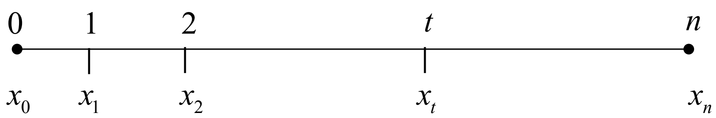
Chapitre 4 :Les indices statistiques

I- Facteurs de croissance et taux de croissance.

On s'intéresse à l'évolution d'une grandeur X sur une période de longueur n. On notera par x_t la valeur prise par X à l'instant t.



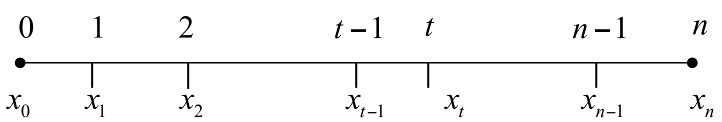
1) Définitions :

a) On appelle facteur de croissance de X entre $t-1$ et t, le rapport $f_t = \frac{x_t}{x_{t-1}}$ (avec 1).

b) On appelle taux de croissance de X entre $t-1$ et t le rapport $\tau_t = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}}$. Il est présenté généralement en % avec comme précision 3 chiffres après la virgule.

c) On appelle facteur de croissance globale de X sur la période $[0,n]$, le rapport : $F_n = \frac{x_n}{x_0}$.

d) On appelle facteur de croissance moyen de X sur la période $[0,n]$, la grandeur f définie par : $f^n = \frac{x_n}{x_0}$, c'est-à-dire f est la moyenne géométrique des f_t.



On a : $F_n = \frac{x_n}{x_0} = \frac{x_1}{x_0} \times \frac{x_2}{x_1} \times \ldots \times \frac{x_t}{x_{t-1}} \times \ldots \times \frac{x_n}{x_{n-1}} = f_1 \times f_2 \times \ldots \times f_t \times \ldots \times f_n = \prod_{t=1}^{n} f_t$.

$\prod_{t=1}^{n}\left(f_t\right)^{\frac{1}{n}}$ est la moyenne géométrique des f_t.

e) Le taux de croissance moyen, sur la période $[0,n]$, noté τ est le taux de croissance correspondant au facteur de croissance moyen f sur cette même période.

2) <u>relation entre le taux de croissance et le facteur de croissance.</u>

$\tau_t = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} = f_t - 1$, le taux de croissance moyen peut s'écrire sous la forme : $\tau = f - 1$.

<u>Remarques :</u> - En général, τ n'est pas une moyenne de taux de croissance. Par contre, si les τ_t sont faibles (inférieur à 3% dans la pratique), alors on peut approximer τ comme moyenne arithmétique des τ_t, c'est-à-dire : $\tau \approx \sum_{t=1}^{n} \frac{\tau_t}{n}$.

<u>Preuve :</u> $\tau = f - 1 = \left(\prod_{t=1}^{n} f_t\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\prod_{t=1}^{n}(1+\tau_t)\right)^{\frac{1}{n}} - 1$

$$\Leftrightarrow (1+\tau)^n = \prod_{t=1}^{n}(1+\tau_t) = (1+\tau_1)\times(1+\tau_2)\times\dots\times(1+\tau_n)$$

$$\Leftrightarrow n\ln(1+\tau) = \ln(1+\tau_1)+\ln(1+\tau_2)+.....+\ln(1+\tau_n)$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+\tau) = \frac{\ln(1+\tau_1)+\ln(1+\tau_2)+\dots+\ln(1+\tau_n)}{n}$$

Or, $\ln(1+x) \approx x$, si x est faible, donc on a : $\ln(1+\tau) \approx \tau$ et $\ln(1+\tau_t) \approx \tau_t$,

Ce qui nous donne : $\tau = \frac{\tau_1+\tau_2+.....+\tau_n}{n}$.

3) <u>Interprétation.</u>

a) Si $f_t > 1$, c'est-à-dire $\tau_t > 0$, cela traduit que X a augmenté entre $t-1$ et t de $(100\times\tau_t)$ %.

b) Si $f_t < 1$, c'est-à-dire $\tau_t < 0$, cela traduit que X a baissé entre $t-1$ et t de $(100\times|\tau_t|)$ %.

c) Si $f_t = 1$, c'est-à-dire $\tau_t = 0$, on dira que X est restée constante entre $t-1$ et t.

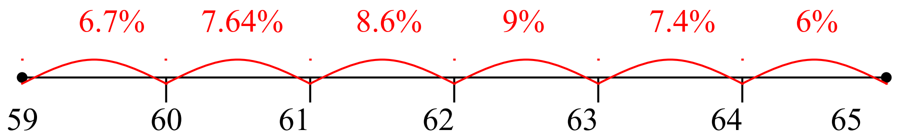
d) Le facteur de croissance moyen f est le facteur de croissance qui applique à chacun des intervalles qui composent la période globale, reconstitue la croissance globale F_n de cette période.

4) <u>Propriétés de f_t :</u>

Circularité ou transitivité : $F_t = \prod_{t=1}^{n} f_t$, en effet, on a :

$$F_n = f_1 \times f_2 \times \dots \times f_n = \frac{x_1}{x_0} \times \frac{x_2}{x_1} \times \dots \times \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{x_n}{x_0} = \prod_{t=1}^{n} f_t .$$

<u>Application numérique :</u>
Les salaires horaires ont successivement augmenté entre 1959 et 1965 de :
6.7%, 7.6%, 8.6%, 9%, 7.4%, 6%



1°) Calculer f_t.
2°) Calculer le taux de croissance globale entre 1959 et 1965.
3°) Calculer le taux de croissance annuel moyen.

<u>Réponses :</u> 1°) Calcul des 6 facteurs de croissance.

t	1	2	3	4	5	6
τ_t	0.067	0.076	0.086	0.09	0.074	0.06
f_t	1.067	1.076	1.086	1.09	1.074	1.06

Car on a : $f_t = \frac{x_t}{x_0} = (1+\tau_t)$.

2°) Calcul du taux de croissance globale entre 1959 et 1965.

Calculons le facteur de croissance globale F_6 :

$F_6 = \frac{x_6}{x_0} = \prod_{t=1}^{6} f_t = (1.067)(1.076)\dots(1.06) = 1.547$, soit un taux de croissance égal à 54.7%.

3°) Taux de croissance annuel moyen.

Calculons le facteur de croissance annuel moyen sur cette période :

$f = (F_6)^{\frac{1}{6}} = \left(\prod_{t=1}^{6} f_t\right)^{\frac{1}{6}} = 1.0754$, soit un taux de croissance annuel moyen égal à de 7.5%.

II- <u>Les indices.</u>

<u>Introduction :</u> le mot indice désigne un nombre sans dimension permettant de faire des comparaisons dans le temps et dans l'espace .
Dans la majorité des cas, la comparaison sera temporelle et portera essentiellement sur des prix et des quantités.

Il existe 2 types d'indices :

- Ceux qui correspondent à des grandeurs dites « simples » sont exprimés par un nombre appelés « indices élémentaires ». (On appelle grandeur simple toute grandeur repérée par un nombre unique.)
- Ceux qui correspondent à des grandeurs dites « complexes » composées de différentes grandeurs simples appelées « indices synthétiques ». (On appelle grandeur complexe toute grandeur définie par plusieurs nombres.)

A) Les indices élémentaires.

1) Définitions

- Soient x_0 et x_t les valeurs prises par une grandeur X respectivement aux temps 0 et t.
On appelle indice élémentaire de X au temps t relativement au temps 0, le rapport noté $I_{t/0}(X)$, défini par : $I_{t/0}(X) = \frac{x_t}{x_0}$.

Cet indice est un indice temporel et s'énonce de la manière suivante : « indice élémentaire de X en t base 1 en 0 ».
Par commodité, on utilise généralement un indice « base 100 en 0 »,c'est-à-dire le nombre $I_{t/0}(X) = 100 \times \frac{x_t}{x_0}$. La date t est appelée « date courante » et la date 0 est appelée « date de référence » ou « de base ».
Interprétation de la « date de base » :

Un indice élémentaire base 1 en 0 signifie que $I_{0/0}(X) = 1 = 1 \times \frac{x_0}{x_0}$.

Un indice élémentaire base 100 en 0 signifie que $I_{0/0}(X) = 100 = 100 \times \frac{x_0}{x_0}$.

- Soient x_A et x_B les valeurs prises par une grandeur X respectivement dans 2 régions A et B. On appelle indice élémentaire de X en A base 100 en B le nombre : $I_{A/B}(X) = 100 \times \frac{x_A}{x_B}$.
Cet indice élémentaire est qualifié de « spatial ».

2) Interprétation

L'indice élémentaire s'interprète comme le facteur de croissance globale de X, F_t, sur la période $[0,t]$. Pour un indice à base 100 par exemple, on a :

- Si $I_{t/0}(X) > 100$, on dit que X a augmenté entre 0 et t de $\left(I_{t/0}(X) - 100\right)$ %.
- Si $I_{t/0}(X) < 100$, on dit que X a baissé entre 0 et t de $\left(100 - I_{t/0}(X)\right)$ %.
- Si $I_{t/0}(X) = 100$, on dit que X est stationnaire entre 0 et t.

Propriétés : Ces propriétés sont celles des facteurs de croissance.

a) Transitivité.

On a : $I_{t/0}(x) = I_{t/t'}(x) \times I_{t'/0}(x),\ \forall (t, t')$.

En effet : $I_{t/0}(x) = \frac{x_t}{x_0} = \frac{x_t}{x_{t'}} \times \frac{x_{t'}}{x_0} = I_{t/t'}(x) \times I_{t'/0}(x)$

Cette propriété permet de changer de base, en effet :

$I_{t/0}(x) = I_{t/t'}(x) \times I_{t'/0}(x) \Leftrightarrow I_{t/t'}(x) = \frac{I_{t/0}(x)}{I_{t'/0}(x)}$.

Généralisation : Propriété d'enchaînement :

$I_{t/0}(x) = I_{1/0}(x) \times I_{2/1}(x) \times .... \times I_{t/t-1}(x)$,

En effet, on a : $I_{t/0}(x) = \frac{x_t}{x_0} = \frac{x_1}{x_0} \times \frac{x_2}{x_1} \times .... \times \frac{x_t}{x_{t-1}} = I_{1/0}(x) \times I_{2/1}(x) \times .... \times I_{t/t-1}(x)$.

b) La réversibilité.

$I_{t/0}(x) = \frac{1}{I_{0/t}(x)}$ ou alors $I_{A/B}(x) = \frac{1}{I_{B/A}(x)}$.

En effet : $I_{t/0}(x) = \frac{x_t}{x_0} = \frac{1}{\frac{x_0}{x_t}} = \frac{1}{I_{0/t}(x)}$, de la même façon, on a : $I_{A/B}(x) = \frac{x_A}{x_B} = \frac{1}{\frac{x_B}{x_A}} = \frac{1}{I_{B/A}(x)}$.

c) Factorité.

Soit $X = Y \times Z$

- Si on connaît $I_{t/0}(Z)$ et $I_{t/0}(Y)$, alors on a : $I_{t/0}(X) = I_{t/0}(Y) \times I_{t/0}(Z)$.

En effet, si $X = Y \times Z$, alors : $x_t = y_t \times z_t$ et $x_0 = y_0 \times z_0$.

Comme $I_{t/0}(X) = \frac{x_t}{x_0}$, donc $I_{t/0}(X) = \frac{x_t}{x_0} = \frac{y_t \times z_t}{y_0 \times z_0} = \left(\frac{y_t}{y_0}\right)\left(\frac{z_t}{z_0}\right) = I_{t/0}(Y) \times I_{t/0}(Z)$.

De même si : $x_t = \frac{z_t}{y_t}$, alors : $x_0 = \frac{z_0}{y_0}$, alors : $I_{t/0}(X) = \frac{x_t}{x_0} = \frac{\frac{z_t}{y_t}}{\frac{z_0}{y_0}} = \frac{\left(\frac{z_t}{z_0}\right)}{\left(\frac{y_t}{y_0}\right)} = \frac{I_{t/0}(Z)}{I_{t/0}(Y)}$.

Cette propriété permet énoncer la relation fondamentale suivante :

Indice élémentaire de valeur = Indice élémentaire des prix × Indice élémentaire des quantités (ou des volumes).

d) Proportionnalité.

Si $x_t = k \times x_0$, l'indice élémentaire de X à la date t de base 1 en 0 est égale à k. En effet, $I_{t/0}(x) = \frac{x_t}{x_0} = \frac{k \times x_0}{x_0} = k$.

Application numérique :
Le tableau suivant décrit l'évolution du chiffre d'affaires d'une entreprise réalisé sur un produit.

Date	Prix unitaire (P_t)	Quantité vendue (Q_t)	Montant des ventes (V_t)
0	200	5000	100000
t	220	6000	132000

Déterminer par 2 méthodes l'indice élémentaire du chiffre d'affaires de cette entreprise à la date t base 100 en 0. Notons par V le chiffre d'affaires, on a :

1ère méthode : $\left.\begin{array}{l} V_0 = P_0 \times Q_0 = 200 \times 5000 = 100000 \\ V_t = P_t \times Q_t = 220 \times 6000 = 132000 \end{array}\right\} I_{t/0}(V) = \frac{132000}{100000} \times 100 = 132$.

2ème méthode : on a : $V_t = P_t \times Q_t$, alors : $\frac{V_t}{V_0} = \frac{P_t \times Q_t}{P_0 \times Q_0} = \left(\frac{P_t}{P_0}\right)\left(\frac{Q_t}{Q_0}\right)$, d'où :

$$I_{t/0}(V) = 100 \times \frac{220}{200} \times \frac{6000}{5000} = 100 \times 1.1 \times 1.2 = 132$$

Augmentation de 10% des prix

Augmentation de 20% des quantités vendues

Application en économie :
Soient W_t et W_{t-1} les valeurs aux prix courants d'un bien X et V_t la valeur de X à la date t au prix de la date $t-1$, alors :

$\frac{W_t}{W_{t-1}}$ est un indice de valeur,

$\frac{V_t}{W_{t-1}}$ est un indice de volume,

$\frac{W_t}{V_t}$ est un indice de prix.

B) Les indices synthétiques.

Introduction : Considérons une entreprise qui vend les produits $b_1 b_2 b_3 b_4$. On veut expliquer l'évolution du chiffre d'affaires réalisé entre 2 dates 0 et t à partir de l'évolution des prix pratiques et celle des quantités vendues. Les données sont consignées dans le tableau suivant :

b	P_{i0}	Q_{i0}	P_{it}	Q_{it}	$V_{i0}=P_{i0}\times Q_{i0}$	$V_{it}=P_{it}\times Q_{it}$	$V^*_{i0}=P_{it}\times Q_{i0}$	$V^{**}_{it}=P_{i0}\times Q_{it}$
b_1	5	20	8	15	100	120	160	75
b_2	6	30	7	20	180	140	210	120
b_3	8	40	9	30	320	270	360	240
b_3	10	10	11	20	100	220	110	200
					$V_0=\sum_{i=1}^{4} V_{i0}=700$	$V_t=\sum_{i=1}^{4} V_{it}=750$	$V^*_0=\sum_{i=1}^{4} V^*_{i0}=840$	$V^{**}_t=\sum_{i=1}^{4} V^{**}_{it}=635$

On a : $I_{t/0}(V)=\frac{V_t}{V_o}=\frac{\sum_{i=1}^{4} V_{it}}{\sum_{i=1}^{4} V_{io}}=\frac{750}{700}=1.071$.

Le chiffre d'affaires a augmenté de 7.1% .

<u>Remarque :</u> Pour un bien b_i, on peut calculer l'indice d'affaires réalisé sur ce bien de la manière suivante : $I_{t/0}(V_i)=\frac{V_{it}}{V_{i0}}=\frac{P_{it}\times Q_{it}}{P_{i0}\times Q_{i0}}=I_{t/0}(p_i)\times I_{t/0}(q_i)$.

L'indice élémentaire de V^i s'obtient comme un produit de deux indices élémentaires. Pour V, on ne peut pas obtenir ce résultat, mais on va tout de même décomposer l'indice de V comme produit de deux indices (prix et quantités), mais qui ne seront pas des indices élémentaires.

<u>Méthode de décomposition :</u>

On va utiliser la méthode de décomposition de l'indice de valeur vue précédemment :

Indice de valeur = indice de volume × indice de prix .

On a alors 2 possibilités : soit $I_{t/0}(V)=\frac{V_t}{V^*_0}\times\frac{V^*_0}{V_0}$, ou $I_{t/0}(V)=\frac{V_t}{V_{t'}}\times\frac{V_{t'}}{V_0}$.

$\frac{V_t}{V_0}=\frac{\sum_{i=1}^{4} V_{it}}{\sum_{i=1}^{4} V_{i0}}=\frac{750}{840}=0.893$, $\frac{V_t}{V_0}$ est un indice de volume.

$\frac{V^*_{01}}{V_0}=\frac{\sum_{i=1}^{4} V^*_{i0}}{\sum_{i=1}^{4} V_{i0}}=\frac{840}{700}=1.20$, $\frac{V^*_0}{V_0}$ est un indice de prix.

$$I_{t/0}(V)=\frac{V_t}{V^*_o}\times\frac{V^*_0}{V_0}=\frac{750}{840}\times\frac{840}{700}=(0.893)(1.20)=1.071 .$$

$\frac{V_t}{V^*_t}=\frac{\sum_{i=1}^{4} V_{it}}{\sum_{i=1}^{4} V^*_{it}}=\frac{750}{635}=1.18$, $\frac{V_t}{V^*_t}$ est un indice de prix.

$\frac{V_t^*}{V_0} = \frac{\sum_{i=1}^{4} V_{it}^*}{\sum_{i=1}^{4} V_{i0}} = \frac{635}{700} = 0.907$, $\frac{V_t^*}{V_0}$ est un indice de volume.

$$IV_{t/0} = \frac{V_t}{V_t^*} \times \frac{V_t^*}{V_0} = \frac{750}{635} \times \frac{635}{700} = (1.18)(0.907) = 1.071 .$$

Montrons que les indices utilisés précédemment sont des moyennes d'indices élémentaires.

a) Précisons les indices des prix :

$$\frac{V_0^*}{V_0} = \frac{\sum_{i=1}^{4} P_{it} Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{4} P_{i0} Q_{i0}} = \frac{\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{P_{it}}{P_{i0}} \times P_{i0} Q_{i0} \right)}{\sum_{i=1}^{4} P_{i0} Q_{i0}} = \frac{\sum_{i=1}^{4} Ip_{t/0}(i) \times (P_{i0} Q_{i0})}{\sum_{i=1}^{4} P_{i0} Q_{i0}} .$$

Si on pose $\alpha_{i0} = \frac{P_{i0} Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{4} P_{i0} Q_{i0}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} \alpha_{i0} = 1$.

Par suite :

$\frac{V_0^*}{V_0} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i0} \times Ip_{t/0}(i)$, il s'agit donc de la moyenne arithmétique pondérée des indices élémentaires de prix $Ip_{t/0}(i)$.

Le coefficient α_{10} représente la part de la contribution du bien b_i dans le chiffre d'affaires global réalisé à la date 0.

$$\frac{V_t}{V_t^*} = \frac{\sum_{i=1}^{4} P_{it} Q_{it}}{\sum_{i=1}^{4} P_{i0} Q_{it}} = \frac{\sum_{i=1}^{4} P_{it} Q_{it}}{\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{P_{i0}}{P_{it}} \times P_{it} Q_{it} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{\sum_{i=1}^{4} P_{it} Q_{it}} \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{P_{i0}}{P_{it}} \times P_{it} Q_{it} \right)},$$

Comme : $Ip_{t/0}(i) = \frac{P_{it}}{P_{i0}} \Leftrightarrow \frac{P_{i0}}{P_{it}} = \frac{1}{Ip_{t/0}(i)}$,

Par suite : $\frac{V_t}{V_t^*} = \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{Ip_{t/0}(i)} \times (P_{it} Q_{it})}{\sum_{i=1}^{4} P_{it} Q_{it}}}$, En posant $\alpha_{it} = \frac{P_{it} Q_{it}}{\sum_{i=1}^{4} P_{it} Q_{it}}$,

on obtient : $\frac{V_t}{V_t^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{Ip_{t/0}(i)} \times \alpha_{it}}$, il s'agit donc de la moyenne harmonique pondérée des indices élémentaires de prix $Ip_{t/0}(i)$. Le coefficient α_{it} représente la part de la contribution du bien b_i dans le chiffre d'affaires global réalisé à la date t .

En utilisant les mêmes procédés, on montre que :

$$\frac{V_t}{V_0^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{Iq_{t/0}(i)} \times \alpha_{it}}$$ est la moyenne harmonique pondérée des indices élémentaires des quantités : $Iq_{t/0}(i)$.

$$\frac{V_0^*}{V_0} = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{Iq_{t/0}(i)} \times \alpha_{i0}$$ est un moyenne arithmétique pondérée des indices élémentaires des quantités $Iq_{t/0}(i)$ par les coefficients α_{i0}.

1) Définitions :

a) on appelle indice des prix de Laspeyres, l'indice synthétique des prix noté $L_{t/0}(P)$ et défini par : $L_{t/0}(P) = \frac{\sum_{i=1}^{r} P_{it} \times Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{r} P_{i0} \times Q_{i0}}$.

De même, l'indice de quantité de Laspeyres est l'indice synthétique noté $L_{t/0}(Q)$, défini par :

$$L_{t/0}(Q) = \frac{\sum_{i=1}^{r} P_{i0} \times Q_{it}}{\sum_{i=1}^{r} P_{i0} \times Q_{i0}}.$$

b) On appelle indice de prix de Paasche l'indice synthétique des prix noté $\sigma_{t/0}(Q)$ et défini par : $\sigma_{t/0}(Q) = \frac{\sum_{i=1}^{r} P_{it} \times Q_{it}}{\sum_{i=1}^{r} P_{i0} \times Q_{it}}$.

c) On appelle indice de Fisher des prix et des quantités : $F_{t/0}(P) = \sqrt{L_{t/0}(P) \times \sigma_{t/0}(P)}$ et $F_{t/0}(Q) = \sqrt{L_{t/0}(Q) \times \sigma_{t/0}(Q)}$.

2) Propriétés des indices synthétiques :

a) Les indices de Laspeyres et de Paasche sont les moyennes d'indices élémentaires :

$L_{t/0}(P) = \sum_{i=1}^{h} \alpha_{i0} \times Ip_{t/0}(i)$, moyenne arithmétique pondérée des prix $Ip_{t/0}(i)$.

$L_{t/0}(Q) = \sum_{i=1}^{h} \alpha_{i0} \times Iq_{t/0}(i)$, moyenne arithmétique pondérée des prix $Iq_{t/0}(i)$.

$\sigma_{t/0}(P) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{h} \alpha_{it} \times \frac{1}{Ip_{t/0}(i)}}$, moyenne harmonique pondérée des prix $Ip_{t/0}(i)$.

$$\sigma_{t/0}(Q) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{h} \alpha_{it} \times \frac{1}{Iq_{t/0}(i)}}$$, moyenne harmonique pondérée des prix $Iq_{t/0}(i)$.

Ou encore : $$\begin{cases} LI_{t/0}(*) = \sum_{i=1}^{h} \alpha_{i0} \times I_{t/0}(*) \\ \sigma_{t/0}(*) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{h} \alpha_{it} \times \frac{1}{I_{t/0}(*)}} \end{cases}$$, où $(*)$ désigne prix ou quantité.

$$\alpha_{i0} = \frac{P_{i0} \times Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{h} (P_{i0} \times Q_{i0})} = \frac{V_{i0}}{V_0}$$, et $$\alpha_{it} = \frac{P_{it} \times Q_{it}}{\sum_{i=1}^{h} (P_{it} \times Q_{it})} = \frac{V_{it}}{V_t}$$.

Application numérique :

b_i	P_{i0}	Q_{i0}	P_{it}	Q_{it}	V_{i0}	V_{it}	α_{i0}	α_{it}	$Ip_{t/0}(i)$	$Iq_{t/0}(i)$
b_1	5	20	8	15	100	120	$\frac{10}{70}$	$\frac{12}{75}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{15}{20}$
b_2	6	30	7	20	180	140	$\frac{18}{70}$	$\frac{14}{75}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{20}{30}$
b_3	8	40	9	30	320	270	$\frac{32}{70}$	$\frac{27}{75}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{30}{40}$
b_4	10	10	11	20	100	220	$\frac{10}{70}$	$\frac{22}{75}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{20}{10}$
					$V_0 = 700$	$V_t = 750$				

$$LI_{t/0}(Ip) = \sum_{i=1}^{h} \alpha_{i0} \times Ip_{t/0}(i) = \frac{10}{70}\times\frac{8}{5} + \frac{18}{70}\times\frac{7}{6} + \frac{32}{70}\times\frac{9}{8} + \frac{10}{70}\times\frac{11}{10} = 1.20.$$

$$LI_{t/0}(Iq) = \sum_{i=1}^{h} \alpha_{i0} \times Iq_{t/0}(i) = \frac{10}{70}\times\frac{15}{20} + \frac{18}{70}\times\frac{20}{30} + \frac{32}{70}\times\frac{30}{40} + \frac{10}{70}\times\frac{20}{10} = 0.907.$$

$$\sigma_{t/0}(P) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{4} \alpha_{it} \times \frac{1}{IP_{t/0}(i)}} = \frac{1}{\frac{12}{75}\times\frac{5}{8} + \frac{14}{75}\times\frac{6}{7} + \frac{27}{75}\times\frac{8}{9} + \frac{22}{75}\times\frac{10}{11}} = 1.18.$$

$$\sigma_{t/0}(Q) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{4} \alpha_{it} \times \frac{1}{Iq_{t/0}(i)}} = \frac{1}{\frac{12}{75}\times\frac{20}{15} + \frac{14}{75}\times\frac{30}{20} + \frac{27}{75}\times\frac{40}{30} + \frac{22}{75}\times\frac{10}{20}} = 0.893.$$

b) Aucun des trois indices ne vérifient la propriété de transitivité.

Exemple : $L_{t/t'}(P) \neq \dfrac{L_{t/0}(P)}{L_{t'/0}(P)}$.

En effet :
$$\left.\begin{array}{l} L_{t/0}(P) = \dfrac{\sum_{i=1}^{h} P_{it} \times Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{h} P_{i0} \times Q_{i0}} \\[2ex] L_{t'/0}(P) = \dfrac{\sum_{i=1}^{h} P_{it'} \times Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{h} P_{i0} \times Q_{i0}} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{L_{t/0}(P)}{L_{t'/0}(P)} = \dfrac{\sum_{i=1}^{h} P_{it} \times Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{h} P_{it'} \times Q_{i0}},$$

Nous avons donc : $L_{t/t'}(P) = \dfrac{\sum_{i=1}^{h} P_{it} \times Q_{it'}}{\sum_{i=1}^{h} P_{it'} \times Q_{it'}} \neq \dfrac{\sum_{i=1}^{h} P_{it} \times Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{h} P_{it'} \times Q_{i0}} = \dfrac{L_{t/0}(P)}{L_{t'/0}(P)}$.

Le problème de changement se résout en introduisant les indices chaînes. L'indice de chaînes de Laspeyres noté $CL_{t/0}(*)$ est défini par $CL_{t/0}(*) = L_{t/t-1}(*) \times L_{t-1/t-2}(*) \times \dots \times L_{1/0}(*)$, où $(*)$ désigne le prix ou la quantité.

Par exemple : $CL_{t/0}(P) = L_{t/t-1}(P) \times L_{t-1/t-2}(P) \times \dots \times L_{1/0}(P)$, d'où :
$CL_{t-1/0}(P) = L_{t-1/t-2}(P) \times \dots \times L_{1/0}(P)$,

Donc on a : $\dfrac{CL_{t/0}(P)}{CL_{t-1/0}(P)} = \dfrac{L_{t/t-1}(P) \times L_{t-1/t-2}(P) \times \dots \times L_{1/0}(P)}{L_{t-1/t-2}(P) \times \dots \times L_{1/0}(P)}$,

Or puisque : $L_{t/t-1}(P) = CL_{t/t-1}(P)$, alors : $CL_{t/t-1}(P) = \dfrac{CL_{t/0}(P)}{CL_{t-1/0}(P)}$.

$CL_{t/0}(*)$ vérifie donc la propriété de transitivité, il en est de même pour $CP_{t/0}(*)$.

c) Les indices de Laspeyres et de Paasche ne vérifient pas la propriété de réversibilité.

En effet : $L_{0/t}(*) = \dfrac{1}{\sigma_{t/0}(P)}$ et $\sigma_{t/0}(*) = \dfrac{1}{L_{t/0}(*)}$.

Illustration pour $L_{t/0}(P)$ et $\sigma_{0/t}(P)$.

$$L_{0/t}(P) = \frac{\sum_{i=1}^{h} P_{i0} \times Q_{it}}{\sum_{i=1}^{h} P_{it} \times Q_{it}} \quad \text{et} \quad L_{t/0}(P) = \frac{\sum_{i=1}^{h} P_{it} \times Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{h} P_{i0} \times Q_{i0}}, \text{ alors que : } \frac{1}{L_{t/0}(P)} = \frac{\sum_{i=1}^{h} P_{i0} \times Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{h} P_{it} \times Q_{i0}}.$$

On a donc : $L_{t/0}(P) \neq \frac{1}{L_{0/t}(P)}$.

De plus : $$L_{0/t}(P) = \frac{\sum_{i=1}^{h} P_{i0} \times Q_{it}}{\sum_{i=1}^{h} P_{it} \times Q_{it}} = \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^{h} P_{it} \times Q_{it}}{\sum_{i=1}^{h} P_{i0} \times Q_{it}}} = \frac{1}{\mathcal{P}_{t/0}(P)}$$

Et : $$\mathcal{P}_{0/t}(P) = \frac{\sum_{i=1}^{h} P_{i0} \times Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{h} P_{it} \times Q_{i0}} = \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^{h} P_{it} \times Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{h} P_{i0} \times Q_{i0}}} = \frac{1}{L_{t/0}(P)}.$$

Par contre, les indices de Fisher vérifient la propriété de réversibilité, c'est-à-dire :

$F_{0/t}(*) = \frac{1}{F_{t/0}(*)}$.

$F_{t/0}(P) = \sqrt{L_{t/0}(P) \times \mathcal{P}_{t/0}(P)}$

Or on a : $L_{0/t}(P) = \frac{\sum_{i=1}^{h} P_{i0} \times Q_{it}}{\sum_{i=1}^{h} P_{it} \times Q_{it}} = \frac{1}{\mathcal{P}_{t/0}(P)}$ et $\mathcal{P}_{0/t}(P) = \frac{\sum_{i=1}^{h} P_{i0} \times Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{h} P_{it} \times Q_{i0}} = \frac{1}{L_{t/0}(P)}$, alors :

$$F_{0/t}(P) = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{P}_{t/0}(P)} \times \frac{1}{L_{t/0}(P)}} = \frac{1}{\sqrt{L_{t/0}(P) \times \mathcal{P}_{t/0}(P)}} = \frac{1}{F_{t/0}(P)}.$$

3) <u>Comparaison des indice de Laspeyres et de Paasche.</u>

Les deux indices ne sont pas comparables sans hypothèses particulières.

<u>Cas n°1 :</u> $Iq_{t/0}(i) = \frac{Q_{it}}{Q_{i0}} = C \quad \forall(i)$, (taux de croissance identique en volume).

$L_{t/0}(Q) = C = \mathcal{P}_{t/0}(Q)$, on en déduit que : $L_{t/0}(P) = \mathcal{P}_{t/0}(P)$.

En effet, $IV_{t/0} = L_{t/0}(P) \times \mathcal{P}_{t/0}(Q) = \mathcal{P}_{t/0}(P) \times L_{t/0}(Q)$.

<u>Cas n°2 :</u> $Ip_{t/0}(i) = \frac{P_{it}}{P_{i0}} = C \quad \forall(i)$, (taux de croissance des prix identiques).

$L_{t/0}(P) = C = \mathcal{P}_{t/0}(P) \Rightarrow L_{t/0}(Q) = \mathcal{P}_{t/0}(Q)$.

<u>Cas n°3 :</u> $\frac{P_{it} \times Q_{it}}{P_{i0} \times Q_{i0}} = C \quad (\forall i)$, alors : $P_{t/0}(*) \leq L_{t/0}(*)$.

<u>Preuve :</u>

On va montrer que $\alpha_{it} = \alpha_{i0} \quad (\forall i)$:

On a : $\frac{P_{it} \times Q_{it}}{P_{i0} \times Q_{i0}} = C \quad (\forall i) \Leftrightarrow P_{it} \times Q_{it} = C \times P_{i0} \times Q_{i0}$, et $\sum_{i=1}^{h} P_{it} \times Q_{it} = C \times \sum_{i=1}^{h} P_{i0} \times Q_{i0}$.

Or, on a : $\alpha_{it} = \frac{P_{it} \times Q_{it}}{\sum_{i=1}^{h} P_{it} \times Q_{it}}$, d'où : $\alpha_{it} = \frac{C \times (P_{i0} \times Q_{i0})}{C \times \sum_{i=1}^{h} P_{i0} \times Q_{i0}} = \frac{(P_{i0} \times Q_{i0})}{\left(\sum_{i=1}^{h} P_{i0} \times Q_{i0}\right)} = \alpha_{i0}$.

Comme $\sigma_{t/0}(*)$ est une moyenne harmonique, elle est inférieure ou égale a la moyenne arithmétique $L_{t/0}(*)$.

Cette dernière relation est également vérifiée dans un cas plus général, en effet, comme, en moyenne, prix et quantité varient en sens inverse :

- L'indice de Laspeyres des prix a tendance à surestimer une hausse.
- L'indice de Paasche a tendance à la sous-estimer.

En comptabilité, les indices de prix utilisés sont des indices de Paasche. Les indices conjoncturels (indice des prix à la consommation : indice de la production industrielle,…) sont des indices de Laspeyres.