Méthodes de prévision quantitatives

Plan :

Première partie : La technique de régression.

Deuxième partie : Les moyennes mobiles.

Troisième partie : Le lissage.

Premiére partie :
La régression

I - La régression linéaire simple :

On est intéressé à la régression quand on veut savoir jusqu'à quel point on peut prédire la valeur d'une variable en connaissant la valeur d'une autre variable.

La RLS permet d’évaluer s’il existe une relation fonctionnelle linéaire entre une variable explicative quantitative x et d’une variable expliquée quantitative y.

On veut calculer Y à partir de X, c'est-à-dire :

$$Y_i = f(X_i).$$

les variables Y et X sont appelées :

X	Y
• variable expliquée	• variable explicative
• variable indépendante	• Variable dépendante
• variable prédite	• variable prédicatrice
• variable de réponse	• variable de contrôle

Le modèle de régression simple s’écrit :

$$Yi = a \,.\, Xi + b \qquad \text{où} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

b : est le terme constant du modèle c'est-à-dire la valeur moyenne de Y quand X vaut 0,

a : est la pente de la droite,

n : est la taille de l'échantillon

Le modèle tel qu’il vient d’être spécifié n’est qu’une caricature de la réalité. En effet ne retenir que X pour expliquer Y est insuffisant. Il existe une multitude d’autres facteurs susceptibles d’expliquer Y c’est pourquoi nous ajoutons Ui qui synthétise l’ensemble des phénomènes explicatifs de Y et non liés à X.

Ui quantifie les écarts entre les valeurs réellement observées et les valeurs prédites par le modèle.

La droite de régression devient donc :

$$Yi = a \cdot Xi + b + Ui$$

Le terme Ui regroupe :

- <u>**Une erreur de spécification**</u> : le fait que la seule variable explicative n'est pas suffisante pour rendre compte de la totalité du phénomène expliqué.

- <u>**Une erreur de fluctuation d'échantillonnage**</u> : d'un échantillon à l'autre les observations et donc les estimations sont légèrement différentes. (Si on change d'échantillon, on peu obtenir un résultat différent).

Ce modèle est linéaire car l'effet de x sur y est linéaire :

$$\Delta Y = a.\ \Delta X \quad \text{si } \Delta U = 0$$

Donc le but est de minimiser l'écart.

L'utilisation de la méthode des moindres carrée :

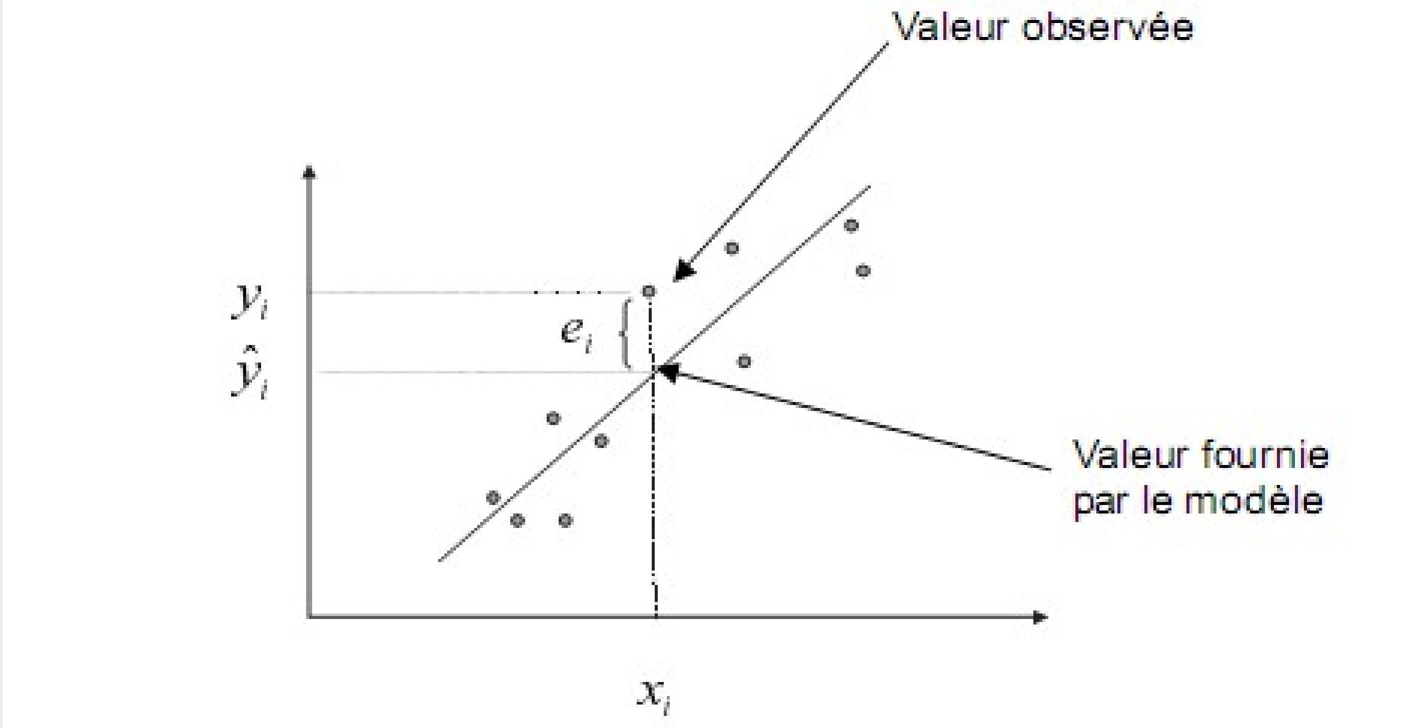
L'estimation par la méthode des moindres carrés ordinaires permet de déterminer la droite qui s'ajuste au mieux aux valeurs observées cette droite est appelée droite de régression de Y en fonction de X ou droite des moindres carrés de y on fonction de x.

Ainsi cette méthode repose sur la minimisation des carrés des résidus

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

Ou encore la minimisation de l'expression

$$E = \sum \hat{U}_i^{\,2}$$



Où :

x_i *: est la valeur observée de la variable explicative x.*

y_i *: est la valeur observée de la variable à expliquer y.*

$\hat{y}_i$ *: est la valeur théorique, ou ajustée ou encore calculé*

e_i *: est l'erreur d'ajustement (ou résidu), qu'on nommera ici Ui.*

On montre que les coefficients: â et, $\hat{b}$ de la droite de régression de y en x s'expriment en fonction des données par :

$$\hat{Y} = \hat{a}\,X + \hat{b}$$

Où :

$$\boxed{\hat{a} = \frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)\cdot\left(y_i - \overline{y}\right)}{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2}}$$

$$\boxed{\hat{b} = \bar{Y} - \hat{a}\,\bar{X}}$$

Exemple :

Soit un échantillon de 10 observations qui concernent les salariés d'une firme de chocolat. Où Xi est le nombre d'heures travaillées (par salarié) et Yi est la quantité de biens produite (par le salarié). Le directeur de cette entreprise souhaite étudier la relation qui existe entre la quantité de biens produite par le salarié et le nombre d'heures travaillées.

Xi	10	7	10	5	8	8	6	7	9	10
Yi	11	10	12	6	10	7	9	10	11	10

n°	Y	X	$(Y-\bar{Y})$	(X-XB)	(Y-YB)(X-XB)	(X-XB)^2
1	11	10	1,4	2	2,8	4,000
2	10	7	0,4	-1	-0,4	1,000
3	12	10	2,4	2	4,8	4,000
4	6	5	-3,6	-3	10,8	9,000
5	10	8	0,4	0	0	0,000
6	7	8	-2,6	0	0	0,000
7	9	6	-0,6	-2	1,2	4,000
8	10	7	0,4	-1	-0,4	1,000
9	11	9	1,4	1	1,4	1,000
10	10	10	0,4	2	0,8	4,000
Maryanne	9,6	8		Somme	21	28,000

En appliquant les formules de calcul de â et de $\hat{b}$ nous trouverons :

â = 21 / 28 â = 0.75

$\hat{b}$ = 9.6 - 0.75*8 $\hat{b}$ = 3.6

La droite de régression est donc :

$$\boxed{\hat{Y}} = 0.75\,X + 3.6$$

Le nombre d'heures travaillé agit positivement sur les quantités produites, ce qui est normal, ce qui peut paraître anormal ici, même si on travaille pas il y a une production de 3.6 unités, ce qui peut être justifié par l'influence d'autres variables.

Le Coefficient de Corrélation :

Sert à mesurer l'intensité de la liaison linéaire éventuelle entre les deux variables.
Son objectif est de quantifier la liaison entre X et Y de manière à mettre en évidence le sens de la liaison et la force de liaison.

$$r_{x;y} = \frac{\operatorname{cov}\left(x, y\right)}{\delta_x \delta_y} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}$$

Trois situations :

❖ ***Si r est proche de 1*** *: il y a une liaison linéaire marquée, et les deux variables varient dans le même sens.*

❖ ***Si r est proche de 0 :*** *il n'y a pas de liaison linéaire.*

❖ ***Si r est proche de –1 :*** *il y a une liaison linéaire marquée, et les deux variables varient en sens contraire.*

n°	Y	X	(Y-Ȳ)	(X-XB)	(Y-YB)(X-XB)	(X-XB)^2	(Y-Ȳ)^2
1	11	10	1,4	2	2,8	4,00	1,96
2	10	7	0,4	-1	-0,4	1,00	0,16
3	12	10	2,4	2	4,8	4,00	5,76
4	6	5	-3,6	-3	10,8	9,00	12,96
5	10	8	0,4	0	0	0,00	0,16
6	7	8	-2,6	0	0	0,00	6,76
7	9	6	-0,6	-2	1,2	4,00	0,36
8	10	7	0,4	-1	-0,4	1,00	0,16
9	11	9	1,4	1	1,4	1,00	1,96
10	10	10	0,4	2	0,8	4,00	0,16
Moyenne	9,6	8		**somme**	21	28,00	30,40

Coefficient de Corrélation =

$$r_{x;y} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{21}{\sqrt{28} * \sqrt{30.4}} = 0.7198$$

Dans notre cas, comme le coefficient de corrélation est proche de 1, il y a une liaison entre les deux variables et ils varient dans le même sens.

Le coefficient de détermination (test d'efficacité des ajustements)

Le rapport est une mesure de la capacité des variables explicatives à faire varier les variables endogènes autrement dit est une mesure du pouvoir explicatif que les X peuvent avoir sur les Y. Ce coefficient est un indicateur de qualité de l'ajustement réalisé, plus est important plus le modèle est bon.

Objectif : *-Évaluer le degré d'association entre les deux variables*

-Juger la qualité de l'ajustement par la droite de régression .

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{\text{variation expliquée}}{\text{variation totale}}$$

Mesure la qualité de la liaison entre les Y_i observées et les $\hat{Y}_i$ estimés ou calculés par le modèle.

n°	Y	X	(Y-Ȳ)	Y^	Résidus	Résidus^2	(Y-Ȳ)^2
1	11	10	1,4	11,100	-0,100	0,010	1,96
2	10	7	0,4	8,850	1,150	1,323	0,16
3	12	10	2,4	11,100	0,900	0,810	5,76
4	6	5	-3,6	7,350	-1,350	1,823	12,96
5	10	8	0,4	9,600	0,400	0,160	0,16
6	7	8	-2,6	9,600	-2,600	6,760	6,76
7	9	6	-0,6	8,100	0,900	0,810	0,36
8	10	7	0,4	8,850	1,150	1,323	0,16
9	11	9	1,4	10,350	0,650	0,423	1,96
10	10	10	0,4	11,100	-1,100	1,210	0,16
Moyenne	9,6	8		**Somme**	0,000	14,650	30,400

Le Coefficient de Détermination =

$$R^2 = 1 - \frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sum (Y_i - \overline{Y})^2} = 1 - \frac{14.650}{30.400} = 0.5181$$

Cela veut dire que 51.81 % de Y est expliqué par X et que presque la moitié est laissé à la valeur résiduelle.

II- La régression linéaire multiple :

- ***Lors de la partie précédente, nous avons considéré qu'une variable endogène est expliquée à l'aide d'une seule variable exogène.***

- ***Cependant, il est extrêmement rare qu'un phénomène économique ou social puisse être appréhendé par une seule variable.***

- ***La régression linéaire multiple permet d'étudier donc la relation qui peut exister entre une variable endogène et au moins 2 variables exogènes notées Xi.***

Le modèle de régression linéaire multiple peut s'exprimer sous la forme :

$$y_i = b + a_1 x_{i,1} + \ldots + a_{i,p} x_{i,p} + u_i$$

Voir annexe :
Le fichier
Excel

Deuxième partie :
Les moyennes mobiles.

- ***Pour cette moyenne, seules les observations les plus récentes sont utilisées pour calculer la prévision.***

- ***Cette méthode nécessite de conserver un grand nombre de données en mémoire.***

I- Moyenne mobile simple :

Méthode

À partir d'un ensemble de valeurs observées, on calcule leur moyenne et on utilise la moyenne comme prévision de la prochaine période.

Remarques:

- *Pour calculer la moyenne mobile, il faut disposer des valeurs des «N» dernières observations.*
- *Cette méthode donne un poids égal à chacune des «N» dernières valeurs de la série, et un poids égal à zéro aux valeurs observées avant.*
- *Chaque nouvelle prévision basée sur une moyenne mobile est un ajustement de la précédente moyenne mobile.*
- *L’effet de lissage augmente quand «N» augmente (ajustement beaucoup plus faible d’une prévision à l’autre)*

Exemple :

Période	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Observations de la demande	2000	1350	1950	1975	3100	1750	1550	1300	2200	2770	2350	

Calcul de moyenne mobile sur 3 mois

Mois	Période	Observations	Moyenne mobile de 3 mois
Janvier	1	2000	
Février	2	1350	
Mars	3	1950	
Avril	4	1975	1767
Mai	5	3100	1758
Juin	6	1750	2347
Juillet	7	1550	2275
Août	8	1300	2133
Septembre	9	2200	1533
Octobre	10	2770	1683
Novembre	11	2350	2000

Calcul de moyenne mobile sur 5 mois

Mois	Période	Observations	Moyenne mobile de 3 mois	Moyenne mobile sur 5 mois
Janvier	1	2000		
Février	2	1350		
Mars	3	1950		
Avril	4	1975	1767	
Mai	5	3100	1758	
Juin	6	1750	2347	2075
Juillet	7	1550	2275	2025
Août	8	1300	2133	2065
Septembre	9	2200	1533	1935
Octobre	10	2770	1683	1380

La mesure de l'erreur :

- *La valeur réelle observée est déterminée par une loi d'une part , et par l'intervention du hasard d'autre part (Réel: loi + hasard)*

- *Il existe un écart entre les valeurs prévus et les valeurs réellement observées.*
  - *un but commun à toutes les techniques est de minimiser ces écarts.*

La mesure de l'erreur (suite)

- *On définit l'erreur de prévision comme étant la différence entre la valeur réelle et la valeur prédite :*

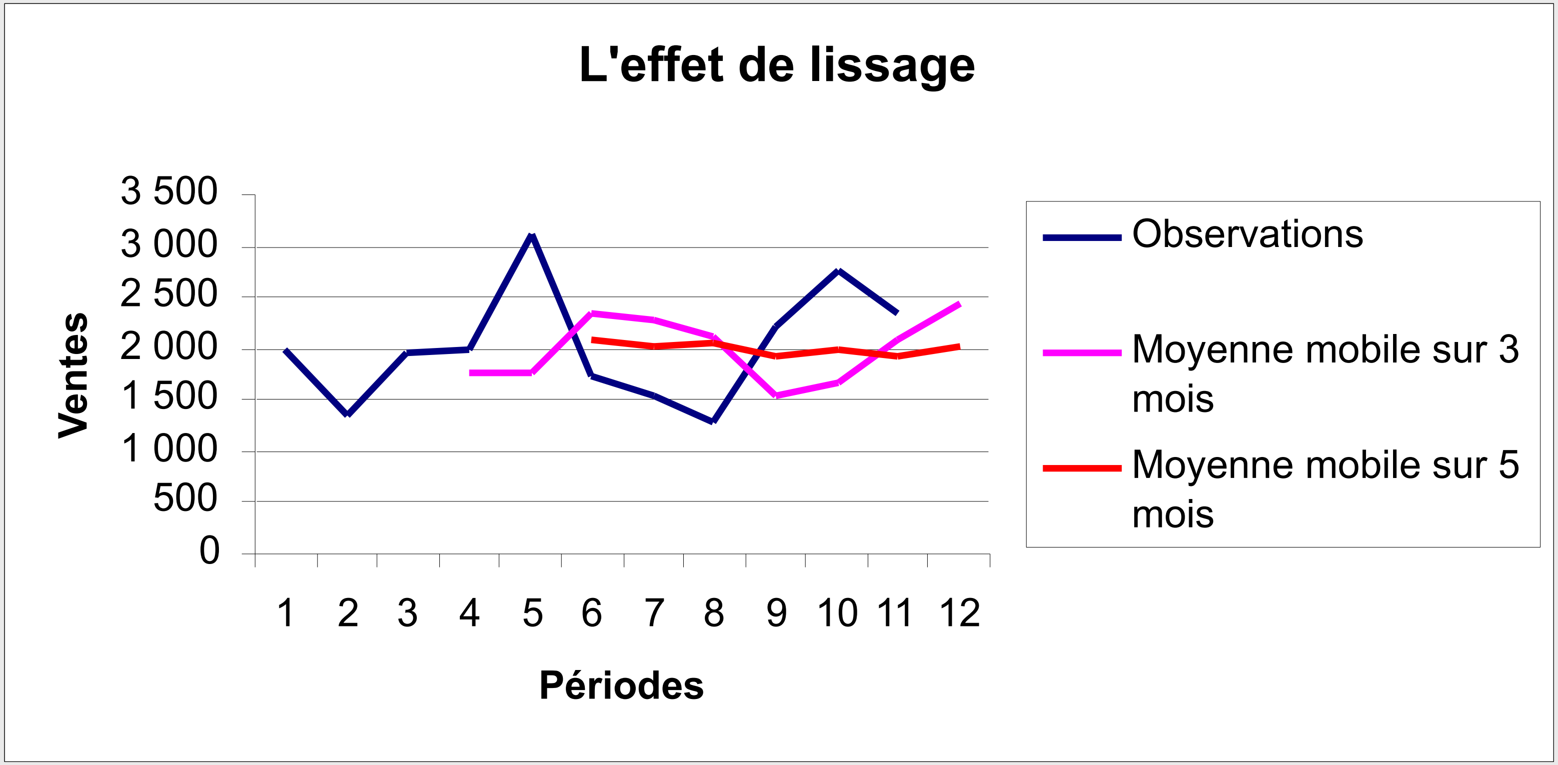
$$E_i = o_i - p_i$$

- *O = l'observation pour la période i et P = la prévision pour la même période*
- *Le choix de la technique repose sur:*
  - *Le calcul de la moyenne de **l'erreur absolue** et du **carré moyen de l'erreur** pénalise une prévision pour ses écarts extrêmes que les écarts faibles.*

Exemple :

PÉRIODE	OBSERVATION DE LA DEMANDE	PRÉVISION MOYENNE MOBILE DE 3 MOIS	ERREUR	ERREUR ABSOLUE	CARRÉ DE L'ERREUR	PRÉVISION MOYENNE MOBILE DE 5 MOIS	ERREUR	ERREUR ABSOLUE	CARRÉ DE L'ERREUR
1	2 000								
2	1 350								
3	1 950								
4	1 975	1 767	208	208	43 264				
5	3 100	1 758	1 342	1 342	1 800 954				
6	1 750	2 342	-592	592	350 464	2 075	-325	325	105 625
7	1 550	2 275	-725	725	525 625	2 025	-475	475	225 625
8	1 300	2 133	-833	833	693 889	2 065	-765	765	585 225
9	2 200	1 533	667	667	448 889	1 935	265	265	70 225
10	2 770	1 683	1 087	1 087	1 181 569	1 980	-790	790	624 100
11	2 350	2 090	260	260	67 600	1 914	435	435	190 096
12		2 440				2 034			
		Somme	1 414	5714	5 108 264		-1 665	3 055	1 800 025
		Moyenne	177	714	638 533		-276	509	300 004

Effet de lissage visualisé :



Remarques:

- *Pour calculer la moyenne mobile, il faut disposer des valeurs des «N» dernières observations.*

- *L'effet de lissage augmente quand «N» augmente (ajustement beaucoup plus faible d'une prévision à l'autre).*

Représentation Mathématique :

Les prévisions se calculent de la façon suivante

$$P_{t+1} = \frac{\sum_{i=t-m+1}^{t} X_i}{m}$$

où m = observations considérées (ordre de la moyenne mobile)

t = la dernière période pour laquelle nous considérons une observation

Remarques:

- *Cette méthode donne un poids égal à chacune des «N» dernières valeurs de la série, et un poids égal à zéro aux valeurs observées avant.*
- *Chaque nouvelle prévision basée sur une moyenne mobile est un ajustement de la précédente moyenne mobile.*
- *L'effet de lissage augmente quand «N» augmente (ajustement beaucoup plus faible d'une prévision à l'autre)*

II- Moyenne mobile double :

La méthode des moyennes mobiles doubles calcule au départ un jeu de moyennes mobiles simples et calcule ensuite une seconde moyenne mobile basée sur les valeurs de la première moyenne mobile simple.

1 période	2 Balance d'inventaire réelle
1	140
2	159
3	136
4	157
5	173
6	131
7	177
8	188
9	154
10	179
11	180
12	160

Exemple :

- Calculer la moyenne mobile simple sur 4 mois.
- Calculer la moyenne mobile double sur 4 mois.
- Chercher à perfectionner les résultats obtenus.

Moyenne mobile simple sur 4 mois.

1 période	2 Balance d'inventaire réelle	3 Moyenne mobile de (2) sur 4 mois
1	140	
2	159	
3	136	
4	157	
5	173	148
6	131	156.25
7	177	149.25
8	188	159.5
9	154	167.25
10	179	162.5
11	180	174.5
12	160	175.25

Moyenne mobile double sur 4 mois.

1 période	2 Balance d'inventaire réelle	3 Moyenne mobile de (2) sur 4 mois	4 Moyenne mobile de (3) sur 4 mois
1	140		
2	159		
3	136		
4	157		
5	173	148	
6	131	156.25	
7	177	149.25	
8	188	159.5	153.25
9	154	167.25	158.062
10	179	162.5	159.625
11	180	174.5	165.937
12	160	175.25	169.875

Perfectionnement des résultats obtenus :

1 période	2 Balance d'inventaire réelle	3 Moyenne mobile de (2) sur 4 mois	4 Moyenne mobile de (3) sur 4 mois	5 Valeur de a
1	140			
2	159			
3	136			
4	157			
5	173	148		
6	131	156.25		
7	177	149.25		
8	188	159.5	153.25	165.75
9	154	167.25	158.062	176.437
10	179	162.5	159.625	165.375
11	180	174.5	165.937	183.062
12	160	175.25	169.875	180.625

1 période	2 Balance d'inventaire réelle	3 Moyenne mobile de (2) sur 4 mois	4 Moyenne mobile de (3) sur 4 mois	5 Valeur de a	6 Valeur de b
1	140				
2	159				
3	136				
4	157				
5	173	148			
6	131	156.25			
7	177	149.25			
8	188	159.5	153.25	165.75	+4.16667
9	154	167.25	158.062	176.437	+6.125
10	179	162.5	159.625	165.375	+1.91667
11	180	174.5	165.937	183.062	+5.70833
12	160	175.25	169.875	180.625	+3.58333

1 période	2 Balance d'inventaire réelle	3 Moyenne mobile de (2) sur 4 mois	4 Moyenne mobile de (3) sur 4 mois	5 Valeur de a	6 Valeur de b	7 Valeur de a + bm pour m=1 (prévision)
	140					
	159					
1	136					
2	157					
5	173	148				
6	131	156.25				
7	177	149.25				
8	188	159.5	153.25	165.75	+4.16667	=170
9	154	167.25	158.062	176.437	+6.125	=182.5
10	179	162.5	159.625	165.375	+1.91667	=167
11	180	174.5	165.937	183.062	+5.70833	=189
12	160	175.25	169.875	180.625	+3.58333	=184

Modèle mathématique pour le calcul de la moyenne mobile double :

Colonne 3 :

$$S'_t = \frac{x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \ldots\ldots + x_{t-N+1}}{N}$$

Oŭ St est la prévision pour la période t
Xt est la valeur réelle de la période t,
N est le nombre de valeurs incluses dans la moyenne.

Colonne 4

$$S''_t = \frac{S_t + S_{t-1} + S_{t-2} + \ldots\ldots + S_{t-N+1}}{N}$$

Oŭ St est la prévision pour la période t
N est le nombre de valeurs incluses dans la moyenne.

Colonne 5

$$a_t = 2S'_t - S''_t$$

Colonne 6

$$b_t = \frac{2}{N-1}(S'_t - S''_t)$$

Colonne 7

$$S_{t+m} = a + b_t m$$

Exemple :

$$S_{12} = 2 * 175.25 - 169.875 + 3.58333 = 184$$

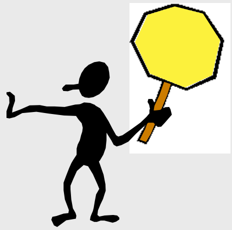
Troisième partie :
Le lissage

Deux limites majeures dans l'emploi des moyennes mobiles ont conduit de nombreux utilisateurs de prévisions à les remplacer par le lissage exponentiel.

pour calculer une prévision par la moyenne mobile, il est nécessaire de **stocker les N dernières valeurs observées**.

la méthode des moyennes mobiles donne un poids égal à chacune des N dernières observations et **aucun poids aux observations relevées avant la période (t-N)**

I- Le lissage exponentiel simple :



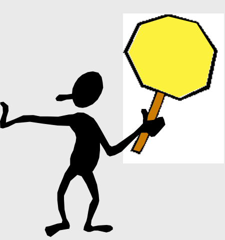
le lissage exponentiel applique le plus grand poids à l'observation la plus récente, et des poids décroissants aux valeurs plus anciennes.

❖Dans le principe, le lissage exponentiel fonctionne d'une manière analogue aux moyennes mobiles, par « lissage » des observations historiques, en vue d'éliminer leur contenu aléatoire. Le procédé mathématique permettant de réaliser ce lissage, cependant, est quelque peu différent de celui qu'on utilise dans les moyennes mobiles.

la forme générale utilisée pour le calcul d'une prévision par la méthode du lissage exponentiel :

$$\boxed{S_{t+1} = \beta * x_t + (1-\beta) S_t}$$

Nous avons une prévision qui pondère l'observation la plus récente par le coefficient β et la prévision la plus récente par le coefficient 1-.β



On remarque immédiatement qu'elle élimine un des problèmes associés aux moyennes mobiles.

Développant la dernière formule en substituant la valeur St nous avons :

$$\boxed{S_{t+1} = \beta * x_t + (1-\beta)\, S_t}$$

$$\boxed{S_{t+1} = \beta * x_t + (1-\beta) * (\beta\, x_{t-1} + (1-\beta)\, S_{t-1})}$$

$$\boxed{S_{t+1} = \beta * x_t + \beta(1-\beta) * x_{t-1} + (1-\beta)^2 * S_{t-1}}$$

En poussant plus loin la substitution, on obtient la relation générale :

$$\boxed{S_{t+1} = \beta * x_t + \beta(1-\beta) * x_{t-1} + \beta(1-\beta)^2 * x_{t-2} + \beta(1-\beta)^3 * x_{t-3} + \ldots\ldots}$$

Att le deuxième avantage du lissage

Voici, un autre moyen d'écrire le lissage exponentiel qui est très facile à appliquer et qui garde le même principe :

$$\boxed{S_{t+1} = S_t + \beta * (x_t - S_t)}$$

Sous cette forme, la nouvelle prévision par lissage exponentiel est simplement l'ancienne prévision plus β fois l'erreur de l'ancienne prévision, car xt – St est l'erreur de cette dernière prévision.

Il est évident que quand ;

- **β est proche de 1, la nouvelle prévision contient un réajustement substantiel tenant compte d'une erreur dans la prévision précédente. Inversement,**
- **quand β est proche de zéro, la nouvelle prévision ne contient qu'un faible ajustement résultant de l'erreur dans l'ancienne prévision.**

Comparaison avec les mb **β et nbre de N**

Application :

- ✓Utilisons les mêmes données de l’exemple de la prévision des demandes des couteaux.

- ✓Le tableau indique les valeurs calculées de la prévision pour $\beta=0.1$, $\beta=0.5$ et $\beta=0.9$.

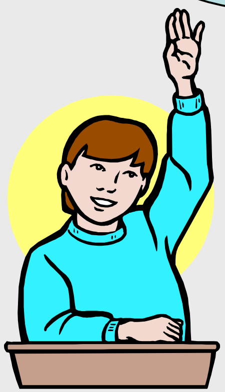
- ✓Pour la première période, aucune prévision plus ancienne n’est disponible et le mieux qu’on puisse faire est d’utiliser la valeur observée.

* Prévisions de la demande des couteaux, un mois à l'avance, par lissage exponentiel :

Mois	Période	Demande observée	valeurs lissées exponentiellement $\beta = 0,1$	$\beta = 0,5$	$\beta = 0,9$
janvier	1	2000	,,,,,,	,,,,,,	,,,,,,
février	2	1350	2000	2000	2000
mars	3	1950	1935	1675	1415
avril	4	1975	1937	1813	1897
mai	5	3100	1940	1894	1967
juin	6	1750	2056	2497	2987
juillet	7	1550	2026	2123	1874
août	8	1300	1978	1837	1582
septembre	9	2200	1910	1568	1328
octobre	10	2775	1939	1884	2113
novembre	11	2350	2023	2330	2709
décembre	12	,,,,,,	2056	2340	2386

La question qui se pose maintenant, est la suivante :

Pour ces trois valeurs de β, laquelle choisir ?



On procède à l’analyse du carré moyen de l’erreur et l’écart absolu moyen pour comparer ces différents procédés de prévisions.

		Prévisions avec β = 0,1			Prévisions avec β = 0,5			Prévisions avec β = 0,9		
P	**Demande observée**	**Erreur**	**Erreur absoulue**	**Carré de l'erreur**	**Erreur**	**Erreur absoulue**	**Carré de l'erreur**	**Erreur**	**Erreur absoulue**	**Carré de l'erreur**
1	2000	,,,,,,	,,,,,,	,,,,,,	,,,,,,	,,,,,,	,,,,,,	,,,,,,	,,,,,,	,,,,,,
2	1350	650	650	422500	650	650	422500	650	650	422500
3	1950	-15	15	225	-275	275	75625	-535	535	286225
4	1975	-39	39	1482	-163	163	26406	-79	79	6162
5	3100	-1160	1160	1344788	-1206	1206	1455039	-1133	1133	1283349
6	1750	306	306	93829	747	747	557822	1237	1237	1529464
7	1550	476	476	226275	573	573	328831	324	324	104763
8	1300	678	678	459840	537	537	288067	282	282	79731
9	2200	-290	290	83924	-632	632	398970	-872	872	759971
10	2775	-836	836	698439	-891	891	793561	-662	662	438477
11	2350	-327	327	107030	-20	20	417	359	359	128725
12	,,,,,,	,,,,,,	,,,,,,	,,,,,,	,,,,,,	,,,,,,	,,,,,,	,,,,,,	,,,,,,	,,,,,,
	Totat	**-556**	**4776**	**3438332**	**-680**	**5694**	**4347237**	**-429**	**6132**	**5039368**
	Moy	**-56**	**478**	**343833**	**-68**	**569**	**434724**	**-43**	**613**	**503937**

On voit clairement que β = 0.1 donne des prévisions bien meilleurs que les grandes valeurs de β. Ceci est vrai tant pour l'écart absolu moyen que pour le carré moyen de l'erreur.

En résumé :

Pour les moyennes mobiles et le lissage exponentiel, il n’y a pas de règle idéale pour déterminer la pondération appropriée :

- ❖ Dans la moyenne mobile, on doit décider et spécifier le nombre d’observations à inclure dans la moyenne.

- ❖ Pour le lissage exponentiel, il s’agit de choisir une valeur de β. La plupart du temps, on procède expérimentalement, en essayant 2 ou 3 valeurs différentes pour voir quelle est la plus approprié.

II- Lissage exponentiel double :

- le lissage exponentiel double fonctionne de la même façon que les moyennes mobiles doubles, sans souffrir de ces deux limitations.

- Le concept de base implicitement contenu dans le lissage exponentiel double est tout à fait analogue à celui des moyennes mobiles doubles.

- L'application du lissage exponentiel simple à une série chronologique comportant une loi de tendance donne des résultats systématiquement inférieures à la tendance modifiée.

Donc, on utilise le lissage exponentiel double quand il y a une tendance.

Avec les mêmes notations mathématiques que celles utilisées pour la discussion des moyennes mobiles doubles, nous pouvons résumer les étapes du lissage exponentiel double.

Lissage expo simple : $$S'_t = \beta\, x_{t-1} + (1-\beta) * S'_{t-1}$$

Lissage expo double : $$S''_t = \beta\, S'_t + (1-\beta) * S''_{t-1}$$

Valeur de a : $$a_t = 2 * S'_t - S''_t$$

Valeur de b : $$b_t = \frac{\beta}{1-\beta} * (S'_t - S''_t)$$

Prévision m périodes à l'avance :

$$S_{t+m} = a_t + b_t * m$$

Où :

❖ **β** est la constante du lissage exponentiel,

❖ m est le décalage de la prévision dans le futur, exprimé en nombre de périodes.

Exemple :

La demande mensuelle d'un bien sur le marché est la suivante :

Période	Demande
1	143
2	152
3	161
4	139
5	137
6	174
7	142
8	141
9	162
10	180
11	164
12	171
13	206
14	193
15	207
16	218
17	229
18	225

Période	Demande	lissage exponentiel simple	lissage exponentiel double
1	143		
2	152	143	143
3	161	144,8	143,36
4	139	148,04	144,296
5	137	146,232	144,6832
6	174	144,3856	144,62368
7	142	150,30848	145,76064
8	141	148,646784	146,337869
9	162	147,117427	146,49378
10	180	150,093942	147,213813
11	164	156,075153	148,986081
12	171	157,660123	150,720889
13	206	160,328098	152,642331
14	193	169,462479	156,006361
15	207	174,169983	159,639085
16	218	180,735986	163,858465

On a donné $\beta = 0.2$.

144.8=0.2*152+0.8*143

143.36=0.2*144.8+0.8*
143

lissage expo simple	lissage expo double	valeur de a	valeur de b	prévision valeur de a + bm (si m=1)
143	143			
144,8	143,36	146,240	0,36	147
148,04	144,296	151,784	0,936	153
146,232	144,6832	147,781	0,3872	148
144,3856	144,62368	144,148	-0,05952	144
150,30848	145,76064	154,856	1,13696	156
148,646784	146,337869	150,956	0,5772288	152
147,117427	146,49378	147,741	0,15591168	148
150,093942	147,213813	152,974	0,72003226	154
156,075153	148,986081	163,164	1,77226813	165
157,660123	150,720889	164,599	1,73480837	166
160,328098	152,642331	168,014	1,92144179	170
169,462479	156,006361	182,919	3,3640295	186
174,169983	159,639085	188,701	3,63272446	192
180,735986	163,858465	197,614	4,21938026	202

146.240=2*144.8 -143.36

0.36=(0.2/0.8)*(144.8—143.36)

147=146.24+0.36

Effectuons une prévision pour le 17éme, le 18ème et le 20ème mois :

On a :

$$S_{t+m} = a_t + b_t * m$$

17ème mois : 202 unités

18ème mois : 197.614 + 2 * 4.21938 = 207 unités

20ème mois : 197.614 + 4 * 4.21938 = 214 unités

Fin