EXERCICES RÉDIGÉS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 *Valeur exacte du cosinus et du sinus de $\pi/12$*

On considère les deux nombres complexes suivants :

$$z_1 = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$$

1. Écrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.
2. Déterminer les écritures sous formes algébrique, exponentielle et trigonométrique de z_1z_2.
3. En déduire la valeur exacte du cosinus et sinus suivants :

$$\cos\frac{\pi}{12} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{12}$$

Exercice 2 *Des pistes pour démontrer qu'un complexe est réel ou imaginaire pur*

Démontrer les équivalences suivantes :

$$Z \text{ réel} \Leftrightarrow Z = \overline{Z}$$

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\, Z = 0 \;\text{ ou }\; \arg(Z) = 0\ [\pi]\,)$$

$$Z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow Z + \overline{Z} = 0$$

$$Z \in \mathbf{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow (\, Z = 0 \;\text{ ou }\; \arg(Z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]\,)$$

Applications :

1. Comment choisir le nombre complexe z pour que $Z = z^2 + 2z - 3$ soit réel ?

   Soit E l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que Z soit réel. Déterminer E.

2. On considère les points A et B d'affixes respectives $\mathbf{i}$ et 1. Soit M un point du plan d'affixe z distinct de A.

   On pose $$Z = \frac{1 - z}{\mathbf{i} - z}$$

   Déterminer l'ensemble E des points M tels que Z soit réel.

   Déterminer l'ensemble F des points M tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 3 *Écriture complexe de transformations*

1. Soit f la transformation du plan complexe qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que :

$$z' = az + 3\mathbf{i}$$

   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f lorsque $a = 2$, puis lorsque $a = -\mathbf{i}$

2. On donne $A(1)$, $B(2 + \mathbf{i})$, $A'(2\mathbf{i})$ et $B'(1 + \mathbf{i})$.

   Vérifier que $AB = A'B'$.

   Démontrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$. La déterminer.

Exercice 4 *Lieux de points*

Soit z un nombre complexe différent de 1. On note M le point du plan complexe d'affixe z. On pose $Z = \dfrac{z + \mathbf{i}}{z - 1}$.

Déterminer l'ensemble :

1. E des points M tels que Z soit réel.
2. F des points M tels que $|Z| = 1$.
3. G des points M tels que $\arg(Z) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Exercice 5 *Utilisation des nombres complexes pour établir une propriété algébrique*

Soient $a, b \in \mathbb{N}$. On suppose que a et b sont la somme de deux carrés :

$$\text{il existe } x, y \in \mathbb{N} \text{ tels que } a = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad \text{il existe } z, t \in \mathbb{N} \text{ tels que } b = z^2 + t^2$$

Démontrer que le produit ab est encore la somme de deux carrés. (Idée : écrire $\left(x^2 + y^2\right) = |x + \mathbf{i}y|^2$ etc...)

Exercice 6 *Identité du parallélogramme*

Démontrer que pour tous nombres complexes Z et Z', on a :

$$|Z + Z'|^2 + |Z - Z'|^2 = 2|Z|^2 + 2|Z'|^2$$

(Indication : utiliser la relation : $|Z|^2 = Z\overline{Z}$)

Interpréter géométriquement.

Exercice 7 *Racines de l'unité. Applications*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité tout nombre complexe z tel que :

$$z^n = 1$$

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Par exemple, $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$.

1.Démontrer que :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{n}}, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \right\}$$

Démontrer que la somme des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité est nulle.

Démontrer que, dans repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, les images A_k $(0 \leqslant k \leqslant n - 1)$ des nombres $\omega_k = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{n}}$ sont les sommets d'un polygone régulier.

2.Applications :

a)Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. On appelle racine $n^{\text{ème}}$ de Z tout nombre complexe tel que :

$$z^n = Z$$

Soit $R = |Z|$ et Θ un argument de Z. Démontrer que Z admet les n racines $n^{\text{èmes}}$ suivantes :

$$\sqrt[n]{R}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\left(\frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n - 1$$

b)Soit f la fonction polynôme définie par :

$$f(x) = x^4 + 1$$

Déterminer les racines quatrièmes de -1 puis en déduire que f peut s'écrire comme un produit de deux fonctions polynômes de degré 2 à coefficients réels.

c)Soit z un nombre complexe tel que : $1 + z^4 + z^8 = 0$

Démontrer que z est une racine $12^{\text{ème}}$ de l'unité.

Exercice 8 *Transformation de a cos x + b sin x*

Soient a et b deux réels. Démontrer qu'il existe deux réels R et θ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$a\cos x + b\sin x = R\cos(x-\theta)$$

Application : résoudre, sur $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x + \sin x = 1$

Exercice 9 *Calcul de la valeur exacte de cos(2π/5) et cos(4π/5)*

Pour connaître le but de cet exercice, se reporter à la question 5.

1.Résoudre, dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système suivant :

$$\begin{cases} u+v=-\dfrac{1}{2} \\ uv=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

2.On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Démontrer que : $\omega^0+\omega^1+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$

En déduire (à l'aide des formules d'Euler) que :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=-\frac{1}{2}$$

3.Démontrer que :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

et

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

4.En déduire que : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=-\frac{1}{4}$

5.Démontrer que : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

Exercice 10 *Carrés et parallélogramme*

ABC est un triangle de sens direct.

DBA est un triangle isocèle et rectangle en D de sens direct.

ACE est un triangle isocèle et rectangle en E de sens direct.

On construit le point L tel que $\overrightarrow{CL}=\overrightarrow{DB}$.

1.Faire une figure.

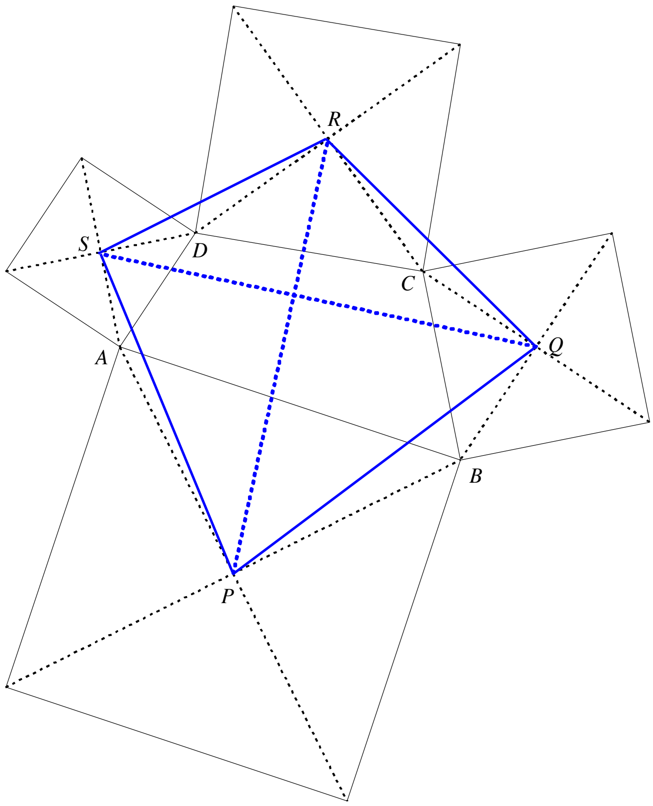
2.Démontrer que EDL est un triangle rectangle isocèle en E de sens direct.

Exercice 11 *Des carrés autour d'un quadrilatère* (*Théorème de Von Aubel*)

On considère un quadrilatère $ABCD$ de sens direct.

On construit quatre carrés de centres respectifs P, Q, R et S qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ du quadrilatère $ABCD$. (Voir figure)

Le but du problème est de démontrer que les diagonales du quadrilatère $PQRS$ sont perpendiculaires et de même longueur.



On notre a, b, c, d, p, q, r et s les affixes respectives des points A, B, C, D, P, Q, R et S dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ de sens direct.

1.Démontrer que dans le carré construit sur $[AB]$, on a :

$$p=\frac{a-b\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$$

Établir des relations analogues pour q, r et s en raisonnant dans les trois autres carrés.

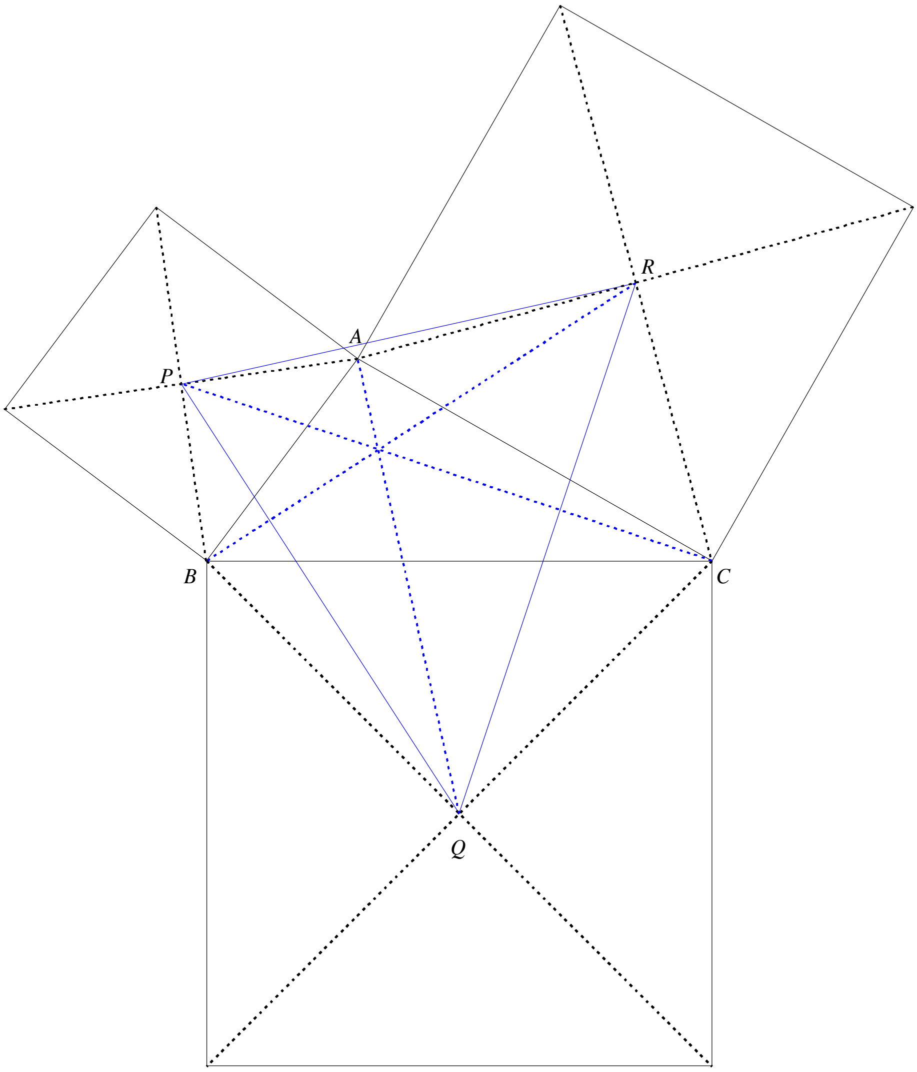
2.Calculer : $$\frac{s-q}{r-p}$$

Conclure.

Exercice 12 *Des carrés autour d'un triangle (Point de Vecten)*

On considère un triangle ABC de sens direct.

On construit trois carrés de centres respectifs P, Q et R qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ du triangle ABC. (Voir figure)



On notre a, b, c, p, q et r les affixes respectives des points A, B, C, P, Q et R dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ de sens direct.

1.Démontrer que les triangles ABC et PQR ont le même centre de gravité.

2.Démontrer que dans le carré construit sur $[AB]$, on a :

$$p = \frac{a - b\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$$

Établir des relations analogues pour q et r en raisonnant dans les deux autres carrés.

3.Démontrer que les droites (AQ) et (PR) sont perpendiculaires

En déduire que les droites (AQ), (BR) et (CP) sont concourantes.

Information : ce point de concours s'appelle "point de Vecten" du triangle ABC.

Exercice 13 *Théorème de Napoléon*

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ de sens direct.

PARTIE A : *des caractérisations du triangle équilatéral*

On note $\mathbf{j} = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}}$. Soient U, V et W trois points du plan d'affixes respectives u, v et w.

1.Démontrer l'équivalence suivante :

$$UVW \text{ est équilatéral de sens direct} \Leftrightarrow u - v = -\mathbf{j}^2(w - v)$$

2.Démontrer l'équivalence suivante :

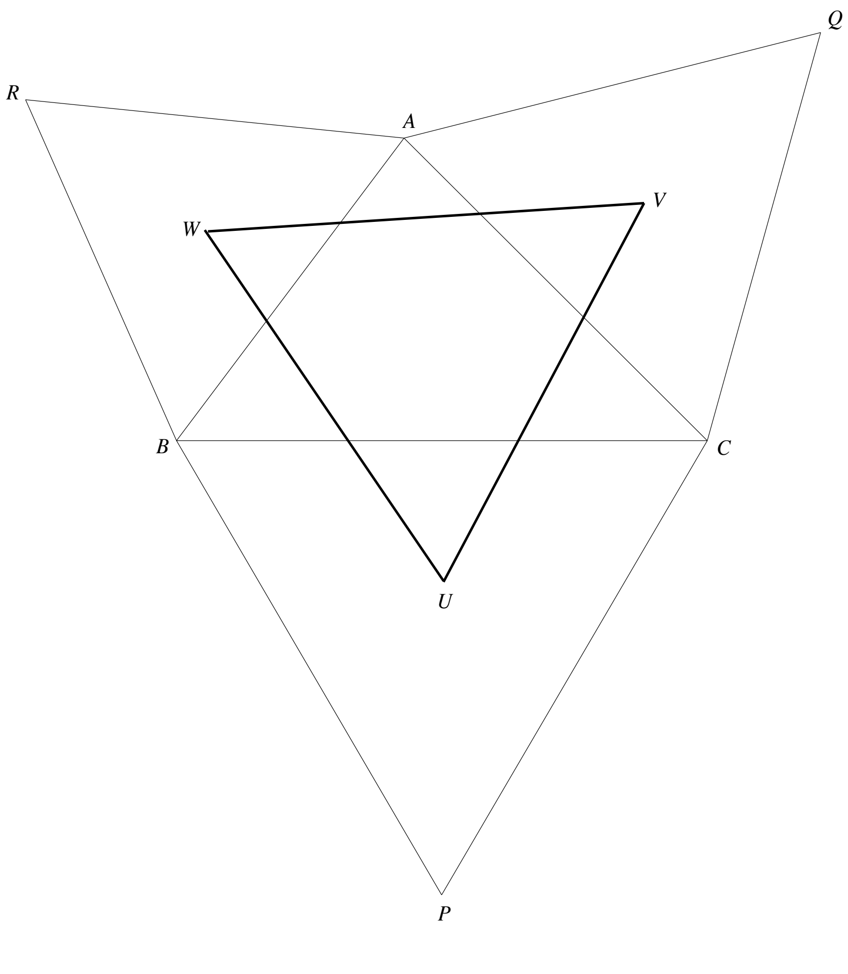
$$UVW \text{ est équilatéral de sens direct} \Leftrightarrow u + \mathbf{j}v + \mathbf{j}^2 w = 0$$

PARTIE B : *démonstration du théorème de Napoléon*

ABC est un triangle quelconque de sens direct. On construit les points P, Q et R tels que BPC, CQA et ARB soient des triangles équilatéraux de sens direct.

On note U, V et W les centres de gravité de BPC, CQA et ARB respectivement.

Démontrer que UVW est équilatéral de même centre de gravité que ABC.



Exercice 14 *Nombres complexes et suites*

Le but de cet exercice est l'étude de la suite (S_n) définie, pour $n \geqslant 2$, par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

1.On pose, pour $n \geqslant 2$: $$z = \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{n}}$$

Calculer la somme $$\sum_{k=0}^{n} z^k$$

2.Montrer que, pour $n \geqslant 2$: $$\frac{2}{1-z} = 1 + \mathbf{i}\,\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

3.En déduire que, pour $n \geqslant 2$: $$S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

4.Étudier la limite de la suite (u_n) définie, pour $n \geqslant 2$, par :

$$u_n = \frac{S_n}{n}$$

Exercice 1 *Valeur exacte du cosinus et du sinus de* $\pi/12$

1.On a : $$z_1 = \frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2.Forme algébrique de z_1z_2 :

$$z_1z_2 = \left(\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Forme exponentielle de z_1z_2 : $$z_1z_2 = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{12}}$$

Forme trigonométrique de z_1z_2 : $$z_1z_2 = \cos\frac{\pi}{12} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{12}$$

3.En identifiant la forme trigonométrique avec la forme algébrique de z_1z_2, il vient :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 2 *Des pistes pour démontrer qu'un complexe est réel ou imaginaire pur*

D'une part : $$Z \text{ est réel} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z - \overline{Z} = 0 \Leftrightarrow Z = \overline{Z}$$

$$Z \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z + \overline{Z} = 0$$

D'autre part :

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\ Z = 0 \ \text{ou}\ \arg(Z) = 0\ [2\pi]\ \text{ou}\ \arg(Z) = \pi\ [2\pi]\ ) \Leftrightarrow (\ Z = 0\ \text{ou}\ \arg(Z) = 0\ [\pi]\ )$$

$$Z \in \mathbf{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow (\ Z = 0\ \text{ou}\ \arg(Z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]\ \text{ou}\ \arg(Z) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\ ) \Leftrightarrow (\ Z = 0\ \text{ou}\ \arg(Z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]\ )$$

Applications :

1.D'après ce qui précède et d'après les propriétés de la conjugaison :

$$Z \text{ réel} \Leftrightarrow Z = \overline{Z} \Leftrightarrow z^2 + 2z - 3 = \overline{z}^2 + 2\overline{z} - 3 \Leftrightarrow (z - \overline{z})[(z + \overline{z}) + 2] = 0$$

$$Z \text{ réel} \Leftrightarrow (z = \overline{z}\ \text{ou}\ 2\mathrm{Re}(z) = -2) \Leftrightarrow (z \text{ réel}\ \text{ou}\ \mathrm{Re}(z) = -1)$$

L'ensemble E recherché est l'union des deux droites d'équations respectives $y = 0$ et $x = -1$.

2.Détermination de E :

On rappelle que $z \neq \mathbf{i}$. Autrement dit M est distinct de A. On a alors :

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (Z = 0\ \text{ou}\ \arg Z = 0\ [\pi]) \Leftrightarrow \left(z = 1\ \text{ou}\ \arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = 0\ [\pi]\right) \Leftrightarrow (M = B\ \text{ou}\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = 0\ [\pi])$$

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A, M \text{ et } B \text{ alignés}, M \neq A$$

On en déduit : E est la droite (AB) privée du point A

Détermination de F :

On rappelle que $z \neq \mathbf{i}$. On a alors :

$$Z \in \mathbf{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow (Z = 0\ \text{ou}\ \arg(Z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]) \Leftrightarrow \left(z = 1\ \text{ou}\ \arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right)$$

$$Z \in \mathbf{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow (M = B\ \text{ou}\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi])$$

D'où : F est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A

Exercice 3 *Écriture complexe de transformations*

1. $\underline{a = 2}$

Montrons que f admet un unique point invariant. Pour cela on résout l'équation :

$$f(\omega) = \omega$$
$$\omega = 2\omega + 3\mathbf{i}$$
$$\omega = -3\mathbf{i}$$

La transformation f admet un unique point invariant Ω d'affixe $\omega = -3\mathbf{i}$.

Pour déterminer la nature de f on exprime $z' - \omega$ en fonction de $z - \omega$.

On a : $$\begin{cases} z' = 2z + 3\mathbf{i} \\ \omega = 2\omega + 3\mathbf{i} \end{cases}$$

En soustrayant, membre à membre, ces deux égalités, on obtient :

$$z' - \omega = 2(z - \omega)$$

On en déduit, grâce à son écriture complexe, que f est l'homothétie de centre $\Omega(-3\mathbf{i})$ et de rapport $k = 2$.

$\underline{a = -\mathbf{i}}$

Montrons que f admet un unique point invariant. Pour cela on résout l'équation :

$$f(\omega) = \omega$$
$$\omega = -\mathbf{i}\omega + 3\mathbf{i}$$
$$\omega = \frac{3\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} = \frac{3+3\mathbf{i}}{2}$$

La transformation f admet un unique point invariant Ω d'affixe $\omega = \frac{3+3\mathbf{i}}{2}$.

Pour déterminer la nature de f on exprime $z' - \omega$ en fonction de $z - \omega$.

On a : $$\begin{cases} z' = -\mathbf{i}z + 3\mathbf{i} \\ \omega = -\mathbf{i}\omega + 3\mathbf{i} \end{cases}$$

En soustrayant, membre à membre, ces deux égalités, on obtient :

$$z' - \omega = -\mathbf{i}(z - \omega)$$

On en déduit, grâce à son écriture complexe, que f est rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

2.On a : $$AB = A'B' = \sqrt{2}$$

Soit r une rotation de centre Ω et d'angle θ. Son écriture complexe est :

$$z' - \omega = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}(z - \omega)$$

Montrons que l'on peut choisir, de manière unique, $\omega \in \mathbb{C}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$.

La condition $r(A) = A'$ donne : $$2\mathbf{i} - \omega = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}(1 - \omega)$$

La condition $r(B) = B'$ donne : $$1 + \mathbf{i} - \omega = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}(2 + \mathbf{i} - \omega)$$

En soustrayant membre à membre : $$\mathbf{i} - 1 = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}(-1 - \mathbf{i})$$

D'où : $$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = -\mathbf{i}$$
$$\theta = -\frac{\pi}{2} \ [2\pi]$$

On en déduit : $$2\mathbf{i} - \omega = -\mathbf{i}(1 - \omega)$$
$$\omega = \frac{3+3\mathbf{i}}{2}$$

La transformation cherchée est la rotation de centre Ω d'affixe $\frac{3+3\mathbf{i}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 *Lieux de points*

L'idée est de se ramener à une expression du type $Z = \dfrac{z - z_A}{z - z_B}$ afin de pouvoir l'interpréter géométriquement.

Introduisons pour y parvenir le point A d'affixe $-\mathbf{i}$ et le point B d'affixe 1.

1.On a ainsi :

$$Z \text{ réel} \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg(Z) = 0\ [\pi]) \Leftrightarrow (z = z_A \text{ ou } (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0\ [\pi])$$

Or, $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow M$ appartient à la droite (AB) privée de A et B

On en déduit finalement :

E est la droite (AB) privée de B

2. $$|Z| = 2 \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \text{ appartient à la médiatrice de } [AB]$$

F est la médiatrice de $[AB]$

3. $$\arg(Z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

G est le demi-cercle de diamètre $[AB]$, privé de B, tel que le triangle AMB soit direct

Exercice 5 *Utilisation des nombres complexes pour établir une propriété algébrique*

On a : $$ab = |x + \mathbf{i}y|^2\, |z + t\mathbf{i}|^2$$

Et d'après les propriétés des modules : $$ab = |(x + \mathbf{i}y)(z + t\mathbf{i})|^2$$

$$ab = |(xz - yt) + (yz + xt)\mathbf{i}|^2$$

$$ab = (xz - yt)^2 + (yz + xt)^2$$

Or, $xz - yt \in \mathbb{Z}$ et $yz + xt \in \mathbb{Z}$, donc ab est aussi la somme de deux carrés.

Exercice 6 *Identité du parallélogramme*

On a :

$$|Z + Z'|^2 + |Z - Z'|^2 = (Z + Z')(\overline{Z} + \overline{Z'}) + (Z - Z')(\overline{Z} - \overline{Z'}) = Z\overline{Z} + Z\overline{Z'} + Z'\overline{Z} + Z'\overline{Z'} + Z\overline{Z} - Z\overline{Z'} - Z'\overline{Z} + Z'\overline{Z'}$$

$$|Z + Z'|^2 + |Z - Z'|^2 = 2|Z|^2 + 2|Z'|^2$$

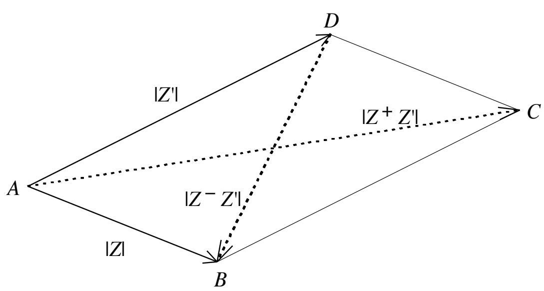
Interprétation :

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Notons Z l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ et Z' l'affixe de $\overrightarrow{AD}$.

On a donc :

$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$

Autrement dit : *dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés*



Exercice 7 *Racines de l'unité. Applications*

1.Déjà, pour tout nombre complexe ω_k défini pour $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ par $\omega_k = \mathbf{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$, on a :

$$\omega_k^n = \mathbf{e}^{2ik\pi} = 1$$

Les éléments de $\mathbb{U}_n$ sont bien des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

Réciproquement, soit z une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité :

$$z^n = 1$$

Notons r le module de z et θ l'argument de z situé dans $[0, 2\pi[$. Ainsi, on a :

$$r^n \mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta} = 1 = \mathbf{e}^{\mathbf{i}0}$$

Or, deux nombres complexes égaux ont même module et des arguments égaux (modulo 2π), d'où :

$$r^n = 1 \text{ et } n\theta \equiv 0\ [2\pi]$$

Comme r est un réel positif, on a nécessairement $r = 1$. D'autre part, l'égalité $n\theta \equiv 0\ [2\pi]$ signifie qu'il existe un entier relatif k tel que :

$$n\theta = 2k\pi$$

$$\theta = \frac{2k\pi}{n}$$

Et comme on a choisi $\theta \in [0, 2\pi[$, il vient :

$$0 \leqslant k < n$$

Et comme k est un entier : $0 \leqslant k \leqslant n-1$

Il y a donc exactement n racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité qui sont les nombres ω_k pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{n}},\ k \in \{0, 1, ..., n-1\} \right\}$$

Avec les notations précédentes, et en notant $\omega = \omega_1$, on constate que :

$$\omega_k = \omega^k$$

La formule de sommation de termes consécutifs d'une suite géométrique donne alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0 \text{ puisque } \omega^n = 1$$

De plus, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$(\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_{k+1}}) = \arg\left(\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k}\right) = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{n}}\ [2\pi]$$

On a noté, par commodité : $\omega_n = \omega_0 = 1$ et $A_n = A_0$

On en déduit que $A_0A_1 ... A_{n-1}$ est un polygone régulier.

2.Applications :

a)On procède comme pour les racines de l'unité. Soit $z = r\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} \in \mathbb{C}^*$

On a :

$$z^n = Z \Leftrightarrow r^n \mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta} = R\mathbf{e}^{\mathbf{i}\Theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = R \\ n\theta \equiv \Theta\pi\ [2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{R} \\ \theta \equiv \frac{\Theta}{n} \left[\frac{2\pi}{n}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{R} \\ \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Et comme on peut toujours choisir $\theta \in \left[\frac{\Theta}{n}, \frac{\Theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right[$, il vient :

$$0 \leqslant k \leqslant n-1$$

Les racines $n^{\text{èmes}}$ de Z sont donc les n nombres complexes suivants :

$$\sqrt[n]{R}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\left(\frac{\Theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \quad , \; 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

Remarque : si on connaît déjà une racine $n^{\text{ème}}$ particulière z_0 de Z, on peut en déduire toutes les autres en multipliant z_0 par les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. En effet :

$$(z_0^n = Z \text{ et } z^n = Z) \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \text{il existe } k \in [\![0, n-1]\!] \text{ tel que } \frac{z}{z_0} = \omega_k$$

D'où : $$(z_0^n = Z \text{ et } z^n = Z) \Leftrightarrow \text{il existe } k \in [\![0, n-1]\!] \text{ tel que } z = \omega_k z_0$$

b)Les racines quatrièmes de l'unité sont : $1, -1, \mathbf{i}$ et $-\mathbf{i}$

On connaît une racine quatrième particulière de -1 :

$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$$

Les racines quatrièmes de -1 sont donc :

$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}},\ -\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}},\ \mathbf{i}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}} \text{ et } -\mathbf{i}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$$

C'est-à-dire : $$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}},\ \mathbf{e}^{-\frac{3\mathbf{i}\pi}{4}},\ \mathbf{e}^{\frac{3\mathbf{i}\pi}{4}} \text{ et } \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$$

Or, les racines de x^4+1 sont précisément les racines quatrièmes de -1. On a donc la factorisation :

$$f(x) = x^4+1 = \left(x - \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{4}}\right)\left(x - \mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}\pi}{4}}\right)\left(x - \mathbf{e}^{\frac{3\mathbf{i}\pi}{4}}\right)\left(x - \mathbf{e}^{-\frac{3\mathbf{i}\pi}{4}}\right)$$

En regroupant les racines deux par deux (en choisissant celles qui sont conjuguées), on obtient :

$$f(x) = \left(x^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)x + 1\right)\left(x^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)x + 1\right)$$

$$f(x) = \left(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1\right)$$

Nota : les amateurs de forme canonique peuvent retrouver ce résultat sans passer par les complexes :

$$x^4+1 = \left(x^2+1\right)^2 - 2x^2 = \left(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1\right)$$

c)On sait que : $$1 + z^4 + z^8 = 0$$

En multipliant par z : $$z + z^5 + z^9 = 0$$

Puis encore : $$z^2 + z^6 + z^{10} = 0$$

$$z^3 + z^7 + z^{11} = 0$$

En sommant les quatre égalités, membre à membre :

$$\sum_{k=0}^{11} z^k = 0$$

Il est clair que z ne peut pas être égal à 1. La formule de sommation de termes consécutifs d'une suite géométrique donne alors :

$$\frac{1-z^{12}}{1-z} = 0$$

D'où : $$z^{12} = 1$$

Donc z est une racine douzième de l'unité.

Exercice 8 *Transformation de a cos x + b sin x*

Si $a = b = 0$, il suffit de choisir $R = 0$ et θ quelconque.

Supposons $(a, b) \neq (0, 0)$ et posons $Z = a + \mathbf{i}b$. On a donc $Z \neq 0$.

Notons : $R = |Z|$ et θ un argument de Z.

On sait qu'alors : $a = |Z| \cos\theta$ et $b = |Z| \sin\theta$

On a ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$a \cos x + b \sin x = R(\cos\theta \cos x + \sin\theta \sin x)$$

Et d'après les formules d'additions :

$$a \cos x + b \sin x = R \cos(x - \theta)$$

Application :

En utilisant ce qui précède en posant $Z = 1 + \mathbf{i}$ ($R = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$), l'équation proposée s'écrit :

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$$

D'où : $$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \quad \text{ou } x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

$$x = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x = 0\ [2\pi]$$

Exercice 9 *Calcul de la valeur exacte de cos(2π/5) et cos(4π/5)*

1.On procède par substitution. La première équation donne :

$$v = -u - \frac{1}{2}$$

En remplaçant v par $-u - \frac{1}{2}$ dans la seconde équation, il vient :

$$u\left(-u - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

En multipliant par -4 et en développant :

$$4u^2 + 2u - 1 = 0$$

On obtient une équation du second degré. Son discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 20$$

Comme $\Delta > 0$, il y a donc deux racines réelles distinctes :

$$u_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

On en déduit les valeurs de v correspondantes :

$$v_1 = -u_1 - \frac{1}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad v_2 = -u_2 - \frac{1}{2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

<u>Conclusion</u> : le système admet deux couples de solutions :

$$S = \left\{ \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \right), \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \right) \right\}$$

2.Il s'agit de la somme de cinq termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{5}}$. On a donc :

$$\omega^0 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1-\omega^5}{1-\omega} = 0 \text{ car } \omega^5 = 1$$

D'où : $$1 + \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{5}} + \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{4\pi}{5}} + \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{6\pi}{5}} + \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{8\pi}{5}} = 0$$

Or : $$\frac{6\pi}{5} \equiv -\frac{4\pi}{5}\ [2\pi] \quad \text{et} \quad \frac{8\pi}{5} \equiv -\frac{2\pi}{5}\ [2\pi]$$

On peut donc écrire : $$1 + \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{5}} + \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{4\pi}{5}} + \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{4\pi}{5}} + \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{2\pi}{5}} = 0$$

Et d'après les formules d'Euler : $$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$$

3.D'après les formules d'additions :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

4.En additionnant, membre à membre, les deux égalités ci-dessus et en utilisant la question 2. :

$$-\frac{1}{2} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4}$$

5.Posons $u = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $v = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. On constate que :

$$\begin{cases} u + v = -\dfrac{1}{2} \\ uv = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

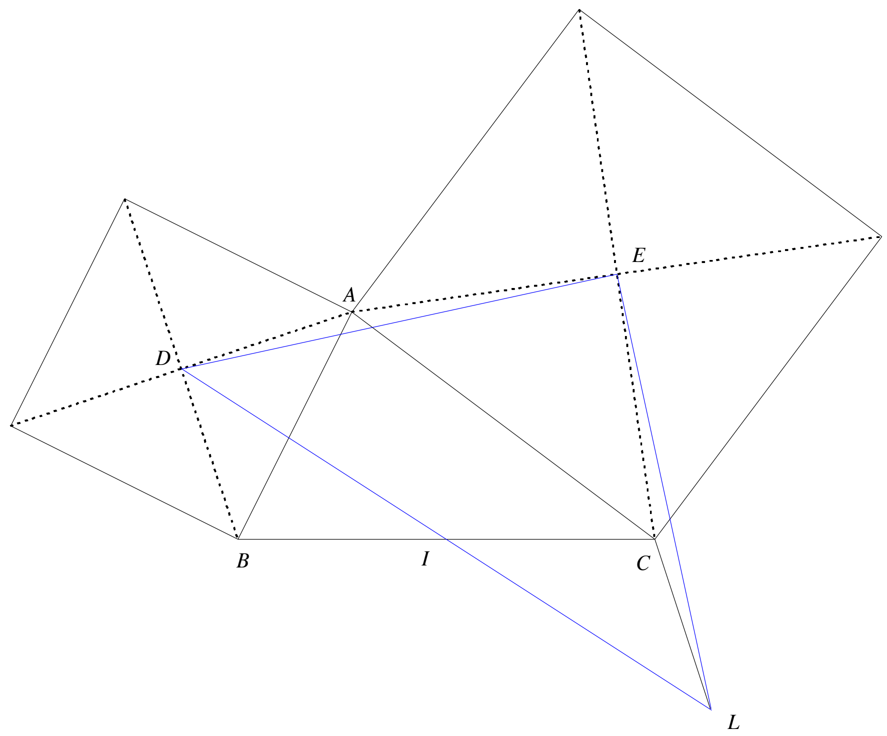
Or, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ car $\frac{2\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) < 0$ car $\frac{4\pi}{5} \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

D'après la question 1, on en déduit :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

Exercice 10 *Carrés et parallélogramme*

1. Figure



2.Munissons le plan d'un repère orthonormal direct $\left(O ; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$.

Notons a, b, c, d, e et l les affixes respectives des points A, B, C, D, E et L.

Comme A est l'image de B par la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$:

$$a - d = \mathbf{i}(b - d)$$

De même dans ACE : $$c - e = \mathbf{i}(a - e)$$

Enfin, puisque L est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$:

$$l = c + b - d$$

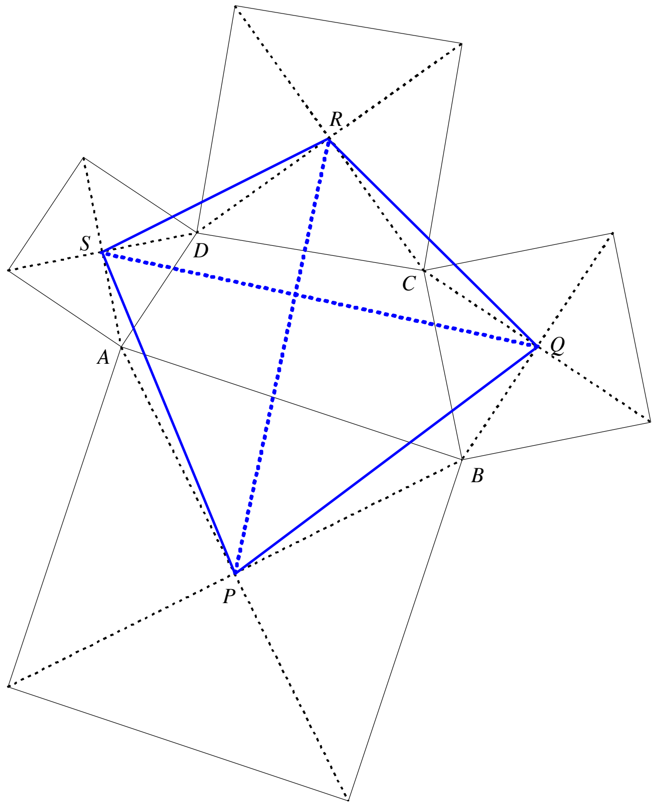
Exprimons $l - e$ en fonction de $d - e$:

$$l - e = c - e + b - d = \mathbf{i}(a - e) - \mathbf{i}(a - d) = \mathbf{i}(d - e)$$

Donc L est l'image de D par la rotation de centre E et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Le triangle EDL est bien rectangle isocèle en E de sens direct.

Exercice 11 *Des carrés autour d'un quadrilatère* (*Théorème de Von Aubel*)



1.Puisque $ABCD$ est de sens direct et que P est le centre du carré construit extérieurement sur $[AB]$, on peut affirmer que A est l'image de B par la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$:

$$a - p = \mathbf{i}(b - p)$$

$$a - \mathbf{i}b = p - \mathbf{i}p$$

D'où :
$$p = \frac{a - \mathbf{i}b}{1 - \mathbf{i}}$$

On obtient de même :

$$q = \frac{b - \mathbf{i}c}{1 - \mathbf{i}}\ ,\ r = \frac{c - \mathbf{i}d}{1 - \mathbf{i}}\ \text{ et } s = \frac{d - \mathbf{i}a}{1 - \mathbf{i}}$$

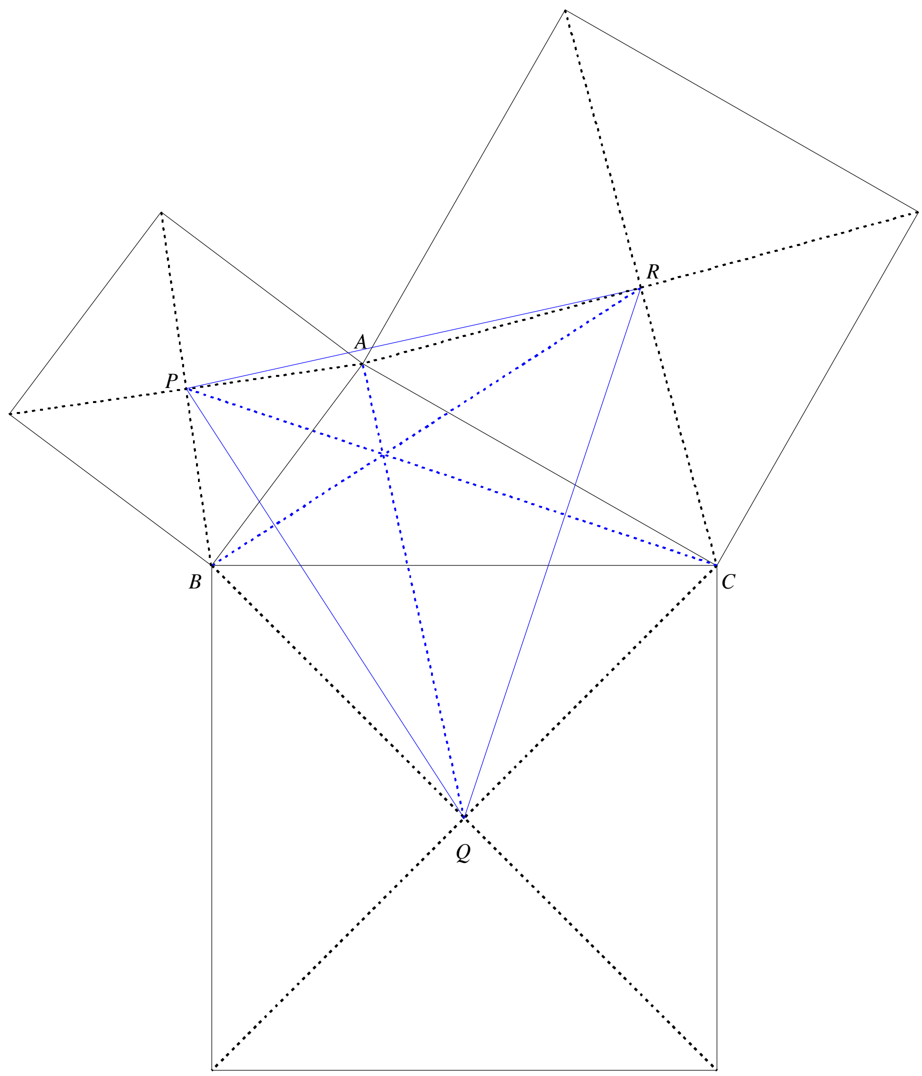
2.On a alors :
$$\frac{s - q}{r - p} = \frac{d - b + \mathbf{i}(c - a)}{c - a + \mathbf{i}(b - d)} = \mathbf{i}$$

On en déduit, d'une part, que les droites (PR) et (QS) sont perpendiculaires.

De plus, comme $\left|\frac{s - q}{r - p}\right| = 1$, on a : $$PR = QS$$

Les diagonales du quadrilatère $PQRS$ sont donc perpendiculaires et de même longueur.

Exercice 12 *Des carrés autour d'un triangle (Point de Vecten)*



1.Comme A est l'image de B par la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$:

$$a - p = \mathbf{i}(b - p)$$

De même :

$$b - q = \mathbf{i}(c - q)$$

$$c - r = \mathbf{i}(a - r)$$

En additionnant membre à membre ces trois égalités :

$$a + b + c - (p + q + r) = \mathbf{i}(a + b + c - (p + q + r))$$

D'où :

$$a + b + c = p + q + r$$

2.De la relation $a - p = \mathbf{i}(b - p)$ on déduit : $p = \dfrac{a - b\mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}}$

De même :

$$q = \frac{b - c\mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}} \quad \text{et} \quad r = \frac{c - a\mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}}$$

3.On a :
$$\frac{r-p}{q-a} = \frac{c-a+\mathbf{i}(b-a)}{b-a+\mathbf{i}(a-c)} = \mathbf{i}$$

On en déduit que les droites (PR) et (AQ) sont perpendiculaires. Autrement dit :

(AQ) est la hauteur issue de A dans le triangle PQR

En raisonnant de même par rapport aux autres côtés, on constate que (BR) et (CP) sont les deux autres hauteurs du triangle PQR.

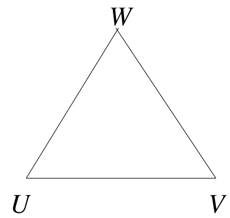
Les droites (AQ), (BR) et (CP) sont donc concourantes.

Exercice 13 *Théorème de Napoléon*

PARTIE A : *des caractérisations du triangle équilatéral*

1.Si UVW est équilatéral de sens direct, alors U est l'image de W par la rotation de centre V et d'angle $\frac{\pi}{3}$:

$$u - v = \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{3}}(w - v)$$



Or : $$-\mathbf{j}^2 = -\mathbf{e}^{\frac{4\mathbf{i}\pi}{3}} = -\mathbf{e}^{-\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi}\,\mathbf{e}^{-\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}} = \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{3}}$$

D'où : $$u - v = -\mathbf{j}^2(w - v)$$

Réciproquement, supposons :

$$u - v = -\mathbf{j}^2(w - v) = \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{3}}(w - v)$$

Alors, U est l'image de W par la rotation de centre V et d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc UVW est équilatéral de sens direct.

2.Supposons UVW équilatéral de sens direct. D'après ce qui précède, on a :

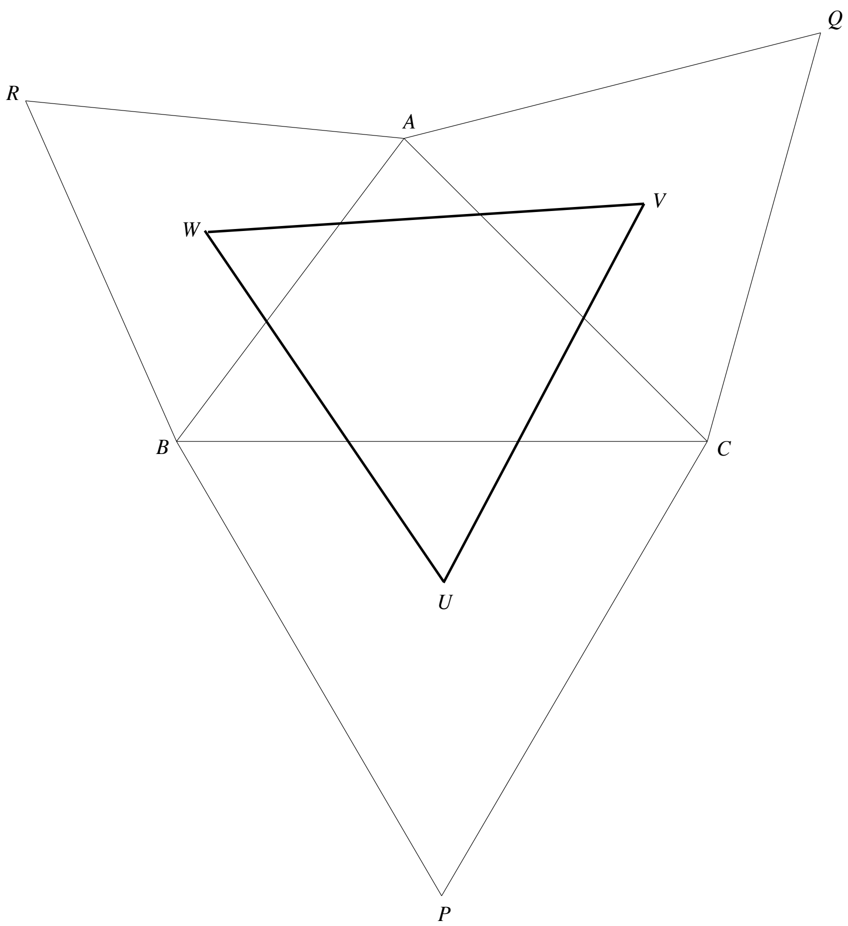
$$u - v = -\mathbf{j}^2(w - v)$$
$$u + (-1 - \mathbf{j}^2)v + \mathbf{j}^2 w = 0$$

Or, $1 + \mathbf{j} + \mathbf{j}^2 = 0$ donc : $$u + \mathbf{j}v + \mathbf{j}^2 w = 0$$

Réciproquement, supposons : $$u + \mathbf{j}v + \mathbf{j}^2 w = 0$$

Alors, par le même calcul : $$u - v = -\mathbf{j}^2(w - v)$$

Et d'après la question 1. : UVW équilatéral de sens direct



PARTIE B : *démonstration du théorème de Napoléon*

Par hypothèse, on a : $a - w = \mathbf{j}(b - w) \quad (E_1)$

$$b - u = \mathbf{j}(c - u) \quad (E_2)$$

$$c - v = \mathbf{j}(a - v) \quad (E_3)$$

En additionnant, membre à membre, les trois égalités, il vient :

$$a + b + c - (u + v + w) = \mathbf{j}(a + b + c - (u + v + w))$$

D'où : $a + b + c = u + v + w$

Ce qui prouve déjà que UVW a le même centre de gravité que ABC.

De (E_1) on déduit : $w = \dfrac{a - b\mathbf{j}}{1 - \mathbf{j}}$

De même avec (E_2) et (E_3) : $u = \dfrac{b - c\mathbf{j}}{1 - \mathbf{j}}$

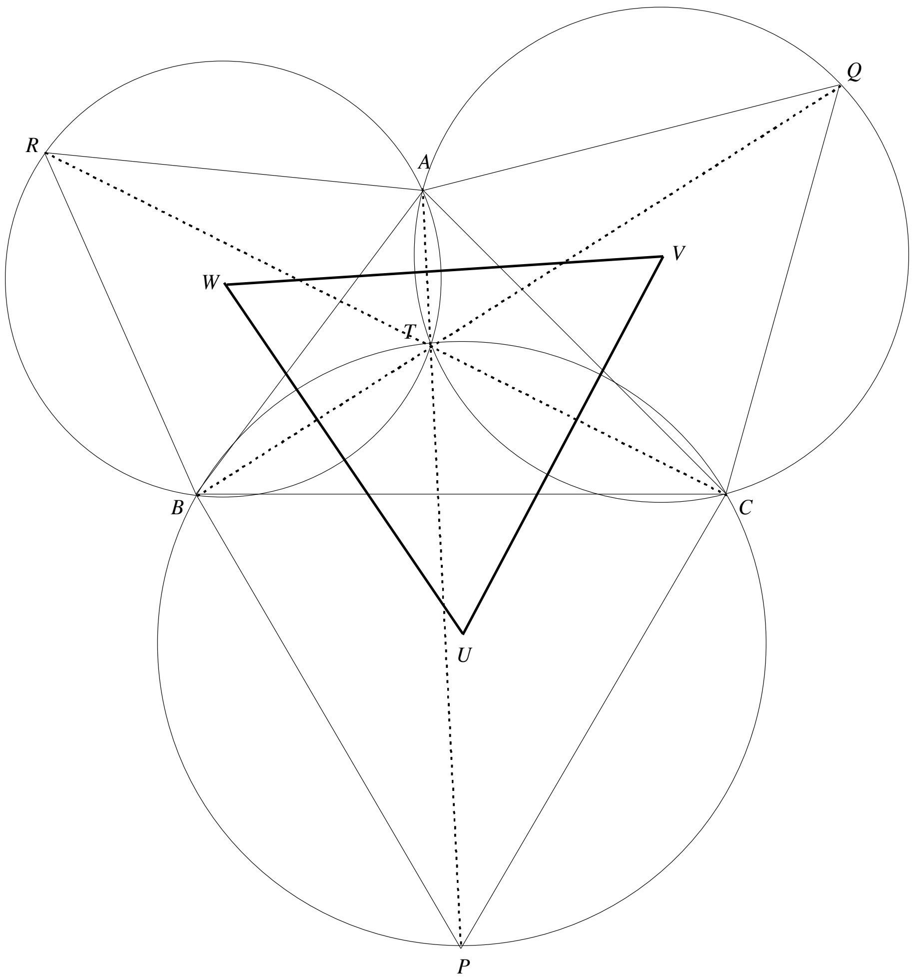
$$v = \frac{c - a\mathbf{j}}{1 - \mathbf{j}}$$

On calcule maintenant :

$$u + \mathbf{j}v + \mathbf{j}^2 w = \frac{b - c\mathbf{j} + \mathbf{j}c - \mathbf{j}^2 a + \mathbf{j}^2 a - \mathbf{j}^3 b}{1 - \mathbf{j}} = 0$$

Donc : UVW est équilatéral de sens direct

Remarque : pour aller plus loin avec cette configuration, on peut aussi démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes en un point T appelé "point de Torricelli". Ce point T possède de belles propriétés : il est le point de concours des cercles circonscrits aux triangles ABC, ABR, ACQ et BCP, c'est aussi le point qui rend minimal la distance $MA + MB + MC$ (lorsque les angles du triangle sont inférieurs à 120°).



Exercice 14 *Nombres complexes et suites*

1.Il s'agit d'une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $z \neq 1$, donc :

$$\sum_{k=0} z^k = \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{2}{1-z} \quad \text{car } z^n = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi} = -1$$

2.On a, pour tout $n \geqslant 2$:

$$1-z = 1-\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{n}} = \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{2n}}\left(\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}\pi}{2n}} - \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{2n}}\right) = -2\mathbf{i}\,\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{2n}} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

D'où :

$$\frac{2}{1-z} = \frac{\mathbf{i}\,\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}\pi}{2n}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{\mathbf{i}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 1 + \mathbf{i}\,\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

3.En identifiant les parties imaginaires, on obtient :

$$S_n = \operatorname{Im}\left(\frac{2}{1-z}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

4.On a, pour tout $n \geqslant 2$:

$$u_n = \frac{1}{n\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

$$u_n = \frac{2}{\pi}\,\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

Or, on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 1$$

$$\left(\text{Car } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$$

Et comme $\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 1$, il vient finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{\pi}$$

On dit que la suite (S_n) converge "en moyenne" vers $\frac{2}{\pi}$.