Formules de Taylor

Analyse -- Fonctions d'une variable réelle
Analyse -- Intégration
Analyse -- Fonctions de plusieurs variables

Avant d'énoncer les différentes formules de Taylor, rappelons qu'elles sont dites formules de MacLaurin si elles sont écrites en 0.

Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction définie et n fois dérivable sur un voisinage V=]a-h,a+h[d'un point a, et si $f^{(n+1)}(a)$ existe, pour tout x tel que |x|<h, on a

$$f(a+x)=f(a)+\frac{x}{1!}f'(a)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(a)+\varepsilon(x)\right]$$

ou $\varepsilon(x)$ tend vers 0 si x tend vers 0.

Formule de Taylor-Lagrange

Soit f une fonction définie et n fois dérivable sur un segment [a,b], (n+1) fois dérivable sur l'intervalle ouvert]a,b[, alors il existe un réel c de]a,b[tel que :

$$f(b)=f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f une fonction de classe C^n sur un segment [a,b], on a :

$$f(b)=f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(a)+\ldots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt$$

La formule de Taylor avec reste intégrale est une généralisation du théorème fondamental du calcul intégral, et s'obtient par récurrence en effectuant des intégrations par parties.

Commentaires

Les 3 formules de Taylor précédentes sont énoncées de la moins précise à la plus précise. Les hypothèses nécessaires sont aussi de plus en plus fortes. Elles sont de nature très différentes. La formule de Taylor-Young est une formule locale, qui donne des informations au voisinage d'un point. C'est elle notamment qui donne l'existence de développements limités et qui sert pour faire des études locales de courbes. La formule de Taylor-Lagrange (qui devient une inégalité si la fonction est à valeurs vectorielles) donne des renseignements sur tout un intervalle. Quant à la formule de Taylor reste intégral, c'est la seule à donner une expression précise du reste. Elle est très utile notamment lorsqu'on s'intéresse à la régularité de ce reste.

Fonctions de plusieurs variables

Les formules précédentes se généralisent aux fonctions de plusieurs variables. La formule la plus usitée est la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (pour la recherche d'extrema).

Théorème (formule de Taylor-Young à l'ordre 2) : Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^p$ et soit a un point de U. On suppose que f est de classe C^2 sur U. Alors on a:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a)h_j h_k + o(\|h\|^2).$$

Plus généralement, si on note

$$D^k f(a)(h)^k = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}(a)h_{i_1}\dots h_{i_k}$$

on a les résultats suivants:

Théorème : Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^p$ et soit a un point de U.

1. Formule de Taylor-Young : si f est k fois différentiable en a, alors

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \dots + \frac{1}{k!}D^k f(a)(h)^k + o(\|h\|^k).$$

2. Formule de Taylor-reste intégral : si f est de classe C^{k+1} sur U et si le segment [a,a+h] est contenu dans U, on a :

$$f(a+h) = f(a)+Df(a)(h)+\dots+\frac{1}{k!}D^k f(a)(h)^k+\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!}D^{k+1}f(a+th)(h)^{k+1}dt.$$

Consulter aussi...