Plan

Introduction

L'importance des marchés financiers n'a cessé de croître depuis maintenant plus de trente ans. Ce phénomène est étroitement lié à la déréglementation de l'économie amorcée depuis le début des années 70, via notamment l'apparition des taux de change flottants. Cette expansion n'aurait pu avoir lieu sans le développement en parallèle d'une industrie du « risque financier» : de nombreux contrats d'assurance viennent au secours des industriels, Etats, investisseurs, pour protéger leur activité ou leurs investissements contre des mouvements contraires du marché. Le plus classique est l'option, qui permet d'acheter ou de vendre à une date donnée à un cours garanti. En 1973, Black, Scholes et Merton énoncent un principe fort : pour couvrir un risque dans le futur (un an), il suffit de couvrir au jour le jour un risque « infinitésimal ».

Effectivement, publié en 1973, le modèle de Black & Scholes est devenu la référence en termes de modèle d'évaluation des produits dérivés. Il utilisé en finance afin d'estimer en la valeur théorique d'une option financière (call ou put), de type européenne. Ce modèle a eu un impact majeur sur les méthodes utilisées par les traders, tant vis-à-vis de l'évaluation du prix des options que dans l'élaboration de technique de couverture. Ce modèle constitue le point de départ de l'essor de l'ingénierie financière en la matière, effectivement on témoigné l'apparition du modèle binomial (ou modèle CRR du nom de ses auteurs) puisque il a été proposé pour la première fois par Cox, Ross et Rubinstein (1979). Le modèle est un modèle discret pour la dynamique du sous-jacent. Il présente l'avantage d'une grande simplicité et conduit au modèle en temps continu de Black & Scholes quand il est étendu à un nombre infini de périodes.

Dans ce travail l'objectif serait de savoir comment se détermine la valeur de l'option dans le cadre du modèle en temps continu (de Black et Scholes), et celui en temps discret (de Cox, Ross et Rubinstein) ?

Et pour y parvenir, on va d'abord présenter dans une première partie les types et les caractéristiques des options, leur valeur, et les déterminants de leur prix, puis dans une deuxième partie on va avancer le modèle de Black & Scholes, et ses extensions, et finalement on va aborder dans une troisième partie le modèle binomial.

I. Les options : concepts et généralités

- **Les options : définition, caractéristiques et fonctionnement**

Les options sont des contrats qui donnent le droit à leur acheteur **d'acheter ou de vedre** une **quantité** déterminée, moyennant une **prime**, de **l'actif sous-jacent** à un **prix spécifique**, pendant une **période donnée** ou à **une date donnée**.

L'option permet premièrement de fixer aujourd'hui les modalités à remplir pour une transaction future, les deux parties auront donc l'une le droit l'autre l'obligation d'effectuer la transaction. En deuxième lieu, elle permet de transférer sur autrui les aléas futurs (la fluctuation des cours, des taux d'intérêt, etc …).

A partir de cette définition, on peut dégager les six caractéristiques suivantes :

- prix d'exercice (strike)

- l'actif sous-jacent

- la quantité de l'actif sous-jacent

- la nature de l'option (call ou put)

- la date ou la période d'exercice

- le prix de l'option (la prime)

Le prix d'exercice, c'est le prix auquel peut être acheté ou vendu l'actif sous-jacent. C'est-à-dire le prix du sous-jacent sur lequel les deux parties sont mis d'accord au moment de conclusion du contrat. On l'appel aussi strike.

Les contrats d'options portent sur une multitude de sous jacents qui peuvent être un actif financier (action, obligation, bon du trésor, contrat à terme, devise, indice boursier, …) ou un actif physique (matière première agricole ou minérale, …).

Lors de la conclusion du contrat, la quantité de l'actif sous-jacent doit être bien déterminée. Ainsi pour les actifs financiers, il faut mentionner le nombre d'actif ou le montant de base (50 actions de la société X, 1 000 000 $, …). Quant aux actifs physiques, on parle par exemple de baril pour le pétrole et de tonne pour le blé.

Concernant la nature de l'option, généralement on distingue entre option d'achat (ou call) et option de vente (ou put). Donc lors de la conclusion du contrat, il faut déterminer la position de chacune des deux parties.

Pour chaque option il existe une date de maturité. Si le détenteur de l'option a le droit d'exercer son option pendant toute la durée de l'option, on parle d'option américaine (période d'exercice). Si le détenteur de l'option n'a pas le droit de l'exercer qu'à une date bien déterminée, on parle d'option européenne (date d'exercice).

Le droit de vendre ou d'acheter un actif sous-jacent a un prix prédéterminé a un coût, l'acheteur d'une option doit ainsi payer un montant défini (la prime ou premium) pour entrer en possession de l'option. Elle est bien sûr versée par l'acheteur au vendeur qui trouve ainsi une compensation financière à une situation dans laquelle il a toutes les obligations et aucun droit.

La valeur de l'option dépend de plusieurs facteurs déterminants : la valeur actuelle du sous-jacent, le temps qui reste à l'option avant son échéance (exprimé en années), le prix d'exercice fixé par l'option, le taux d'intérêt sans risque et la volatilité du prix de l'action. Il existe des modèles économétriques qui permettent de déterminer la valeur de l'option (modèle de Black et Scholes, modèle de Garman et Kohlhagen, modèle de Black-Scholes-Merton, …)

- ***le fonctionnement des options***

Il existe deux mécanismes d'option : les options d'achat (appelées "Call") et les options de vente (appelées "Put"). Un call est un contrat qui donne à son acheteur le droit d'acheter le sous-jacent au prix d'exercice fixé pendant une période de temps donnée. Un put est un contrat qui donne le droit à son acheteur de vendre l'actif sous-jacent au prix d'exercice pendant une période donnée.

On peut dire que l'option d'achat s'analyse juridiquement comme une promesse de vente (un engagement de vendre), accordée par le vendeur de l'option d'achat à l'acheteur de cette option. Alors que l'option de vente s'analyse comme une promesse d'achat (un engagement d'acheter), accordée par le vendeur de l'option de vente à l'acheteur de cette option.

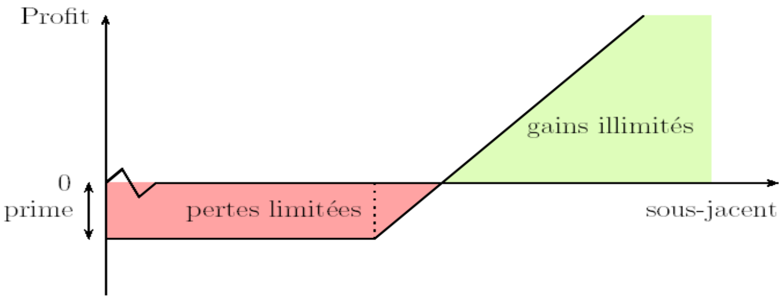
Call et Put sont indépendants ; avec l'option on a toujours quatre cas de figure : acheteur de call (obtient un droit d'achat), émetteur de call (s'engage à livrer), acheteur de put (obtient un droit de vente), émetteur de put (s'engage à acheter).

On distingue en outre l'émetteur du vendeur : un vendeur pouvant être un acheteur qui clôture sa position en la vendant à un autre acheteur. La position disparaît effectivement quand l'émetteur rachète son option.

Enfin, l'émetteur d'une option sur un marché organisé devra logiquement verser un dépôt de garantie à la chambre de compensation et, en cas de perte, verser un appel de marge.

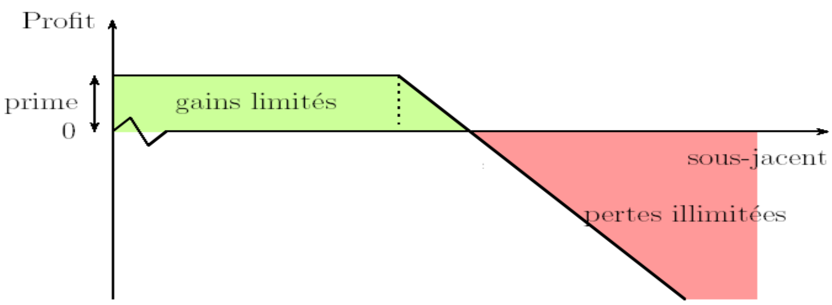
Avec l'option, l'acheteur a le choix de se rétracter (le sous-jacent est facultatif et pas effectif comme avec les futures ou les forwards); par contre, l'émetteur à l'obligation de suivre l'acheteur (on dira qu'il a l'obligation d'exercer). Le vendeur de l'option est obligé de vendre ou d'acheter l'actif sous-jacent si l'acheteur de l'option décide d'exercer son droit d'acheter ou de vendre. Cette caractéristique des contrats optionnels est primordiale : l'acheteur de l'option n'est jamais contraint d'exercer celle-ci, il peut décider de laisser l'option expirer sans l'exercer. De façon asymétrique, le vendeur de l'option n'a pas le choix, il doit acheter ou vendre l'actif sous-jacent si l'acheteur de l'option le désire.

A l'échéance de l'option, on peut schématiser les pertes et les profits de l'acheteur et du vendeur de l'option de la façon suivante :



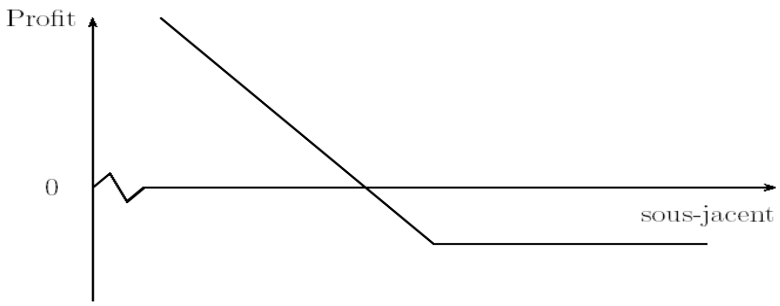
Acheteur d'une option d'achat

L'acheteur d' call anticipe que le prix du sous-jacent va augmenter. S'il se trompe, il fera une perte limitée à la prime payée. S'il a raison, il va obtenir un gain non limitée.



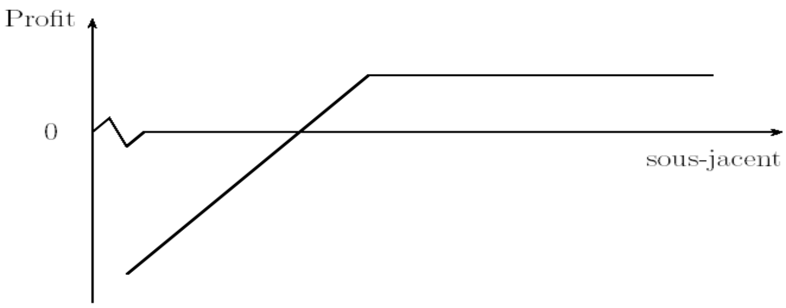
Vendeur d'une option d'achat

Le vendeur de call anticipe que le prix du sous-jacent va peu ou pas augmenter. S'il se trompe, il fera une perte non limitée. S'il a raison, il a obtenu un gain limité à la prime encaissée.



Acheteur d’une option de vente

Un acheteur de put anticipe que le prix du sous-jacent va baisser. S'il se trompe, sa perte est limitée à la prime payée.



Vendeur d’une option de vente

Un vendeur de put anticipe que le prix du sous-jacent va augmenter, ou qu'il va peu baisser. S'il se trompe, il encourt une perte non limitée ; s'il a raison, il perçoit un gain limité à la prime perçue.

Ces schémas mettent en évidence **l'asymétrie du risque** : l'acheteur de l'option a une perte limitée au montant de la prime et un profit quasi illimité tandis que le vendeur a un gain limité et une perte potentiellement quasi illimitée.

2. Les types et les principaux marchés d'options

➢ *Les types d'options*

Il existe l'option européenne, l'option américaine et l'option asiatique. Mais ce sont évidemment des noms génériques. Avec les options américaines, le porteur peut exercer à tout moment, alors qu'avec les options européennes, le porteur ne peut exercer qu'à l'échéance. La différence entre les différents types n'a donc évidemment rien à voir avec une quelconque situation géographique relative aux différents continents.

L'option de type asiatique ne concerne quant à elle pas le moment où l'exercice est permis, mais le calcul de son prix. Pour l'américaine et l'européenne, le prix d'exercice est fixe, pour l'asiatique il correspondra à la moyenne du cours du sous-jacent depuis l'émission de l'option jusqu'au jour de son exercice (qui peut donc être aussi bien de type européen qu'américain).

Les options de type asiatique sont essentiellement employées pour des structures sur mesure et donc rarement négociées en Bourse (donc sur le marché de gré à gré, hors bourse, et pas sur le marché organisé).

1- option européenne

Les options européennes, sont uniquement exercées à la date d'échéance. Autrement dit, l'acheteur (option d'achat ou de vente) de l'option ne peut l'exercer qu'à maturité. Lorsqu'il s'agit d'une option européenne on parle de date d'exercice.

Exemple

Si monsieur X vend à monsieur Y une option d'achat sur l'action ONA à 1625 DH et à échéance 9 mois, monsieur Y aura le droit à l'issue de cette période (option européenne) d'acheter a monsieur X une action ONA au prix de 1625 DH, quel que soit le cours en bourse de l'action ONA à ce moment-la. Monsieur Y n'est pas obligé d'acheter à monsieur X une action ONA, mais si monsieur Y le lui demande, monsieur X est obligé de lui vendre cette action au prix de 1625 DH.

Bien évidemment, monsieur Y n'exercera son option que si le cours d'ONA en bourse dépasse 1625 DH. Dans le cas contraire, monsieur Y préférera acheter l'action ONA en bourse à un prix inférieur à 1625 DH.

2- option américaine

Les options américaines, pouvant être exercées à n'importe quel moment jusqu'à la date d'échéance du contrat. C'est-à-dire que le détenteur n'est pas contraint d'exercer son option à une date précise mais durant toute la période jusqu'à maturité. On parle dans ce cas de période d'exercice.

Exemple

Si monsieur A achète à monsieur B une option de vente sur un million de dollars à 1,1 € l'unité et 6 mois, monsieur A pourra durant 6 mois (option américaine) vendre à monsieur B un million de dollars au prix de 1,1 € par dollar quel que soit le cours du dollar à ce moment-là. Monsieur A n'est pas obligé de vendre les dollars à monsieur B, mais si A le lui demande, B est obligé de les lui acheter au prix convenu.

Bien évidemment, A n'exercera son option que si le cours du dollar est inférieur à 1,1 €.

3- option asiatique

Une option asiatique est un contrat qui promet à son détenteur, un capital à maturité lorsque la moyenne arithmétique des cours du sous-jacent (actions, taux d'intérêt, taux de change...) durant une période déterminée est en dessous ou au dessus d'un certain niveau prédéterminé à l'avance (le strike).

Exemples :

a- Cas d'un call asiatique sur "CAC 40".

Soit un call sur CAC 40 dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Date d'émission : 01/06/06
- Prix du sous-jacent à la date d'émission : 4700 points
- Maturité : 01/06/07
- Prix d'exercice (ou strike) : 4900 point
- Nominal (se qu'on reçoit sur chaque point en dessous du prix d'exercice): 100 €

A la date de maturité, le 01/06/07, on observe l'ensemble des cours de clôture du "CAC 40" pendant toute la durée du contrat. On calcule la moyenne arithmétique (MoyCAC) du "CAC 40" sur la période.

Si la moyenne arithmétique MoyCAC est au dessus du strike (4900 points) et vaut par exemple 4950 points, entre le 01/06/06 et le 01/06/07, le détenteur du contrat reçoit (4950-4900)*100 €, soit 5 000 €.

Si la moyenne arithmétique MoyCAC est en dessous du strike (4900 points) et vaut par exemple 4850 points, entre le 01/06/06 et le 01/06/07, le détenteur du contrat ne reçoit rien.

b- Cas d'un put asiatique sur "Brent".

Les caractéristiques du contrat sont:

- Date d'émission : 01/06/06
- Sous-jacent à la date d'émission : 68 $ le baril
- Maturité : 01/12/06
- Strike : 80 $ le baril
- Nominal : 1000 $

A la date de maturité le 01/12/06, on observe l'ensemble des cours de clôture du baril de "Brent" pendant toute la durée du contrat. On calcule la moyenne arithmétique (MoyBrent) du "Brent" sur la période.

Si la moyenne arithmétique MoyBrent est en dessous du strike (80 $) et vaut par exemple 71 $ le baril, entre le 01/06/06 et le 01/12/06, le détenteur du contrat reçoit (80-71)*1000 $, soit 9 000 $.

Si la moyenne arithmétique MoyBrent est au dessus du strike (80 $) et vaut par exemple 81 $ le baril, entre le 01/06/06 et le 01/12/06, le détenteur du contrat ne reçoit rien.

➢ *B- Les options sur produits financiers et produits physiques*

Les options portent sur des sous-jacents divers, qu'on peut regrouper en deux grandes catégories : les produits financiers (devise, taux d'intérêt, indice boursier, action, …) et les actifs réels ou physiques, c'est-à-dire les marchandises (pétrole, blé, sucre, …).

1 - Options de change

Une option de change (ou sur devise) donne à son détenteur le droit d'acheter (option d'achat) ou de vendre (option de vente) des devises, jusqu'à une certaines échéance, à un cours fixé lors de la souscription de l'option.

Exemple : une entreprise française doit recevoir, dans trois mois, 1 million de $. Elle craint une baisse du dollar et souhaite se couvrir contre ce risque. Elle se porte acquéreur d'options de vente, au prix d'exercice 0,915 (1$ = 0,915 €). La prime est de

0,0196. A ce jour, le cours du dollar au comptant est de 0.920. A l'échéance, le cours du dollar sur le marché au comptant est de :

Hypothèse 1 : 0,923 €.

Hypothèse 2 : 0,905 €.

Dans le cadre de la première hypothèse le cours du dollar augmente. L'entreprise abandonne l'option et vend 1 000 000 $ à 0,923 = 923 000€. Elle paie la prime de 1000000 * 0,0196 = 19600 €.

Pour la deuxième hypothèse, le cours du dollar baisse. L'entreprise exerce l'option et vend à 0,915. Elle encaisse : (1 000 000 * 0,915) – (19 600) = 895 400 €. Elle a vendu le dollar à 0,915 – 0,0196 = 0,8954.

2 – options de taux d'intérêt

Une option de taux d'intérêt donne à son détenteur le droit d'emprunter ou de prêter, à un taux préalablement fixé, un certain montant, pour une durée donnée, moyennant le versement d'une prime.

Les options peuvent porter sur différents actifs sous-jacents. On trouve des produits comme les Caps, les Floors et les Collars qui sont des options sur différences de taux. Ces produits sont des instruments de gré à gré. On peut résumer le principe de fonctionnement de ces instruments dans le tableau suivant :

	Cap	Floor	Collar ou tunnel
Définition	Une option qui permet d'emprunter à un taux d'intérêt plafond (préalablement fixé), moyennant le versement d'une prime	Opération qui permet de prêter à un taux d'intérêt plancher (préalablement fixé), moyennant le versement d'une prime	Comparaison d'un cap et d'un floor : achat d'un cap et vente d'un floor
garantie	porte sur le taux d'intérêt plafond	porte sur le taux d'intérêt plancher	permet d'emprunter ou de prêter dans une fourchette de taux garantie d'un taux à l'intérieur d'une fourchette
avantage	permet de bénéficier d'une baisse des taux d'intérêt.	permet de bénéficier d'une hausse des taux d'intérêt.	
Règlement	Prime annuelle versée chaque début de période. Différence d'intérêt entre le taux variable de référence et le taux plafond fixé par le contrat.	Prime annuelle versée chaque début de période. Différence d'intérêt entre le taux variable de référence et le taux plancher fixé par le contrat.	Prime allège = différence entre la prime d'un cap et la prime d'un floor

Exemple : cap

Une entreprise emprunte 4 millions € au taux variable TAM pour une durée de trois ans. Elle craint une hausse des taux et souhaite tirer parti d'une baisse possible.

Elle achète à sa banque un cap de 4 millions pour une durée de trois ans, au taux plafond de 4,5 %. Taux de référence : TAM. Prime: 0,4 %.

L'entreprise verse chaque début de période la prime soit : 4000000 * 0,4% = 16000.

A l'issue de chaque période annuelle, le taux de référence (TAM) est comparé au taux d'exercice.

- Si TAM >4,5%, l'entreprise reçoit la différence d'intérêt : (TAM – 4,5%) 4 000 000. L'entreprise se garantie u coût d'emprunt maximum égal à : TAM-(TAM – 4,5%) + 0,4 % = 4,9%.

- Si TAM et inférieur ou égal à 4,5%, aucun versement n'a lieu : pas de différence d'intérêt. Ceci permet à l'entreprise de e profiter d'une évolution favorable des taux.

Le coût de l'emprunt est alors de : TAM + 0,4 %. Pour des TAM égaux successivement 5%; 4%; 4,75%, on obtiendra le tableau suivant :

	Début année 1	Fin année 1	Fin année 2	Fin année 3
Hypothèse de TAM		5%	4%	4,75%
Tauxplafond du cap		4,5%	4,5%	4,5%
Position de l'entreprise		Evolution défavorable des taux	Evolution favorable des taux	Evolution défavorable des taux
versements	Prime de 16 000 €	Prime : 16 000 € Différence d'intérêt reçue = (5% - 4,5%) 4 M = 20 000	Prime de 16 000 € Pas de différentiel	Différence d'intérêt reçue = (4,75% - 4,5%) 4 M = 10 000 €

Exemple : Floor

Une entreprise prête 4 millions € au taux variable TAM pour une durée de trois ans. Elle craint une baisse des taux mais souhaite tirer parti d'une hausse possible, Elle achète à sa banque un floor de 4 millions pour une durée de trois ans, au taux plancher de 3,5%.Taux de référence : TAM. Prime : 0,2 %.

Le principe de fonctionnement est identique a celui du cap. Prime = 4 000 000*0,2% = 8000.

Avec des TAM égaux successivement à 3 %, 3,75%, 3,25%, on obtient le tableau suivant :

	Début année 1	Fin année 1	Fin année 2	Fin année 3
Hypothèse de TAM		3%	3,75%	3,25%
Taux plancher du floor		3,5%	3,5%	3,5%
Position de l'entreprise		Evolution défavorable des taux	Evolution favorable des taux	Evolution défavorable des taux
versements	Prime de 8 000 €	Prime : 8 000 € Différence d'intérêt reçue = (3,5% - 3%) 4 M = 20 000 €	Prime de 8 000 € pas de différentiel	Différence d'intérêt reçue = (3,5% - 3,25%) 4 M = 10 000 €

Exemple : Collar

Une entreprise emprunte 4 millions € au taux variable TAM pour une durée de trois ans. Elle s'est fixée pour son emprunt un taux plafond de 5%, moyennant une prime de 0,85%. Elle estime que les taux d'intérêt ne devraient pas descendre en dessous de 4%. Elle achète donc un cap et vend un floor et encaisse une prime de 0,25%.

Prime versée sur le cap : 4000000*0,85% = 34000 €

Prime reçue sur le floor : 4000000*0,25% = 10000 €

soit une prime allégée = 34000 - 10000= 24000

	Début année 1	Fin année 1	Fin année 2	Fin année 3
Hypothèse de TAM		6%	4,5%	3,75%
Taux plafond du cap		5%	5%	5%
Taux plancher du floor		4%	4%	4%
Position de l'entreprise		Evolution défavorable des taux	Evolution favorable des taux	Evolution défavorable des taux
versements	Prime de 24 000 €	Prime : 24 000 € Différence reçue = 40 000 €	Prime de 24 000 € Aucun versement	Différence versée = 10 000 €

Fin année 1 : TAM 6%.

Garantie d'un taux plafond de 5% : la banque verse à l'entreprise la différence d'intérêt = 4 000 000 (6 % - 5 %) = 40000 €

Fin année 2 : TAM =4,5 %

Aucun versement n'est effectue car le TAM est compris dans la fourchette

Fin année 3 TAM = 3,75 %

Garantie d'un taux plancher de 4% : l'entreprise verse à la banque la différence d'intérêt = 4000000 (4 % - 3,75 %) = 10 000 €.

3- option sur indice boursier

Une option sur indices boursiers donne à son détenteur le droit d'acheter (option d'achat) ou de vendre (option de vente) un indice représentatif d'un ensemble de titres cotés sur une place financière.

Exemple

Le 20 juin, un opérateur achète une option d'achat sur indice CAC 40 à court terme, échéance juin, prix d'exercice 4400, prime 154. Envisageant deux hypothèses :

- le cours de l'indice CAC 40 augmente jusqu'à 4600;

- le cours de l'indice CAC40 baisse jusqu'à 4200.

Hypothèse de hausse de l'indice CAC 40	Hypothèse de baisse de l'indice CAC 40
L'acheteur d'une option d'achat anticipe une hausse des cours pour revendre a un cours supérieur à 4400	La hausse n'est pas produite
L'acheteur paie la prime de 154 €	L'acheteur paie la prime de154€
L'option est exercée par l'acheteur ; il encaisse 4600-4400=200€	L'option n'est pas exercée ; il perd la prime
Gain=200-154=46€	Perte = 154€

4- options sur action

Une option sur actions donne à son détenteur le droit d'acheter (option d'achat) ou de vendre (option de vente) un certain nombre d'actions d'une société, à un prix détermine, appelé prix d'exercice. Les options peuvent être traitées soit sur des marchés organises : MONEP, MATIF, soit sur des marchés de gré à gré (cas des warrants).

On distingue entre quatre positions

	Option d’achat (ou call)	Option de vente (ou put)
Acheteur d’une option	Si le cours de l’action augmente : exercice de l’option et encaissement de la plus value. Si le cours de l’action diminue : abandon de l’option et perte de la prime : perte de la prime et encaissement du produit de la vente de l’option. L’acheteur espère une hausse des cours.	Si le cours de l’action diminue : exercice de l’option et encaissement de la plus value. Si le cours de l’action augmente : abandon de l’option et perte de la prime ou vente de l’option. L’acheteur espère une baisse des cours.
Vendeur d’une option	Si le cours de l’action augmente : le vendeur doit vendre au prix d’exercice. Il reçoit la prime. Si le cours de l’action diminue : il encaisse la prime dans tous les cas ; aucune obligation. Le vendeur anticipe une stabilité des cours au-dessous du prix d’exercice.	Si le cours de l’action diminue : le vendeur doit acheter au prix d’exercice. Il reçoit la prime. Si le cours de l’action augmente : il encaisse la prime dans tous les cas ; aucune obligation. Le vendeur anticipe une stabilité des cours au-dessus du prix d’exercice.

Exemple

Mr. Jacques achète en mars une option d'achat ACCOR, échéance Décembre, prix d'exercice 190.6 Euros, prime 22,95 Euros.

Mr. Jaques est acheteur d'une option d'achat : il verse le début mars la prime au vendeur soit : 22,95 * 10 = 229,5 Euros. Un contrat d'option sur actions porte sur une quantité fixe de 10 actions. Il a le droit d'acheter s'il le souhaite 10 actions ACCOR, au prix d'exercice de 190,6 Euros jusqu'à l'échéance de Décembre. Il espère que le cours va augmenter pour revendre les actions ACCOR à un cours supérieur au prix d'exercice.

Première hypothèse :

Le cours de l'action ACCOR, à l'échéance de Décembre, est de 220 Euros. Que doit faire Mr. Jacques ? Mr. Jacques a avantage à exercer l'option puisque le cours est supérieur au prix d'exercice de l'option. Il lève son option d'achat en achetant les 10 actions ACCOR. Sa dépense est de : 190,6 * 10 = 1906 Euros.

Il les revend immédiatement sur le marché au comptant au cours du jour. Il encaisse le produit de la vente : 10 * 2220 = 200 Euros. Il réalise une plus value de 2200 – 1906 = 294 Euros. Mais comme il a versé la prime de 229,5 Euros, en Mars, son bénéfice est seulement de 294 – 229,5 = 64,50 Euros.

Deuxième hypothèse :

Le cours de l'action ACCOR, à l'échéance de Décembre, est de 185,4 Euros. Que doit faire Mr. Jacques ? Mr. Jacques n'exerce pas l'option et n'achète donc pas les titres. Sa perte est limitée au montant de la prime soit 229.5 Euros.

5- option sur marchandises

Il existe des options sur certaines marchandises que l'on peut négocier. Ces options ont le même mécanisme que les précédents mais ici le sous jacent c'est pas un actif financier mais un actif réel : blé, métal, coco, café, …

II. Le modèle de Black & scholes

Le modèle de Black-Scholes d'évaluation d'option est un modèle utilisé en finance afin d'estimer en la valeur théorique d'une option financière (call ou put), de type européenne. Ce modèle a eu un impact majeur sur les méthodes utilisées par les traders, tant vis-à-vis de l'évaluation du prix des options que dans l'élaboration de technique de couverture.

Derrière ce modèle, l'idée fondamentale est de mettre en rapport le prix implicite de l'option et les variations de prix de l'actif sous-jacent.

1. Hypothèses du modèle

Le modèle de Black and Scholes repose sur un certain nombre d'hypothèses :

- ✓ Le temps est une fonction continue ;
- ✓ L'option est européenne, c'est à dire qu'elles ne peuvent s'exercer qu'à maturité ;
- ✓ Le taux d'intérêt sans risque est « déterministique », c'est-à-dire qu'il est connu pour les différentes échéances. En outre il est toujours possible d'emprunter à ce taux. On notera ***r*** ce taux sans risque exprimé en taux instantané ;
- ✓ Le prix du call était fonction, uniquement, du prix de l'action sous-jacente et de sa durée de vie restant à couvrir.
- ✓ L'action ne donne droit à aucun dividende pendant la période d'exercice de l'option ;
- ✓ Il n'y a pas de frais de transaction et d'imposition lors des achats et vente d'actions ou d'options ;
- ✓ Il est possible d'effectuer des ventes à découvert ;
- ✓ L'absence d'opportunités d'arbitrage : l'impossibilité de réaliser un profit sans un risque.
- ✓ Le cours de l'action S suit un processus d'évolution stochastique en temps continu appelé mouvement brownien géométrique et défini par l'équation différentiel d'Itô :

- Le processus dit brownien géométrique

Le processus Brownien géométrique permet de décrire l'évolution de cours de l'action sous-jacente. Ce processus prend forme suivante :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ \quad \text{et} \quad \frac{ds}{s} = \mu dt + \sigma dZ$$

µ : est l'espérance mathématique du return instantané de l'action. µ n'est pas supposé constant ;

σ : La variance de return est supposée constante pendant toute la vie de l'option et proportionnelle au carré du cours de l'action. On considère que tous les investisseurs lui attribuent une valeur identiques ;

dZ : est un processus de Wiener standard qui a pris la forme suivante : dZ = $\sqrt{dt}$ et qui suit une loi normale de moyenne nulle et de variance égal à dt.

Le processus brownien géométrique est appartient à la famille des processus de Markov. Cela implique que la distribution des prix à tout instant du temps dépend uniquement du prix de l'action au temps t, et suit une loi log-normale. Cela implique donc, que le return instantané de l'action $\frac{ds}{s}$ est distribué selon une loi normale dont la moyenne est égale à μdt et la variance à $\sigma^2 dt$

- **Le lemme d'Itô**

Le Lemme d'Ito nous donne le processus que suit toute fonction d'une variable qui suit un processus d'Ito (dont le processus brownien géométrique est un exemple) et du temps :

Ainsi, si x suit un processus d'Ito de forme $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$ et si G est une fonction de x et de temps, alors G suit le processus suivant :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(dx)^2$$

Si certaines de ces hypothèses peuvent paraitre restrictives, Merton (1973) a montré que le modèle de black et scholes était en fait très robuste et que les conditions suffisantes sont, par exemple, beaucoup moins nombreuses que pour le MEDAF. En particulier, il n'est supposé aucun équilibre particulier, sur les marchés des actions. Les investisseurs peuvent ne pas avoir d'anticipations homogènes au niveau des espérances des taux de return.

2. Présentation du modèle

Pour des valeurs donnés du taux sans risque r, de σ la mesure de risque de l'action, et pour un prix d'exercice donné de l'option k, le prix de celle-ci est fonction du cours de l'action et de sa durée de vie, c'est-à-dire du temps t, l'échéance de l'option étant fixée à t^*.

On sait que le prix de l'option est fonction du prix de l'action et de sa durée de vie :

C = f(S, t)

D'après le lemme d'Ito :

$$dC = \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (dS)^2 \qquad (1)$$

D'autre part on sait que :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{ds}{s} = \mu dt + \sigma dZ$$

et en élevant les deux termes de cette équation au carré, on obtient :

$$\left(\frac{ds}{s}\right)^2 = (\mu dt)^2 + 2\mu\sigma dt dZ + (\sigma dZ)^2$$

Comme il' est d'habitude en matière de calcul différentiel, les temps d'ordre supérieur à dt pourront être négligés. Tenant compte du fait que dZ = $\sqrt{dt}$, on obtient alors :

$$\left(\frac{ds}{s}\right)^2 = \sigma^2 dt$$

Ce qui donne finalement :

$$(dS)^2 = S^2 \sigma^2 dt \qquad (3)$$

En introduisant (2) et (3) dans (1), on obtient :

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial s} \mu S + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right) dt + \frac{\partial C}{\partial S} \sigma S dZ$$

Donc :

$$\frac{dC}{C} = \frac{\left(\frac{\partial C}{\partial s} \mu S + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)}{C} dt + \frac{\frac{\partial C}{\partial S} \sigma S}{C} dZ$$

On peut écrire donc :

$$\frac{dC}{C} = \mu_c dt + \sigma_c dZ \tag{4}$$

Avec
$$\mu_c = \frac{\left(\frac{\partial C}{\partial S}\mu S + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)}{C}$$

(5)

Et
$$\sigma_c = \frac{\frac{\partial C}{\partial S}\sigma S}{C} \tag{6}$$

Considérons un portefeuille d'une valeur *P* investi à concurrence de *h* % dans l'option et de (1-*h*) % dans l'action. Le return instantané de ce portefeuille sera :

$$\frac{dP}{P} = h\frac{dC}{C} + (1-h)\frac{dS}{S} \tag{7}$$

En introduisant dans cette équation les valeurs de $\frac{dS}{S}$ *et* $\frac{dC}{C}$ on obtient :

$$\frac{dP}{P} = \left[h\mu_c + (1-h)\mu\right]dt + \left[h\sigma_c + (1-h)\sigma\right]dZ$$

Dans le taux de return instantané il y'a un élément déterministe, qui est la première somme entre cochets, et un élément aléatoire qui est la deuxième élément entre crochets.

Si h est choisi de manière à assurer une couverture totale de risque, c'est-à-dire à vérifier l'équation suivante :

$$h\sigma_c + (1-h)\sigma = 0 \tag{8}$$

Alors le portefeuille de valeur initiale *P* est sans risque et sans risque et son return doit être égal à ***r***. on a donc :

$$h\mu_c + (1-h))\mu = r \tag{9}$$

De l'équation (8) on peut déduire que :

$$h = \frac{\sigma}{\sigma - \sigma_c}$$

On en remplaçant *h,* par cette valeur, dans l'équation (9), on obtient :

$$\frac{\sigma}{\sigma-\sigma_c}\mu_c+(1-\frac{\sigma}{\sigma-\sigma_c})\mu=r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu-r}{\sigma}=\frac{\mu_c-r}{\sigma_c}$$

En remplaçant μ_c et σ_c par les valeurs obtenues aux équations (5) et (6), on a :

Après simplification on obtient :

$$\frac{\mu-r}{\sigma}=\frac{\left[\dfrac{\left(\dfrac{\partial C}{\partial S}\mu S+\dfrac{\partial C}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2 S^2}{2}\dfrac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)}{C}\right]-r}{\dfrac{\dfrac{\partial C}{\partial S}\sigma S}{C}}$$

$$\boxed{\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}+rS\frac{\partial C}{\partial S}-Cr+\frac{\partial C}{\partial t}=0}$$

Cette équation appelée l'équation différentielle de Black-Scholes, sa résolution sous certaines conditions permet de déterminer la valeur de l'option d'achat et de vente européen.

- **Valeur du call européen**

A l'échéance, la valeur de l'option d'achat doit être égale à sa valeur intrinsèque, ce qui fait que pout $t = t^*$, on aura :

C(S,t) = $S - K$ si $S > K$

C(S,t) = 0 si $S < K$

Il vient à t* - t = 0 :

C (S,t) = Max [0 ; S-K].

La résolution de l'équation de Black-Scholes qui respect la condition limite qui vient d'être définie est la suivante :

$$\boxed{C = SN(d1) - Ke^{-r(t^*-t)}N(d2)}$$

N(d) représente la fonction normale comulée de -∞ à d.

$$d_1 = \frac{Log\frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t^* - t)}{\sigma\sqrt{t^* - t}}$$

Et

$$d_2 = \frac{Log\frac{S}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t^* - t)}{\sigma\sqrt{t^* - t}} = d_1 - \sigma\sqrt{t^* - t}$$

Si on appelle τ le temps qui reste à courir jusqu'à l'échéance de l'option $(\tau = t^* - t)$, la valeur de l'option d'achat peut être écrit comme suit :

$$\boxed{C = SN(d1) - Ke^{-r\tau}N(d2)}$$

Avec :

$$d_1 = \frac{Log\frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$

Dans cette formule interviennent le prix de l'action à la date initiale, le prix d'achat éventuel, le taux d'intérêt, la date d'exercice et la volatilité instantanée de l'action que l'on a due supposer constante, C'est le seul paramètre qui n'est pas parfaitement connu à la date 0 et qui pourrait être déterminé par des modèles statistiques.

L'interprétation de la formule de black-scholes est relativement simple. La quantité $K.e^{-r\tau}$ est égal à la valeur actuelle du prix de l'exercice : si un opérateur place ce montant sur le marché monétaire de l'argent, il disposera à l'échéance du contrat d'option d'une somme égale au prix d'exercice K. le premium C du call est égal à la valeur d'un portefeuille constitué de N (d_1) actions et financé partiellement par un crédit de $K.e^{-r\tau}$ N(d_2).

Lorsque d_1 et d_2 sont grand, ceci est le cas pour des calls en dedans. En effet, plus le cours est élevé par rapport au prix d'exercice, plus le logarithme de leur ratio est important. La première partie de d_1 ou d_2 est une mesure du degré selon lequel l'option est en dedans ou en dehors.

Quand le call est en dehors, d_1 et d_2 sont négatifs. $N(d_1)$ et $N(d_2)$ prennent des valeurs très petites. Le premium d'une option en dehors est toujours faible.

Enfin, plus σ est élevé, plus l'écart entre N (d_1) et $N(d_2)$ est importante et, par voie de conséquence, le premium grand.

- **Valeur du put européen**

Sachant qu'à l'échéance, la valeur, ***p***, d'un put est égale à Max [0 ; K-S], on obtient de même, pour cette option, la valeur suivante :

$$\boxed{P = Ke^{-r\tau} N(-d_2) - SN(-d_1)}$$

La valeur du premium de Put est donné comme une différence entre deux termes, le premier correspond à la valeur actuelle investi dans les options pour assurer une couverture totale contre le risque. Et le deuxième concerne la valeur d'un portefeuille constitué de $N(d_1)$ actions.

Enfin, il reste de noter que le premium du call et du put selon la formule de Black-Scholes permet de déterminer la « PUT-CALL parity », ou en d'autre termes la relation d'équilibre entre un Call et un Put européen ayant les même caractéristiques, soit :

$$\boxed{P = C - S + Ee^{-rt}}$$

Cette relation peut être expliqué du fait que l'achat de l'action de base et celui d'un put pour le protéger peut être remplacée par l'achat d'un call et la réalisation d'un placement en trésorerie.

Plus généralement, le premium d'un put doit être égal au premium d'un call de même échéance et de même prix d'exercice augmenté de la valeur actuelle du prix d'exercice et diminué du cours de l'action.

- **Exemple d'application**

Considérons une option d'achat qui représente les caractéristiques suivantes :

$$S = 100\ ;\quad K = 90\ ;\ r = 0{,}005\ ;\ \sigma = 0{,}06\ ;\ t^* - t = 6$$

1- Calculer le premium Call ?
2- Calculer le premium du put ?

Solution :

$$d_1 = \frac{Log\frac{100}{90} + \left(0{,}005 + \frac{0{,}0036}{2}\right)6}{0{,}06\sqrt{6}}$$

$$= \frac{0{,}105361 + (0{,}005 + 0{,}0018)6}{0{,}06(2{,}4495)} = \frac{0{,}1462}{0{,}1470} = 0{,}9946$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} = 0{,}9946 - 0{,}06\sqrt{6} = 0{,}8474$$

La lecture de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite nous apprend que $N(d_1) = 0{,}8397$ et que $N(d_2) = 0{,}8022$.

On obtient alors que :

$$C = 100(0{,}8397) - 90e^{(-0{,}005)6}(0{,}8022) = 13{,}91$$

$$P = C - S + Ke^{-r(t^*-t)} = 1{,}25$$

3. Les extensions du modèle de Black-scholes

Dans cette partie, on va essayer à se limiter à vous présenter quelques extensions de la formule standard de Black-Scholes. En fait, il existe plusieurs extensions de la formule standard à savoir le modèle des dividendes discrets ou des dividendes continus de Merton, le modèle des options de change de Garman et Kohlhagen et le modèle des options d'échange et autres expansions qui traitent comment la dite formule peut être adopté au cas d'une volatilité variable et comment évaluer les options quand le taux sans risque obéit a un processus stochastique gaussienne.

3.1 Modèle de Black-Scholes et la prise en compte d'un dividende

Le modèle standard de Black-Sckoles stipule à travers l'une de ces hypothèses que l'action ne donne droit à aucun dividende pendant la période d'exercice de l'option ; puisque le porteur de l'option ne dispose pas de la possibilité de l'exercer avant sa date d'échéance.

En effet, **Robert C. Merton** a publié en 1973 (juste après le modèle standard de BS) une proposition qui constitue une expansion du modèle de Black-Sckoles, appelée souvent le « **modèle de Merton** » dont laquelle, il relâche l'hypothèse d'absence de versement de dividendes et que le modèle standard peut être adopté pour tenir compte d'un dividende proportionnel au cours ; versé de manière continu ou d'un dividende payé de manière discret.

- **Le modèle des Dividendes discrets**

Le dividende discret est celui qui est versé à une date unique et attendu pendant la vie de l'option est parfaitement défini quand à son montant et a sa date de versement à l'actionnaire.

En effet, l'ajustement de la formule de black-scholes s'effectue en amputant la valeur du support S, de **la valeur actualisée des dividendes** qui se détachent au cours de la vie de l'option. Cet ajustement s'applique uniquement lorsque l'option est européenne, le montant et la date du dividende sont connus avec certitude.

Il suffit de remplacer a l'aide de la formule de Balck-Sckoles le cours de l'action S, par S* qui égale au cours de l'action diminué du montant actualisé de la valeur dividende prévu D*. Soit :

$$D^* = D\exp(-rt)$$

$$S^* = S - D\exp(-r\tau) = S - D^*$$

La valeur du call est donnée par :

$$C(S,t) = (S - D^*)N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2) = S^*N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)$$

Et celle du put par :

$$P(S,t) = Ke^{-r\tau}N(-d_2) - (S - D^*)N(-d_1) = Ke^{-r\tau}N(-d_2) - S^*N(-d_1)$$ Avec

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S*}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Et $$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

La présence d'un dividende réduit significativement la valeur d'une option d'achat et croître celle de l'option de vente.

- **Le modèle des dividendes continus**

Dans le modèle ou le dividende est continu, le temps est segmenté en durées infinitésimales d_t. L'action en fin de période $[t, t+dt]$ verse à son détenteur un flux de dividende de montant $cSdt$ .où :

$c = \frac{D}{S}$ Avec $c > 0$ représente le taux de rémunération supposé constant.

Le prix de l'option d'achat est évalué comme suit :

$$C(S,t) = e^{-c\tau} SN(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2)$$

La valeur de l'option de vente est évaluée comme suit :

$$P(S,t) = Ke^{-r\tau} N(-d_2) - Se^{-c\tau} N(-d_1)$$

Avec

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{K} + \left(r - c + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

Il est a noter que **le modèle Merton** permet d'évaluer une stock-option, cette dernière s'agit d'une option d'achat (ou calls) d'action d'une entreprise, accordées à des dirigeants, des cadres dirigeant et parfois à des catégories plus large de personnel oeuvrant dans cette entreprise.

1. Modèle de Garman et Kohlhagen

Le marché des options de change est le plus divers et le plus inventif des marchés d'options. C'est lui qui est à l'origine de quasiment toutes les formes d'options dites exotiques ou de deuxième génération (options à barrière, options asiatiques, options sur options, etc.).

Les options de change permettent à son détenteur de couvrir son risque de change tout en préservant la possibilité de réaliser un gain de change dans le cas d'une évolution favorable du cours de la devise ;

- L'acheteur **d'une option d'achat** de devises acquiert le droit - et non l'obligation - d'acheter un certain montant de devises à un prix fixé dès l'origine (prix d'exercice), jusqu'à, ou à, une certaine échéance (date d'exercice).
- L'acheteur **d'une option de vente** de devises acquiert le droit - et non l'obligation - de vendre un certain montant de devises. Comme dans le cas d'une option d'achat, cours et échéance sont fixés préalablement.

Le détenteur d'une option peut donc décider librement de l'exercer, c'est-à-dire d'acheter ou de vendre la devise au prix d'exercice. Mais il peut également renoncer à utiliser ce droit si le cours qu'il peut obtenir sur le marché des changes est plus avantageux pour lui.

Dans même contexte**, Garman et Kohlhagen** (1983) **ont montrés** que **Les options sur le taux de change** (les options de change) peuvent également être évalué par la formule standard de black-scholes.

Considérant donc, un univers composé de deux devises : la devise étranger, indicée par f (pour foreign) et la devise domestique, indicée par d. Dans chacune des deux économies (domestique (d) et étranger (f)), la devise correspondante constitue un actif sans risque d'une valeur S, dont la dynamique entre t et $t + d_t$ dépend du taux sans risque (r^d pour l'économie domestique et r^f pour l'économie étrangère).

La valeur du call est donnée par :

$$C(S,t) = Se^{-r_f \tau} N(d_1) - Ke^{-r_d \tau} N(d_2)$$

Et celle du put par :

$$P(S,t) = Ke^{-r_d \tau} N(-d_2) - Se^{-r_f \tau} N(-d_1)$$

Avec

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + \left(r_d - r_f + \frac{1}{2}\sigma^2 \right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Et $$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

De plus, la relation de parité call-put s'écrit :

$$C(S,t) - P(S,t) = Se^{-r_f\tau} - Ke^{-r_d\tau}$$

2. Modèle de Margrabe

L'option d'échange (en anglai Swaption) est la contraction des mots swap et option. Il s'agit d'une option sur un swap : elle donne le droit d'acheter (call swaption) ou de vendre (put swaption) un swap selon les conditions prévues dans le contrat optionnel. Ce type d'option devenue très populaire, et qui concerne potentiellement tous les genres de support, est l'option d'échange d'un actif risqué (dont le prix est noté S) contre un autre (de prix X).

L'évaluation originale de cette option d'échange a été faite, avec une technique de résolution très lourde, par W. Margrabe (1978).

En effet, on peut expliquer ce modèle, de la manière suivante ; le prix courant X de l'actif donné remplace alors le prix d'exercice K et la volatilité de S par rapport X remplace celle de S. En fait, l'option d'échange généralise le cas de l'option standard, et la formule de Margrabe celle de BS ; l'option standard peut se réinterpréter comme une option d'échange entre l'actif risqué (S) et une somme certaine (K), cette dernière constituant un cas particulier sans risque d'un actif risqué.

Notant que deux actifs risqués S et X ne distribuant pas de rémunération entre la date d'évaluation et l'échéance de l'option.

La valeur de l'option européenne qui permet d'échanger S contre X est donnée par une formule de type BS :

$$C = SN(d_1) - XN(d_2)$$

Avec

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{X} + \frac{1}{2}\nu^2\tau}{\nu\sqrt{\tau}} \qquad \text{et} \qquad d_2 = d_1 - \nu\sqrt{\tau}$$

III. Le modèle Binomial

Contrairement aux modèles en temps continu, qui montrent le double avantage de présenter des formules analytiques et de déterminer les prix des options instantanément, les modèles binomiaux exigent des itérations et un temps de calcul relativement long pour calculer les prix des options. Toutefois, malgré l'inconvénient qu'ils montrent en terme de temps de calcul par rapport aux modèles en temps continu, les modèles binomiaux sont beaucoup plus flexibles que les modèles en temps continu.

L'approche binomiale proposée initialement par COX ROSS RUBINSTEIN est pédagogique et calcule le prix de l'option sans recourir à des mathématiques compliquées.

1. Hypothèse du modèle :

Le modèle développé par COX ROSS RUBINSTEIN est basé sur plusieurs hypothèses. :

- Le prix des différents actifs reflète à tout moment toute l'information disponible.
- Tout le monde possède la même information tout le monde doit pouvoir accéder au marché et il n'existe pas de coûts de transaction (commissions, frais de courtage.)
- tous les actifs sont supposés parfaitement divisibles et liquides.
- Le taux de placement est le même que le taux d'emprunt, on l'appelle le taux sans risque r.
- la vente à découvert est autorisée.

2. Présentation du Modèle

Ce modèle suppose que le prix de l'actif support peut être approché par un processus binomial, c'est-à-dire sur chaque intervalle de temps, il bouge à la hausse de (u) ou à la baisse de (d). Par souci de clarté, ce modèle est présenté d'abord sous une version à une période puis dans une version à plusieurs périodes en l'absence de dividendes. Ensuite, le modèle est ajusté pour les dividendes.

i. Le modèle en l'absence de dividendes

Le point crucial de cette approche est la formation d'un portefeuille d'arbitrage sans risque en achetant l'actif support et en vendant l'option. Ce portefeuille est sans risque parce qu'à la fin de la période son prix est certain.

La création d'un portefeuille de couverture nécessite l'achat d'une unité du support, S, et la vente d'un nombre H d'options : (S - HC). Il est possible également de créer ce portefeuille en achetant une option et en vendant 1/H titres. Le ratio de couverture H est donné par l'expression :

$$H = S(u - d)/ Cu - Cd$$

Dans la mesure où à la fin de la période la valeur du portefeuille de couverture devient R (S - HC), elle doit aussi être égale à la valeur finale ($uS - HC_u$) . Si ces deux valeurs ne sont pas égales, il est possible de mettre en oeuvre des portefeuilles d'arbitrage permettant de réaliser des profits sans risque en achetant le portefeuille le moins cher et en vendant l'autre. De ce fait, les deux portefeuilles présentent la même valeur, soit :

$$R (S - HC) = (uS - HC_u)$$

Dans cette expression, R désigne un plus le taux d'intérêt sans risque. En isolant

la valeur de l'option C dans cette égalité, il vient :

$$C = S(R - u) + H Cu / HR$$

Il suffit de remplacer le ratio de couverture par sa valeur dans l’équation précédente pour obtenir la valeur de l'option :

$$C = [Cu (R - d)/ (u - d) + Cd (u - R)/ (u - d)] / R$$

Cette expression correspond exactement à la formule d'évaluation d'une option européenne d'achat dans le modèle binomial à une période. Le prix de l'option dans ce modèle est donné par sa valeur espérée actualisée au taux d'intérêt sans risque sous la *probabilité neutre au risque*.

Désignons par T la date d'échéance de l'option que l'on divise en N intervalles de longueur Δt . Au cours de chaque intervalle de temps, l'actif support, S, augmente d'un montant u pour prendre la valeur Su avec la probabilité p et baisse de d pour atteindre la valeur Sd avec la probabilité (1-p).

Il est souvent supposé que d = 1/u. Les paramètres u, d et p sont donnés par la moyenne et l'écart type de S sur l’intervalle Δt . Dans une économie neutre au risque, la valeur espérée du support S correspond au placement de cette valeur au taux d'intérêt sans risque, soit S $\exp(r\Delta t)$, en utilisant l'actualisation en temps continu ou R est remplacé par $\exp(r\Delta t)$. Elle est égale aussi à la probabilité de hausse qui multiplie le prix du support dans l'état correspondant, pSu augmentée de la probabilité de la baisse qui multiplie le prix du support dans l'état en question, soit (1-p)Sd.

En calculant la valeur espérée du titre et sa variance, en utilisant le fait que u= 1/d, et en effectuant les calculs nécessaires, nous montrons que les relations suivantes sont vérifiées :

$u = \exp(\sigma \sqrt{\Delta t})$

$d = \exp(- \sigma \sqrt{\Delta t})$

$m = \exp(r \sqrt{\Delta t})$

$p = (m - d)/(u - d)$

Disposant de ces valeurs, il est possible de générer un arbre binomial dans lequel la valeur du support à chaque noeud s'écrit : $Su^j d^{i-j}$ pour j variant de 0 à i où l'indice i correspond à la période et l'indice j indique la position.

L'évaluation d'une option européenne ou américaine à n'importe quelle position (i, j) sur l'arbre, notée, $F_{i,j}$ s'effectue par une procédure récursive, en commençant à partir de la date d'échéance T, et en parcourant l'arbre jusqu'à l'instant présent.

À la date d'échéance T, la valeur d'une option européenne d'achat est :

$F_{N,j} = \max [0, Su^j d^{N-j} - K]$

Cette condition approxime la valeur de l'option à la date d'échéance:

max [0, ST - K] où $Su^j d^{N-j}$ correspond à la valeur du support après j mouvements à la hausse et (N - j) mouvements à la baisse.

À la même date, la valeur d'une option européenne de vente est :

$F_{N,j} = \max [0, K\ Su^j d^{N-j}]$

Cette condition approxime la valeur de l'option de vente à la date d'échéance : max [0, K - ST] où $Su^j d^{N-j}$ correspond à la valeur du support après j mouvements à la hausse et (N - j) mouvements à la baisse.

La valeur de l'option à n'importe quel noeud est obtenue à partir des deux suivants en actualisant la valeur trouvée au taux d'intérêt sans risque, soit :

$F_{i,j} = \exp(-r\Delta t) [p F_{i+1, j+1} + (1-p) F_{i+1,j}]$ pour $0 \leq i \leq M-1 \quad 0 \leq j \leq i$

Cette fonction donne le prix de l'option en fonction des deux valeurs probables actualisées. Si l'option est américaine, une condition supplémentaire s'impose traduisant le fait que le prix de l'option doit être au moins égal à sa valeur intrinsèque, soit pour une option d'achat:

$Fi,j = Max [Su^j d^{N-j} - K, exp(-r\Delta t) (p F_{i+1, j+1} + (1-p) F_{i+1,j})]$

La condition suivante donne la valeur de l'option américaine de vente :

$Fi,j = Max [K - Su^j d^{N-j} , exp(-r\Delta t) (p F_{i+1, j+1} + (1-p) F_{i+1,j})]$

ii. le modèle en présence du dividende

L'approche binomiale peut être facilement adaptée pour la prise en compte des détachements des dividendes. L'analyse proposée par Hull (1997) est intéressante puisqu'elle évite les "cassures" dans l'arbre binomiale consécutives au détachement d'un dividende. En effet, supposons qu'il existe une seule date de détachement de dividendes τ, entre les instants $k\Delta t$ et $(k+1) \Delta t$ où Δt correspond à une période. La prise en compte des dividendes permet d'écrire à chaque instant $(t + i \Delta t)$, les prix du support comme suit :

- quand $i \Delta t < \tau$:

$S^* (t) u^j d^{i-j} + D exp(-r (\tau - i \Delta t))$ pour $j = 0, 1, 2,... i$

où S* correspond au prix du support sans les dividendes. Cette inégalité montre qu'avant la date de versement des dividendes, l'ajustement consiste à ajouter au prix du support la valeur actualisée des dividendes qui se détachent au cours de la durée de vie de l'option.

- Quand $i \Delta t > \tau$:

$S^* (t) u^j d^{i-ji}$ pour $j = 0, 1, ... i$

Cette inégalité montre qu'après la date de versement des dividendes, l'ajustement consiste à prendre les différentes valeurs du support sans les dividendes à chaque noeud sur l'arbre binomiale. L'application suivante illustre l'utilisation de cette version du modèle binomial pour évaluer des options en présence de versements de dividendes.

3. Extensions du modèle binomiale

Plusieurs extensions de ce modèle portent sur la réduction du temps de calcul et l'ajustement du modèle aux données du marché en offrant des algorithmes plus efficaces. À ce titre, les travaux de Breen (1991), Kim et Byun (1994) et Rubinstein (1994). D'autres extensions portent sur l'application de ce modèle à l'évaluation des options de seconde génération et aux calculs des paramètres de gestion d'une position d'options, comme les travaux de Ritchken (1995), Pelsser

Et Vorst (1994)...etc. Toutefois, il est honnête d'avouer que la majorité sinon la plupart des travaux sur les options exotiques et de seconde génération ne traitent que les situations correspondantes à un rendement de dividendes et non à un dividende discret. Le lecteur peut consulter à ce sujet l'ouvrage de Bellalah, Briys et Mai (1997

Conclusion

Tout au long de ce travail, on a essayé de présenter les principaux concepts, méthode et approches permettant d'évaluer les options.

Alors La revue de la littérature montre qu'il existe deux approches d'évaluation des options : l'approche en temps continu à la Black et Scholes, la première et la plus utilisée, et l'approche en temps discret binomiale développé par à la Cox, Ross et Rubinstein (1979) qui est essentiellement un processus séquentiel d'évaluation. L'avantage de cette dernière approche est qu'elle s'applique sans difficultés particulières à l'évaluation des options européennes et américaines avec et sans les dividendes. Son inconvénient majeur est qu'elle nécessite un temps de calcul relativement long pour déterminer le prix d'une option.

Or, L'avantage des modèles en temps continu et en particulier, le modèle de Black et Scholes, est qu'il donne des solutions exactes pour les prix des options. Ce modèle constitue le développement théorique le plus réussi et la formule proposée représente probablement la formule la plus utilisée dans l'histoire des sciences économiques et sociales. L'application du modèle de BS pour les options sur actions est réalisée, tout en expliquant comment ce modèle peut être ajusté pour la prise en compte des dividendes. Ces ajustements sont insuffisants puisque la plupart des options négociables sur actions sont américaines. En revanche, les options américaines d'achat son assimilées à des options européennes en l'absence de détachements de dividendes, et sont évaluées en conséquence, par ce modèle.

Les résultats des principaux tests empiriques montrent la supériorité de la version de Roll, Geske et Whaley pour l'évaluation des options en présence de dividendes. Il appartient aux utilisateurs d'effectuer le choix entre les modèles en temps continu et les modèles en temps discret. Le choix doit être justifié par un arbitrage entre le temps de calcul et la précision du prix.

Bibliographie :

- **Broquet, Cobbolt-Gillet, Wandenberg ; « Gestion de portefeuille », édition de boeck université, 4eme édition 2007.**

- **JACQUILLAT & B. SOLNIK « Marché financier : gestion de portefeuille et des risques », Dunod 3ième édition ; Paris 1997.**

- **Robert Cobbault ; « théorie financiere », edition Economica, Collection Gestion, 2eme édition 1992.**

- **F. MISHKIN « Monnaie banque & marché financiers », 8 ième édition Pearson education 2007.**

- **Jean-Claude AUGOS“Les options sur taux d’intérêt; dynamique de taux et Evaluation”, édition Economica 1989, Collection Gestion.**

- **Pierre devolder ; « Finance stochastique », édition l’université de Bruxelles 1993, Bruxelles.**

- **« finance, modèle dynamique d’évaluation », 1ere édition, presse universitaire de France, 1994 février Paris.**

- **« Revue et corrigée les options sur actions et sur indices », édition PUF, 3eme édition en 1993 Mars, collection dirigee par Bertrand Jacquillat et Michel le vasseu.**

- **Rajna Gibson « l’évaluation des options, Analyse e évaluation des contrat d’options standardisés » published by Georg Genova switgerland.**