-1, 1], \cos(\frac{\pi}{2} - Arc\sin(x)) = \sin(Arc\sin(x)) = x$

$\Rightarrow \forall x \in [-1, 1], Arc\cos(\cos(\frac{\pi}{2} - Arc\sin(x))) = \frac{\pi}{2} - Arc\sin(x) = Arc\cos(x)$

$\Rightarrow \forall x \in [-1, 1], Arc\cos(x) = \frac{\pi}{2} - Arc\sin(x)$.

4) La fonction réciproque de $tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

La restriction à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction $y = tg(x)$ est une fonction continue et strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, notée $Arctg(x)$

$$tg :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow]-\infty, +\infty[$$
$$Arctg(x) :]-\infty, +\infty[\longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$
$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} tg(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} tg(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} tg(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} tg(x) = +\infty$$

$$x = Arctg(y) \quad -\infty \le y \le +\infty \ (y \in \mathbb{R}) \Longleftrightarrow y = tg(x) \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Propriétés : 1) $y = Arctg(x)$ est une fonction impaire 2) et $Arctg'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

3) $Arctg(x) + Arctg(\frac{1}{x}) = \varepsilon\frac{\pi}{2}$ $\quad \varepsilon = 1$ si $x > 0$, $\varepsilon = -1$ si $x > 0$

Preuve: 1) parité : $-y = -tg(-x)$ avec $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow Arctg(-x) = -y$

2) $x > 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} > 0 \Longrightarrow Arctg(\frac{1}{x}) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $tg(x) \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$\Longrightarrow \frac{\pi}{2} - Arctg(\frac{1}{x}) \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$tg(Arctg(x)) = x \quad tg(\frac{\pi}{2} - Arctg(\frac{1}{x})) = \cot g(Arctg(\frac{1}{x})) = \frac{1}{tg(Arctg(\frac{1}{x}))} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

d'où

$$tg\left(\frac{\pi}{2} - Arctg\left(\frac{1}{x}\right)\right) = tg\,(Ar\,ctg\,(x)) \Longrightarrow \frac{\pi}{2} - Arctg\left(\frac{1}{x}\right) = Ar\,ctg\,(x)$$

donc $Ar\,ctg\,(x) + Ar\,tg\,\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ si $x>0$.

Si $x<0$ alors $-x>0$ $Arctg(-x) + Arctg\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

$$\Longrightarrow -Ar\,ctg\,(x) - Ar\,ctg\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$
$$\Longrightarrow Ar\,ctg\,(x) + Ar\,ctg\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

1.8 Fonctions hyperboliques

1.8.1 Définitions

Les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique notées respectivement ch, sh et th sont définies pour $x \in \mathrm{IR}$ par :

$$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

ch est la *partie paire* de l'exponentielle, sh en est la *partie impaire*. La fonction th est une fonction impaire . $\forall x \in \mathrm{IR}$, $\mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x = e^x$, $\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x = e^{-x}$. On obtient ainsi l'identité fondamentale :

$$\boxed{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1}$$

Les fonctions ch, sh et th sont indéfiniment dérivables sur IR et:

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{IR}, \ (\mathrm{sh})'(x) = \mathrm{ch}x, \ (\mathrm{ch})'(x) = \mathrm{sh}\,x, \ (\mathrm{th})'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^2 x}$$

Les limites à l'infini sont:

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}x = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}\,x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}x = 1$$

On retiendra aussi:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{ch}x}{\frac{e^x}{2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{sh}x}{\frac{e^x}{2}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}\,x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{th}x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{ch}x - 1}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

Le nom de *fonctions hyperboliques* est justifié par le fait que

$(x = \mathrm{ch}t, y = \mathrm{sh}t)$ est un paramétrage de la branche d'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$

1.8.2 Fonction réciproque

1. La fonction sinus hyperbolique est définie strictement croissante et continue sur IR , c'e
donc une application bijective de IR dans IR. Elle admet donc une fonction réciproque, continue et strictement croissante sur IR que l'on note argsh:

$$y = \text{argsh}(x) \Leftrightarrow x = \text{sh}(y) = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

La fonction argsh est dérivable et on a d'après la dérivée de la fonction réciproque

$$\forall x \in \text{IR} \quad \text{argsh}'(x) = \frac{1}{\text{sh}'(y)} = \frac{1}{\text{ch}(y)} = \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2(y)+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

La fonction argsh est donc strictement croissante sur IR d'apres la formule de argsh

$$^2)$$

ou directement : $y = \text{argsh}(x) \Leftrightarrow x = \text{sh}(y)$

or $e^{y} = \text{ch}(y) + \text{sh}(y)$ donc $y = \ln(\text{ch}(y) + \text{sh}(y)) = \ln(\sqrt{\text{sh}^2(y) + 1} + \text{sh}(y)) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

2. Sur $[0; +\infty[$, la fonction cosinus hyperbolique est définie strictement croissante e
tinue et à valeur dans $[1; +\infty[$, la restriction à l'intervalle $[0; +\infty[$ de la fonction
hyperbolique est une application bijective de $[0; +\infty[$ dans $[1; +\infty[$. Elle admet do
fonction réciproque, continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ que l'on note

$$y = \text{argch}(x) \Leftrightarrow x = \text{ch}(y) = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}$$

La fonction argch est dérivable et on a d'après la dérivée de la fonction réciproque

$$\forall x \in [1;+\infty[\quad \text{argch}'(x) = \frac{1}{\text{ch}'(y)} = \frac{1}{\text{sh}(y)} = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}^2(y) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

La fonction argsh est donc strictement croissante sur $[1; +\infty[$ d'apres la formule de

$$^2 - 1)$$

ou directement : $y = \text{argch}(x) \Leftrightarrow x = \text{ch}(y)$

or $e^{y} = \text{ch}(y) + \text{sh}(y)$ donc $y = \ln(\text{ch}(y) + \text{sh}(y)) = \ln(\text{ch}(y) + \sqrt{\text{ch}^2(y) - 1}) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

3. La fonction tangente hyperb olique est d́efinie strictement croissante et continue sur , c'e
donc une application bijective de IR dans] − 1, 1[. Elle admet donc une fonction ŕeciproque,
continue et strictement croissante sur] − 1, 1[que l'on note argth:

$$y = \operatorname{argth}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{th}(y)$$

La fonction argth est d́erivable et on a d'apres la d́eriv́ee de la fonction ŕeciproque
$\forall x \in]-1,1[$ argth(x)

$$= \frac{1}{(\operatorname{th}(y))} = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2(y)} = \frac{1}{1-x^2}$$

La fonction argth est donc strictement croissante sur $]-1;1[$ puisque $1-x^2 > 0$ sur $]-1;1[$ d'apres la formule de argch(x) on peut par integration montrer que

$$\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

ou directement : $y = \operatorname{argth}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{th}(y) = \dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

donc $xe^{2y} + x = e^{2y} - 1$ et $e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$

$$2y = \ln\frac{1+x}{1-x}$$

d'ou $y = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

1.8.3 Formulaire

a, b, p, q, x d́esignent des ŕeels.

Addition 1. $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}a.\operatorname{ch}$

$\operatorname{th}a.\operatorname{th}b$

Duplication 1. $\operatorname{ch}2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$

2. $\operatorname{sh}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch}2x - 1}{2}$ et $\operatorname{ch}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch}2x+1}{2}$

3. $\operatorname{sh}2x = 2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x$ 4. $\operatorname{th}2x = \dfrac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2 x}$

Si on pose $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$ alors:

$$\operatorname{ch}x = \frac{1+t^2}{1-t^2},\ \operatorname{sh}x = \frac{2t}{1-t^2},\ \operatorname{th}x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Transformation de produit en somme

1. $\mathrm{ch}\, a.\mathrm{ch} b = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(a+b) + \mathrm{ch}(a-b))$
2. $\mathrm{sh}\, a.\mathrm{sh} b = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(a+b) - \mathrm{ch}(a-b))$
3. $\mathrm{sh} a.\mathrm{ch} b = \frac{1}{2}(\mathrm{sh}(a+b) + \mathrm{sh}(a-b))$

Transformation de somme en pro duit

1. $\mathrm{ch} p + \mathrm{ch} q = 2\mathrm{ch}\frac{p+q}{2}\mathrm{ch}\frac{p-q}{2}$
2. $\mathrm{ch} p - \mathrm{ch} q = 2\mathrm{sh}\frac{p+q}{2}\mathrm{sh}\frac{p-q}{2}$
3. $\mathrm{sh} p + \mathrm{sh} q = 2\mathrm{sh}\frac{p+q}{2}\mathrm{ch}\frac{p-q}{2}$
4. $\mathrm{th} p + \mathrm{th} q = \frac{\mathrm{sh}(p+q)}{\mathrm{ch} p.\mathrm{ch} q}$