Concours IAE Message
Exercices Supplémentaires

Ces exercices, proposés par trois étudiants (Charlotte Galimard, Chloé Monnier **et Pierre Baron) sont extraits du test** proposé sur le site ou les annales **de l'IAE ou envoyés par mail aux étudiants préparant le test, suite aux coquilles sur** les précédents.

1. En travaillant ensemble, Nicolas et Claude mettent 80 minutes pour rédiger un disc**ours. L**orsque Claude le rédige seul, il met 2h00.
   En combien de temps, Nicolas **rédige t**-il un discours seul?
   a. 2 heures et 30 minutes
   b. 3 heures
   c. 3 heures et 30 minutes
   d. 4 heures
   e. 4 heures et 30 minutes

Les maths qui sont derrière :

~~Solution :~~
La difficulté est ici que l'on est amené à comparer le travail fait par deux personnes en même temps (Nicolas et Claude) et le même travail fait par une seule personne (Nicolas ou Claude).
Il faut donc essayer de se ramener à **une seule situation : ils travaillent ensemble**.

La technique à employer ici est la technique « E » (essai), **à condition de bien voir quel calcul faire….**

Testons la réponse centrale c., Nicolas rédige un discours seul en 3 heures et 30 minutes.

Imaginons que Nicolas et Claude **travaillent à deux pendant 3 h 30 min**.
Pendant cette durée, Nicolas fait le travail une fois et Claude, qui n'a besoin que de 2h, le fait **1,75 fois (3 h 30, c'est** 2 h + 1 h 30, c'est-à-dire 2 h + ¾ de 2 h).
Bref, à eux deux, en 3 h 30, soit 210 min, ils font 2,75 fois le travail.

Donc, pour le faire une fois, ils ont besoin de $\frac{210}{2{,}75} \approx 76{,}4$ min, alors que le texte dit qu'il leur faut 80 min.

Le résultat proposé par la réponse c. est donc trop petit.

On recommence avec la réponse d., Nicolas rédige un discours seul en 4 heures.

En 4 h, soit 240 min, Nicolas fait le travail une fois et Claude deux fois, soit trois fois à eux deux.

Donc, pour le faire une **fois, ils ont besoin de** $\frac{240}{3} \approx 80$ min. C'est la bonne réponse.

2. Un train roule de Lille vers Paris. Il part de Lille à 11 h **00 en roulant à 200km/h. Un autre train part de Paris vers** Lille à 12 h **00 en roulant à 180km/h**. La distance entre paris et Lille est de 220 km.
   A quelle distance de Paris, **arrondie** au 1/10 le plus proche, les 2 trains vont-**ils se croiser** ?
   a. 9,50 km
   b. 10,5 km
   c. 18 km
   d. 18,5 km
   e. 22 km

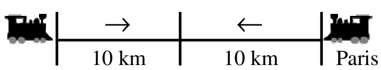
Les maths qui sont derrière :
, distance parcourue pendant un temps t par un véhicule roulant à une vitesse v.

~~Solution :~~
Un peu comme dans l'exercice précédent, la difficulté tiens au fait qu'il faut comparer les déplacements de deux trains qui ne sont pas partis à la même heure.
On va là encore se ramener à **une seule situation : ils sont partis à la même heure**.

Imaginons qu'ils sont partis à midi.
A cette heure là, le premier train a déjà parcouru 200 km. Le problème devient donc maintenant :

*Un train roule de Lille vers Paris. **A 12 h, il est à 20 km de Paris. Un autre train part de Paris vers Lille à 12** h en roulant à 180km/h. A quelle distance de Paris, **arrondie** au 1/10 le plus proche, les 2 trains vont-**ils se croiser** ?*

Petit schéma :



A partir de là, on a deux méthodes envisageables, « D » ou « E ».

Méthode « D » : on nomme t **le temps (en heure) pendant lequel les deux trains** vont encore rouler.
Au bout de ce temps t, **le premier train a parcouru** $d = vt = 200t$ et se trouve donc à $20 - 200t$ km de Paris.

Le second train a parcouru $d = vt = 180t$ et se trouve donc à $180t$ km de Paris.

Quand ils se croisent, on a $180t = 20 - 200t \Leftrightarrow 380t = 20 \Leftrightarrow t \; \frac{20}{180} = \frac{1}{19}$.

Alors, le second train a parcouru $d = vt = 180 \times \frac{1}{19} = \frac{180}{19} \approx 9{,}5$. La bonne réponse est la a..

Méthode « E » : plus efficace ici, puisqu'évitant la division, à faire, on ne le dira jamais assez, sans calculatrice…..
Ce n'est pas en fait une véritable méthode par essais, mais plutôt par éliminations.
Le premier train roule plus vite que le second, donc, par rapport aux 20 km à parcourir (voir le schéma), ils se rencontreront plus près de Paris que du lieu de « départ » du premier train, c'est-à-dire à une distance de Paris inférieure à 10 km. Seule la réponse a. convient donc… (trop facile).

3. Soit X une variable suivant une loi binomiale $\mathrm{B}(10;0{,}3)$ ($n = 10$; $p = 0{,}3$) . Alors $P(X = 5) =$

a. $P(X = 4) \times \frac{18}{35}$

b. $P(X = 4) \times \frac{35}{18}$

c. $P(X = 4) \times \frac{3}{7}$

d. $P(X = 4) \times \frac{7}{3}$

e. $P(X = -4) \times \frac{7}{3}$

> Les maths qui sont derrière :
> Loi de $\mathrm{B}(n,p)$: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

~~Solution :~~
On peut déjà éliminer la réponse e., k étant le nombre de « réussites » au cours de l'épreuve et devant donc être positif.
On est alors amené à comparer $P(X = 5)$ avec $P(X = 4)$.

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} 0{,}3^4 \times 0{,}7^6 \text{ avec } \binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2}.$$

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} 0{,}3^5 \times 0{,}7^5 \text{ avec } \binom{10}{5} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = \binom{10}{4} \times \frac{6}{5}.$$

Donc, $P(X = 5) = P(X = 4) \times \frac{6}{5} \times 0{,}3 \div 0{,}7 = P(X = 4) \times \frac{6}{5} \times \frac{0{,}3}{0{,}7} = P(X = 4) \times \frac{6}{5} \times \frac{3}{7} = P(X = 4) \times \frac{18}{35}$: réponse a..

4. On dispose de deux séries statistiques $x = (x_1; x_2; \ldots x_{10})$ et $y = (y_1; y_2; \ldots y_{10})$.
On constate que la moyenne arithmétique de y vaut 5/4 et que la droite d'ajustement de y sur x par la méthode des moindres carrés ordinaires a pour équation $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.
Alors la moyenne arithmétique de la série x est égale a? :

a. 1
b. 5/4
c. 9/16
d. 1/2
e. 10/2

> Les maths qui sont derrière :
> La droite d'ajustement affine passe par le point moyen des deux séries.

~~Solution :~~
On sait que la droite d'ajustement affine passe par le point de coordonnées $(\bar{x}; \bar{y})$ où $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont respectivement la moyenne arithmétique de la série x et celle de y.
On a donc $\bar{y} = \frac{3}{4}\bar{x} + \frac{1}{2}$ et on sait que $\bar{y} = \frac{5}{4}$.
On peut alors utiliser la méthode « D » (résolution d'équation) ou « E » (essais) et on trouve que $\bar{x} = 1$,c'est-à-dire la réponse a., contrairement à la solution proposée par les concepteurs de l'exercice…..

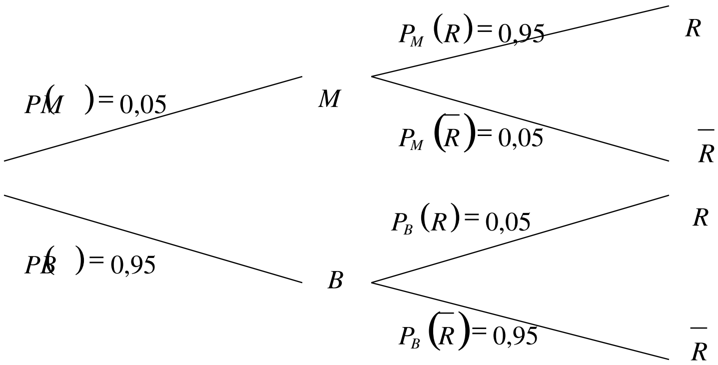
5. D'après les informations qui lui sont parvenues de ses clients sur une longue période, une entreprise conclut que 5% des joints qu'elle fabrique sont de mauvaise qualité et que 95% d'entre eux sont de bonne qualité.
Par ailleurs, avant d'être vendus par l'entreprise, les joints subissent un test de qualité dans son usine et ceux qui sont rejetés par le test sont éliminés.
Ce test permet à l'entreprise de se débarrasser de 95% des joints défectueux, cependant, 5% des joints de bonne qualité sont quand même rejetés par lui et ne sont donc pas commercialisés.
La probabilité qu'un joint rejeté par le test soit réellement défectueux vaut:

a. 95%
b. 5%
c. 50%
d. 25%
e. 40%"

> Les maths qui sont derrière :
> Probabilités conditionnelles : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
> Formule des probabilités totales.

~~Solution :~~

On peut représenter cette situation à l'aide d'un arbre dans lequel on note M l'événement « le joint est de mauvaise qualité », B l'événement « le joint est de bonne qualité » et R l'événement « le joint est rejeté ».



La question revient à chercher $P_R(M)$, probabilité qu'un joint soit de mauvaise qualité sachant qu'il a été rejeté.

On sait que $P_R(M) = \dfrac{P(M \cap R)}{P(R)}$.

Calcul de $P(M \cap R)$: $P(M \cap R) = P(M) \times P_M(R) = 0,05 \times 0,95$. On n'est pas obligé de faire le calcul……

Calcul de $P(R)$ par les probabilités totales :

$P(R) = P(M \cap R) + P(B \cap R) = P(M) \times P_M(R) + P(B) \times P_B(R) = 0,05 \times 0,95 + 0,95 \times 0,05 = 2 \times 0,95 \times 0,05$. Idem.

$P_R(M) = \dfrac{P(M \cap R)}{P(R)} = \dfrac{\cancel{0,05} \times \cancel{0,95}}{2 \times \cancel{0,95} \times \cancel{0,05}} = \dfrac{1}{2} = 0,5$, soit 50% : réponse c..

On peut aussi fabriquer un cas particulier avec, par exemple, 2000 joints.
5% sont de mauvaise qualité, soit 100 joints : 95% sont rejetés, soit 95 joints.
5% passent le contrôle, soit 5 joints.
95% sont de bonne qualité, soit 1900 joints : 5% sont rejetés, soit 95 joints.
95% passent le contrôle, soit 1805 joints.
On voit qu'il y a autant de joints rejetés parmi les mauvais que parmi les bons, soit 50%...