THÉORIE DE PORTEFEUILLE

THÉORIE DE PORTEFEUILLE

PLAN DU COURS

I - MESURE DU RENDEMENT

1.1- Rendement d'un titre pour une période donnée

Le rendement périodique d'un titre R_t est donné par l'équation suivante :

$$R_t = \frac{(P_t - P_{t-1}) + D_t}{P_{t-1}}$$

Avec :

P_t : Prix du titre à la fin de la période t ;

P_{t-1} : Prix du titre au début de la période t ;

D_t : Dividende (action) ou intérêt (obligation) reçu pendant période t ;

1.2 - Mesure du rendement moyen d'un titre sur n périodes

Le rendement moyen d'un titre sur n périodes se calcul en utilisant la moyenne arithmétique ou la moyenne géométrique.

a. Le rendement arithmétique moyen $\bar{R}$ est :

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \ldots + R_n}{n} = \frac{\sum_{t=1}^{n} R_t}{n}$$

Avec :

R_t : Rendement du titre au cours de la période t ;

n : nombre de périodes considérées.

b. Le rendement géométrique moyen $\bar{R}_g$ est :

$$\bar{R}_g = \left[(1+R_1)(1+R_2)\ldots(1+R_n)\right]^{\frac{1}{n}} - 1 = \left[\prod_{t=1}^{n}(1+R_t)\right]^{\frac{1}{n}} - 1$$

Avec :

R_t : Rendement du titre au cours de la période t ;

n : nombre de périodes considérées.

Remarques :

La moyenne arithmétique est utilisée pour estimer le rendement espéré d'un titre à l'aide des données historiques et pour calculer la variance et l'écart-type ;

La moyenne géométrique est utilisée pour le mesure de la performance.

I - MESURE DU RENDEMENT

1.3 - Rendement espéré d'un titre

le rendement espéré d'un titre peut être calculé à partir :

- Des probabilités subjectives par rapport au rendements possibles ;
- Des rendements historiques.

a. Calcul du Rendement espéré à partir des probabilités subjectives

Le rendement espéré d'un titre est la moyenne pondérée des différents rendements possibles :

$$E(R) = P_1 R_1 + P_2 R_2 + \ldots + P_n R_n = \sum_{k=1}^{n} P_k R_k$$

Avec :

R_k : Rendement possible ;

P_k : Probabilité de réalisation du rendement R_k ;

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = 1$$

I - MESURE DU RENDEMENT

b. Calcul du Rendement espéré à partir des rendements historiques

Le rendement espéré d'un titre est la moyenne arithmétique des rendements réalisés au cours des périodes précédentes :

$$E(R) = \bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \ldots + R_n}{n} = \frac{\sum_{t=1}^{n} R_t}{n}$$

NB : on travail généralement avec les rendements mensuels sur une période de 5 ans.

I - MESURE DU RENDEMENT

1.4 - Rendement espéré d'un portefeuille

Le rendement espéré d'un portefeuille(**$E(R_p)$**) est égal à la moyenne pondérée des rendements espérés des titres qui le composent :

$$E(R_p) = x_1 E(R_1) + x_2 E(R_2) + \ldots + x_n E(R_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i)$$

Avec :

x_i : Proportion des fonds investis dans le titre i ;

n : Nombre de titres inclus dans le portefeuille ;

$E(R_i)$: Rendement espéré du titre i ;

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

II - MESURE DE RISQUE

2.1 – Définition

Le risque d'un titre est la probabilité que le rendement réel de ce titre s'écarte du rendement espéré.

Plus l'éventail des rendements possibles d'un titre est large, plus le risque du titre est élevé.

2.2 – Mesure du risque d'un titre

Pour mesurer le risque d'un titre, en utilise généralement l'écart-type (ou la variance).

II - MESURE DE RISQUE

a. Calcul du de la variance du rendement d'un titre à partir des probabilités subjectives

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(R) &= \sigma^2(R)\\ &= P_1\left[R_1 - E(R)\right]^2 + P_2\left[R_2 - E(R)\right]^2 + \ldots + P_n\left[R_n - E(R)\right]^2\\ &= \sum_{k=1}^{n} P_k\left[R_k - E(R)\right]^2\end{aligned}$$

Avec :

R_k : Rendement possible ;

P_k : Probabilité de réalisation du rendement R_k ;

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = 1$$

b. Calcul du de la variance du rendement d'un titre à partir des rendements historiques

Si l'on dispose des rendements historiques d'un titre donné, alors:

$$\mathrm{Var}(R) = \sigma^2(R)$$

$$= \frac{(R_1 - \bar{R})^2 + (R_2 - \bar{R})^2 + \ldots + (R_n - \bar{R})^2}{n-1}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{(R_t - \bar{R})^2}{n-1}$$

2.3 – Mesure du risque d’un portefeuille

Dans le calcul du risque d’un portefeuille, on doit tenir compte :

- De la variabilité du rendement de chaque titre : la variance $Var(R_i)$;
- Et du degré de dépendance existant entre les rendements des différents titres : la covariance $Cov(R_i,R_j)$.

2.3.1 - Notion de covariance

La covariance entre les taux de rendement de deux titres et une mesure absolue du degré d'association entre leurs rendements.

La covariance peut être :

- **Positive** : les taux de rendement des deux titres ont tendance à varier dans le même sens ;
- **Négative** : les taux de rendement des deux titres ont tendance à varier en sens contraire ;
- **Nulle** : les taux de rendement des deux titres varient indépendamment l'un de l'autre.

NB : dans le cas des actions ,la covariance est souvent positive.

II - MESURE DE RISQUE

a. Calcul de la covariance entre les rendements de deux titres i et j à partir du probabilités subjectives

$$\mathrm{Cov}(R_i, R_j) = P_1\left[R_{i1} - E(R_i)\right]\left[R_{j1} - E(R_j)\right]$$

$$+P_2\left[R_{i2} - E(R_i)\right]\left[R_{j2} - E(R_j)\right]$$

$$+\ldots + P_k\left[R_{ik} - E(R_i)\right]\left[R_{jk} - E(R_j)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P_k\left[R_{ik} - E(R_i)\right]\left[R_{jk} - E(R_j)\right]$$

Avec :

R_{ik} : Rendement du titre i étant donné la conjoncture k ;

R_{ik} : Rendement du titre j étant donné la conjoncture k ;

P_k : Probabilité de réalisation de la conjoncture k.

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = 1$$

b. Calcul de la covariance entre les rendements de deux titres i et j à partir des rendements historiques

$$\mathrm{Cov}(R_i, R_j) = \sum_{t=1}^{n} \frac{(R_{it} - \bar{R}_i)(R_{jt} - \bar{R}_j)}{n-1}$$

2.3.2 - Coefficient de corrélation linéaire

Le coefficient de corrélation $\rho(R_i,R_j)$ permet de mesurer l'ampleur de dépendance entre les rendements de deux titres i et j.

Le coefficient de corrélation varient entre -1 et +1, ainsi lorsque :

- Il existe une liaison positive parfaite entre les mouvements des taux de rendements des titres i et j, alors : $\rho(Ri,Rj) = +1$;
- Il existe une liaison négative parfaite entre les mouvements des taux de rendements des titres i et j, alors : $\rho(Ri,Rj) = -1$;
- Les mouvements des taux de rendements des titres i et j sont indépendants, alors : $\rho(Ri,Rj) = 0$.

$$\rho(R_i,R_j) = \frac{Cov(R_i,R_j)}{\sigma(R_i)\sigma(R_j)}$$

2.3.3 – Risque d'un portefeuille composé de deux titres

La variance (risque) du taux de rendement d'un portefeuille composé de deux titres i et j est égale :

$$\begin{aligned} Var(R_p) &= x_i^2 Var(R_i) + x_j^2 Var(R_j) + 2x_i x_j Cov(R_i, R_j) \\ &= x_i^2 Var(R_i) + x_j^2 Var(R_j) + 2x_i x_j \sigma(R_i)\sigma(R_j)\rho(R_i, R_j) \end{aligned}$$

II - MESURE DE RISQUE

2.3.4 – Risque d'un portefeuille composé de n titres

La variance (risque) du taux de rendement d'un portefeuille composé de deux titres i et j est égale :

$$Var(R_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 Var(R_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i x_j Cov(R_i, R_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j Cov(R_i, R_j)$$

NB : la variance d'un portefeuille de n titres est composée de :

- n termes de variances pondérées ;
- Et n(n-1) termes de covariances pondérées.