Tout le programme obligatoire de Terminale S

Abbreviations : ssi = si et seulement si ; cf=conférer à
Notations : Sauf mention contraire, $a,b,c,h,k,l,r,x,y,\alpha,\beta,\gamma,\theta,\Delta$ désignent des réels, z,ω des complexes
n désignent un entier naturel (éventuellement $\neq 0$). Les suites sont notées (u_n), (v_n)
Les fonctions sont notées f,g,u,v. Les primitives sont désignées pas les majuscules correspondantes. I désigne un intervalle

1) Algèbre et analyse

1-1) Le second degré

$T(x)=ax^2+bx+c$ trinôme du second degré à coefficients réels avec $a\neq 0$. Discriminant $\Delta=b^2-4ac$

Si $\Delta=b^2-4ac>0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions réelles distinctes : $\alpha=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.	Si $\Delta=b^2-4ac=0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet une unique solution (dite « double ») $\gamma=\frac{-b}{2a}$	Si $\Delta=b^2-4ac<0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solution réelle (cf complexes)
Factorisation : $T(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$	Factorisation : $T(x)=a(x-\gamma)^2$ L'expression a donc le même signe que le nombre a et est nulle lorsque $x=\gamma$	On ne peut pas factoriser le trinôme T dans $\mathbb{R}$. L'expression $T(x)$ a le même signe que le nombre a et ne s'annule jamais.

x		α		β	
$T(x)$	signe de a	0	signe opposé de a	0	signe de a

1-2) Domaine de définition D d'une fonction f : D

Un dénominateur ne peut s'annuler $\sqrt{u(x)}$ n'est défini que ssi $u(x)\geq 0$ $\ln(u(x))$ n'est défini que ssi $u(x)>0$
Les conditions peuvent se cumuler , d'où systèmes et intersections d'intervalles

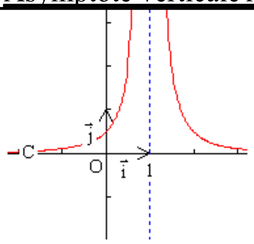
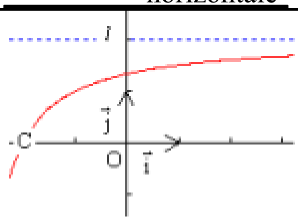
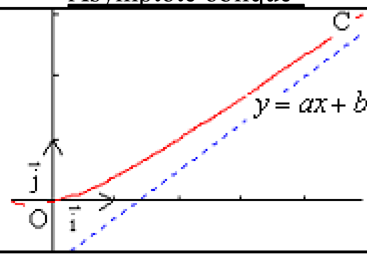
1-3) Limites de fonctions. Asymptotes

C'est aux bornes (finies ou infinies) de l'ensemble de définition de f que l'on étudie ses limites. Interviennent alors :
- Les limites « usuelles » (Tableau des limites usuelles)
- Les limites « célèbres » $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$
- Les limites par croissances comparées (cf paragraphe exponentielle et logarithmes)
- Les limites par comparaison (théorème de minoration, de majoration, théorème dit « des gendarmes »)

Penser que $-1\leq\sin x\leq 1$, $-1\leq\cos x\leq 1$, $-1\leq(-1)^n\leq 1$
- Les opérations entre limites (limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée).

En cas de forme indéterminée , on utilise souvent les résultats :
- La limite en $\pm\infty$ d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré
- La limite en $\pm\infty$ d'une fraction rationnelle est celle du quotient simplifié des termes de plus haut degré

Enfin, ne pas oublier la technique de multiplication par la quantité conjuguée

Asymptote verticale	Asymptote horizontale	Asymptote oblique
		
Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\infty$, la droite d'équation $x=a$ est asymptote verticale à C_f. Etudier « à gauche » et « à droite » de a	Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=l$, la droite d'équation $y=l$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$, $-\infty$ ou les deux. Position relative : Etudier le signe de $f(x)-l$	Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-(ax+b))=0$, la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$, $-\infty$ ou les deux Position relative : Etudier le signe de $f(x)-(ax+b)$

1-4) Continuité et théorème de la valeur intermédiaire

f est continue en a ssi elle est définie en a et $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$. Elle est continue en I ssi elle est continue en tout $a \in I$

Les fonctions affines, polynômes, cosinus, sinus, $x \mapsto |x|$, exponentielle, puissance réelle sont continues sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, $x \mapsto \ln x$ sur $]0;+\infty[$

Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition

Corollaire du théorème de la valeur intermédiaire :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a;b]$, alors pour toute valeur k comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution sur l'intervalle $[a;b]$

Le théorème s'étend aux cas d'intervalles ouverts, et aux bornes infinies.

1-5) Dérivées et primitives

f est dérivable en a ssi elle est définie en a et $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.

Cette limite est notée $f'(a)$ (nombre dérivé de f en a). f est dérivable sur I ssi elle est dérivable en tout $a \in I$

Une primitive sur I d'une fonction f continue sur I est une fonction F définie et dérivable sur I, et telle que pour tout $x \in I$, on ait $F'(x) = f(x)$. Les primitives sont définies « à une constante près »

Fonction	dérivabilité	dérivée	Fonction	dérivabilité	Fonction dérivée
$x \mapsto k$, $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 1$	$x \mapsto a^x$; $a>0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto (\ln a)\, a^x$
$x \mapsto x^\alpha$	$[0;+\infty[$ ssi $\alpha > 0$ et $]0;+\infty[$ si $\alpha \leq 0$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$
$x \mapsto \sqrt{x}$	Définie sur $[0;+\infty[$ dérivable sur $]0;+\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \begin{cases} 1+\tan^2 x \\ \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$
$x \mapsto \ln\|x\|$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{x}$			

PRIMITIVES ←	→ DERIVEES
$x \mapsto u(x)+v(x)$	$x \mapsto u'(x)+v'(x)$
$x \mapsto u(x)v(x)$ cas particulier: $x \mapsto ku(x)$; $k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ cas particulier: $x \mapsto ku'(x)$; $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ cas particulier: $x \mapsto \frac{1}{v(x)}$ $(v(x) \neq 0)$	$x \mapsto \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ cas particulier: $x \mapsto -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$
Composition : $x \mapsto v(u(x))$ Cas particuliers : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$, $x \mapsto \cos(u(x))$, $x \mapsto \sin(u(x))$, $x \mapsto \ln\|u(x)\|$, $x \mapsto e^{u(x)}$	Composition : $x \mapsto u'(x)\, v'(u(x))$ Cas particuliers : $x \mapsto \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$, $x \mapsto -u'(x)\sin(u(x))$, $x \mapsto u'(x)\cos(u(x))$, $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$, $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ et $f'(x) = 0$ pour un nombre fini de valeurs, alors f est strictement croissante sur I

Enoncé analogue pour f strictement décroissante sur I. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I

On cherche les extrema locaux parmi les valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule en changeant de signe

Equation de la tangente à C_f au point $A(a; f(a))$ $\boxed{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$

1-6) Fonction exponentielles et logarithmes

Fonction exponentielle de base e	Fonction logarithme népérien
C'est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} f'(x)=f(x) \\ f(0)=1 \end{cases}$. On a $f(1)=e$ où $e\approx 2,718...$	$f(x)=\ln x$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. Elle est l'unique primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction inverse, s'annulant en 1. $f(1)=0$, $f(e)=1$ où $e\approx 2,718...$
Pour tous nombres a et b	Pour tous nombres a et b strictement positifs :
$e^{a+b}=e^a\cdot e^b$ $\quad e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$ $\quad e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$	$\ln(ab)=\ln a+\ln b$ $\quad \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$ $\quad \ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a$
$\left(e^a\right)^r=e^{ra}$ (pour tout réel r)	$\ln\left(a^r\right)=r\ln a$ (pour tout réel r) $\quad \ln(\sqrt{a})=\dfrac{1}{2}\ln a$
Variations :	Variations :

Variations (exponentielle) :

x	$-\infty$		$+\infty$
e^x	0	$\nearrow$	$+\infty$

Variations (logarithme) :

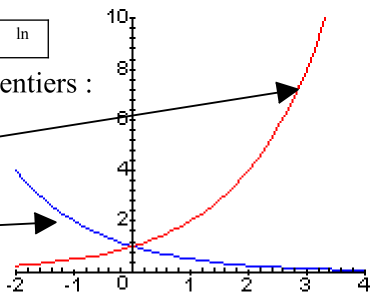
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Croissances comparées	Croissances comparées
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$, $\alpha>0$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0$, $\alpha>0$
$\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^\alpha e^x=0$, $\alpha>0$	$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\ln x=0$, $\alpha>0$

Equations et inéquations mélant logarithmes et exponentielles :
Elles se traitent en utilisant la STRICTE CROISSANCE des fonctions logarithme et exponentielle :
Si a et b sont deux réels >0 alors $\ln a=\ln b\Leftrightarrow a=b$ et $\ln a<\ln b\Leftrightarrow a<b$. Si a et b deux réels, $e^a=e^b\Leftrightarrow a=b$ et $e^a<e^b\Leftrightarrow a<b$

Fonction puissance/exponentielle de base a>0

Pour tout nombre réel a>0, et pour tout nombre réel b, on définit le réel a^b comme $\boxed{a^b=e^{b\ln a}}$
Les règles de calcul connues dans le cas d'exposants entiers s'étendent aux exposants non entiers :
$f:x\mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ssi $a>1$
$f:x\mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ ssi $0<a<1$
(en bleu, $x\to\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ et en rouge, $x\to2^x$)



1-7) Equations différentielles

Ce sont des équations où l'inconnue n'est pas un nombre, mais une fonction, souvent notée y. y' désigne sa dérivée.

Equation $y'=ay$ $\quad(a\in\mathbb{R})$ $\qquad$ Ensemble des solutions $f(x)=Ce^{ax}$, $C\in\mathbb{R}$

Equation $y'=ay+b$ $\quad(a,b\in\mathbb{R})$ $\qquad$ Ensemble des solutions $f(x)=Ce^{ax}-\dfrac{b}{a}$, $C\in\mathbb{R}$

Equations différentielles avec second membre

a) Trouver une solution particulière de l'équation différentielle (elle est, en général, donnée dans l'énoncé)
b) Trouver les solutions de l'équation différentielle «avec le second membre nul» (dite « équation homogène »)

Les solutions générales de l'équation différentielle avec second membre sont obtenues en ajoutant la solution particulière à l'expression des solutions générales de l'équation différentielle sans second membre

1-8) Calcul intégral, calcul d'aires

Toutes les fonctions f et g sont supposées continues sur les intervalles $[a;b]$

L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel $\boxed{\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)}$. La variable x est muette

On a $\int_a^a f(x)\,dx=0$ et $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)dx$, ainsi que la Relation de Chasles $\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$

Linéarité de l'intégrale $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ et pour tout réel k, $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

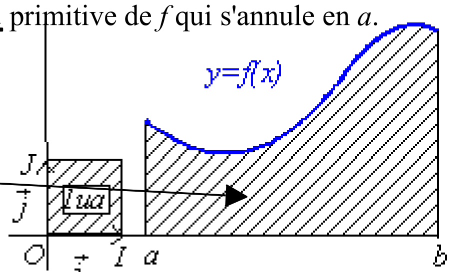
Positivité de l'intégrale : Si pour tout $x\in[a;b]$, $f(x)\geq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. Réciproque fausse

Passage aux intégrales dans les inégalités : Si $x\in[a;b]$, $f(x)\leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. Réciproque fausse

Valeur moyenne de f sur un intervalle $[a;b]$ (avec $a<b$): $\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$

Intégration par parties : f, g dérivables, f', g' continues sur $[a;b]$ $\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx}$

Primitive définie par une intégrale : La fonction G définie par $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.



Calcul d'aires

Si $f(x)\geq 0$ sur $[a ; b]$, le domaine délimité par C_f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$, est donné, en unités d'aires (ua) par $\int_a^b f(x)dx$

Si $f(x)\leq 0$ sur $[a ; b]$ $\int_a^b f(x)dx$ sera égale à l'opposé de l'aire du domaine délimité par C_f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$. Si $f(x)\leq g(x)$ sur $[a ; b]$, l'aire du domaine limité par Cf et Cg, et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ vaut $\int_a^b (g(x)-f(x))dx$.

2) Récurrence et suites numériques

Pour démontrer une propriété $P(n)$ dépendant d'un entier n, on peut procéder par récurrence :

- On démontre que la propriété $P(n_0)$ est vraie pour un premier entier n_0 (phase dite « d'initialisation »)
- En supposant que la propriété $P(n)$ est vraie pour un certain entier, on démontre que $P(n+1)$ est vraie (phase dite d'hérédité ou de transmission). On note $P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie

Suites arithmétiques	Suites géométriques
Définition : $u_{n+1}=u_n+r$. r RAISON de la suite	Définition : $u_{n+1}=q\cdot u_n$. q RAISON de la suite
Formule générale : $u_n=u_0+nr$ ou $u_n=u_p+(n-p)r$	Formule générale : $u_n=u_0\cdot q^n$ ou $u_n=u_p\cdot q^{n-p}$
Somme des termes : $S_n=u_0+u_1+u_2+\dots+u_n$ ($n+1$ termes)	Somme des termes : $S_n=u_0+u_1+u_2+\dots+u_n$ ($n+1$ termes)
$\boxed{S_n=\text{Nombre de termes}\cdot\underbrace{\frac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}}_{\text{moyenne des termes extrêmes}}}$	$\boxed{S_n=(1^{er}\text{ terme})\cdot\frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}}$ (raison $\neq 1$) Si $q=1$ alors $S_n=(n+1)u_0$

Limites de suites - On examine le comportement des termes u_n lorsque n tend vers $+\infty$ (et uniquement dans ce cas)

On dit que (u_n) converge s'il existe un réel l tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n=l$. Dans tous les autres cas (si $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ $-\infty$ ou si (u_n) n'admet pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$) on dit que (u_n) diverge

Les théorèmes de comparaison (minoration, majoration, théorème dit « des gendarmes ») énoncés pour les fonctions trouvent leur équivalent pour les suites numériques.

Si $q>1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$. Si $-1<q<1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$, (et bien sûr si $q=1$ ou $q=0$, l'expression q^n est constante quel que soit l'entier n). Si $q\leq -1$, alors q^n n'admet pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$

Suites arithmético-géométriques (ou affines)

Ce sont les suites de la forme $\begin{cases} u_{n+1} = a u_n + b \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$ ($a \neq 1$ et $b \neq 0$ sinon la suite sera arithmétique ou géométrique)

Une telle suite N'EST NI ARITHMETIQUE NI GEOMETRIQUE !

On étudie une telle suite affine (u_n) à l'aide d'une deuxième suite (v_n) appelée suite auxiliaire, toujours introduite dans l'énoncé. Il faut montrer que la suite (v_n) est géométrique, donner une expression de v_n puis de u_n en fonction de n pour en déduire la limite $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

Sens de variation des suites et convergente, suites adjacentes.

Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on étudie directement le signe de $u_{n+1}-u_n$, ou on démontre par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}\geq u_n$

Pour montrer que (u_n) est majorée par M, on montre par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq M$.

Toute suite croissante et majorée est convergente. idem pour une suite décroissante et minorée.

Si la suite est définie par $u_{n+1}=f(u_n)$, avec f continue, si (u_n) converge vers une limite l, alors $\boxed{l=f(l)}$

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante, et $\lim_{n\to+\infty} v_n-u_n=0$.

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite

3) Probabilités, variables aléatoires, lois de probabilités

L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. Un événement A est une partie de Ω

Pour tout événement A, $\boxed{0\leq p(A)\leq 1}$. $\boxed{p(\emptyset)=0}$ (événement impossible) et $\boxed{p(\Omega)=1}$ (événement certain)

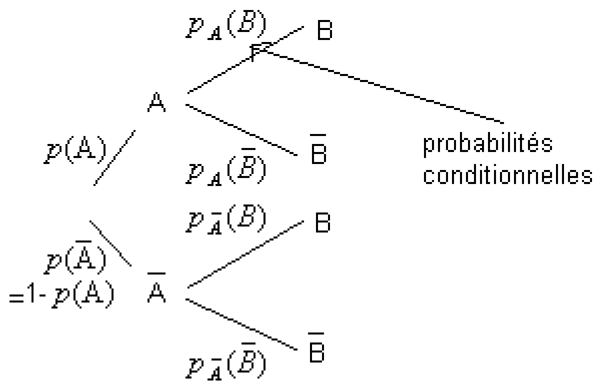
La somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1

La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent

En cas d'équiprobabilité, $\boxed{p(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}}$. Pour deux événements A et B, $\boxed{p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)}$.

S'ils sont incompatibles (c'est-à-dire $A\cap B=\emptyset\Leftrightarrow p(A\cap B)=0$), alors $\boxed{p(A\cup B)=p(A)+p(B)}$.

Pour tout événement A, $\boxed{p(\bar{A})=1-p(A)}$



3-1) Conditionnement et indépendance

Si A et B sont deux événement, tels que $p(A)\neq 0$, on définit la probabilité conditionnelle de l'événement B sachant A par :

$$\boxed{p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)} \quad \boxed{p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)}}.$$

Les probabilités situés « sur les sous-branches » d'un arbre sont des probabilités conditionnelles

Les événements A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre.

Autrement dit, $\boxed{p_A(B)=p(B)}$ ou $\boxed{p_B(A)=p(A)}$, ce qui se traduit en pratique par $\boxed{p(A\cap B)=p(A)\times p(B)}$

3-2) Variable aléatoire

On appelle variable aléatoire toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$. $X(\Omega)$ est alors l'image de Ω.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est la fonction $L: \begin{array}{l} X(\Omega)\to[0,1] \\ k\mapsto p(X=k)\end{array}$, souvent présentée dans un tableau :

valeurs possibles	x_1	x_2	…	x_n
probabilité	p_1	p_2	…	p_n

L'espérance de cette loi est le nombre noté $E(X)$ à égal à : $\boxed{E(X)=p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_nx_n=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i}$

La variance de cette loi est le nombre $V(X)=p_1\left(x_1-E(X)\right)^2+p_2\left(x_2-E(X)\right)^2+\dots+p_n\left(x_n-E(X)\right)^2$

<u>Propriété (formule de Koenig)</u> $\boxed{V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2}=\underbrace{p_1x_1^2+p_2x_2^2+\dots+p_nx_n^2}_{\text{espérance de la variable aléatoire } X^2}-\underbrace{\left[E(X)\right]^2}_{\text{carré de l'espérance de la variable aléatoire X}}$

L'écart-type de cette loi, noté σ, est la racine carrée de la variance : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$. On a toujours $V(X)\geq 0$

3-3) Coefficients binomiaux, triangle de Pascal, formule du binôme de Newton, loi binomiale

Si $n\in\mathbb{N}$, alors « factorielle n », $\boxed{n!=n\times(n-1)\times\dots\times 3\times 2\times 1}$ est le produit des n premiers entiers $\neq 0$.

En convenant que $\boxed{0!=1}$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (avec $0\leq k\leq n$) désigne le nombre de manières d'effectuer un choix simultané de k éléments pris parmi n.

Les coefficients binomiaux vérifient la formule de Pascal : $\boxed{\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}}$,

sont représentés dans le triangle de Pascal,

$$\begin{array}{c|ccccc} & & & p & & \\ \hline & \binom{0}{0} & & & & \\ & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\ n & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\ & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \end{array}$$

et interviennent dans la formule du binome de Newton :

$$\boxed{(a+b)^n=\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\dots\dots\dots+\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}a^0b^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k}$$

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues possibles :
« Succès » et « Echec ». Si on note p la probabilité d'un succès, alors la probabilité d'un échec est égale à $q=1-p$.
Si on répète n fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli, de succès de probabilité p, et d'échec de probabilité $q=1-p$, et si on note X la variable aléatoire désignant le nombre de succès obtenus au cours de ces n répétitions, on dit que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre n et p, notée $B(n,p)$

Alors pour tout entier k, tel que $0\leq k\leq n$, $\boxed{p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$. On a $\boxed{E(X)=np}$ et $\boxed{V(X)=np(1-p)}$

3-4) Lois continues

- Une <u>densité de probabilité</u> sur un intervalle $I=[a;b]$ (respectivement $I=[a;+\infty[$) est une fonction f continue et positive sur I, et telle que $\int_a^b f(t)dt=1$ (respectivement $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt=1$)

- Une variable aléatoire X suit sur I une loi de probabilité p de densité f ssi :

$p(c\leq X\leq d)=p(c<X\leq d)=p(c\leq X<d)=p(c<X<d)=\int_c^d f(t)dt$ et $p(X\geq d)=1-p(X<d)$

<u>Loi de durée de vie sans vieillissement/loi exponentielle de paramètre</u> $\lambda>0$
Elle a pour densité la fonction f_λ définie par : $f_\lambda(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ si $t\in[0;+\infty[$, $f_\lambda(t)=0$ ailleurs.

Ainsi, pour tout réel $x\geq 0$, $\boxed{p(X\leq x)=\int_0^x\lambda e^{-\lambda t}dt}$

<u>Loi uniforme sur [a;b] (a<b)</u>

La loi uniforme sur [a;b] (a<b) a pour densité la fonction f définie par : $f(t)=\frac{1}{b-a}$ si $t\in[a;b]$, $f(t)=0$ ailleurs.

4) Complexes

4-1) Définition, opérations :

Un nombre complexe z est de la forme $\boxed{z=x+iy}$ (écriture « algébrique »), avec $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, et $\boxed{i^2=-1}$

$x=\mathrm{Re}(z)$ est la partie réelle de z, $y=\mathrm{Im}(z)$ est la partie imaginaire. $\mathbb{C}$ est l'ensemble des complexes.

Les opérations algébriques de $\mathbb{R}$ (développement, factorisations, identités remarquables) se prolongent au corps $\mathbb{C}$

Conjugué : Si $z=x+iy$, avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$, alors $\boxed{\bar{z}=x-iy}$ (conjugué du complexe z)

On a : $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$, $\overline{zz'}=\bar{z}\bar{z}'$, $\overline{z^n}=(\bar{z})^n$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ ($z'\neq 0$), $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\bar{z}$ et z imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z}=-z$

4-2) Plan complexe, affixes, module et arguments

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on fait correspondre à tout complexe $z=x+iy$, avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$, le point M de coordonnées $(x;y)$. On dit que z est l'affixe de M

L'axe des abscisses est l'axe des réels, celui des ordonnées est l'axe des imaginaires purs.

L'affixe de $\vec{AB}$ est égale à z_B-z_A, l'affixe du barycentre G de $((A,\alpha),(B,\beta))$ vaut $z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$ ($\alpha+\beta\neq 0$)

Si $z=x+iy$, avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$, le module de z est le réel positif égal à $\boxed{|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}}}$

On a : $|\bar{z}|=|z|$; $|-z|=|z|$; $|zz'|=|z||z'|$; $|z^n|=|z|^n$; $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ ($z'\neq 0$) et $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ (inégalité triangulaire)

Si M est le point du plan complexe d'affixe z, alors $\boxed{|z|=OM}$. De plus $\boxed{AB=|z_B-z_A|}$

Si M est le point du plan complexe d'affixe $z\neq 0$, on appelle argument de z toute mesure en radians de l'angle $(\vec{u},\vec{OM})$

Si on note $\arg(z)=\theta\ [2\pi]$, alors $\boxed{\cos(\theta)=\frac{x}{|z|}}$ et $\boxed{\sin(\theta)=\frac{y}{|z|}}$.

L'écriture $z=|z|(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ est appelée forme trigonométrique de z.

On a : $\arg(\bar{z})=-\arg(z)\ [2\pi]$; $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]$; $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')\ [2\pi]$

Soit A,B,C,D quatre points, d'affixes a,b,c et d. Alors $(\vec{u},\vec{AB})=\arg(b-a)\ [2\pi]$ et $\boxed{(\vec{AB},\vec{CD})=\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)\ [2\pi]}$

4-3) Equation du second degré à coefficients réels

L'équation $z^2=a$, $a\in\mathbb{R}$, $a>0$ admet deux solutions réelles distinctes $z_1=\sqrt{a}$ et $z_2=-\sqrt{a}$

L'équation $z^2=a$, $a\in\mathbb{R}$, $a<0$ admet deux solutions imaginaires pures distinctes $z_1=i\sqrt{|a|}$ et $z_2=-i\sqrt{|a|}$

Equation $az^2+bz+c=0$ ($(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $a\neq 0$). On calcule $\Delta=b^2-4ac$. Si $\Delta\geq 0$, voir le cas réel (chapitre 1)

Si $\boxed{\Delta<0}$, on peut écrire $\Delta=\left(i\sqrt{|\Delta|}\right)^2$, et l'équation $az^2+bz+c=0$ admet donc deux solutions complexes conjuguées

$\boxed{z_1=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}}$ et $\boxed{z_2=\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}}$

4-4) Forme exponentielle d'un nombre complexe

Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on note $\boxed{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}$

On a : $|e^{i\theta}|=1$; $\arg(e^{i\theta})=\theta\ (2\pi)$; $e^{i\theta}e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$ et $(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$ et $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$

Soit $z\in\mathbb{C}^*$. Si on note $r=|z|$ et $\theta=\arg(z)\ [2\pi]$, alors $\boxed{z=re^{i\theta}}$ est l'écriture exponentielle de z

4-5) Expression complexe des transformations du plan $M(z) \to M'(z')$

Translation t de vecteur $\vec{u}$ d'affixe w : $\boxed{z' = z + w}$

Homothétie h de centre Ω d'afixe ω et de rapport $k \in \mathbb{R}$: $\boxed{z' - \omega = k(z - \omega)}$

Rotation r de centre Ω d'afixe ω et d'angle θ : $\boxed{z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)}$

4-6) Formules de Moivre et d'Euler

$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$ et $\boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$ (formules d'Euler) $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$ (formule de De Moivre)

5) Produit scalaire, espace

5-1) Produit scalaire dans le plan ou dans l'espace

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \vec{AB}\cdot\vec{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB)

ou $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$. Formule d'Al-Kashi $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC\cos\left(\widehat{BAC}\right)$

Théorème de la médiane $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$ où I est le milieu de [AB]

Dans un repère orthonormal, $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$ et $\boxed{AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$

5-2) Droites et plans

Equation cartésienne d'une droite D dans un plan : $\boxed{ax + by + c = 0}$, avec $(a,b) \neq (0,0)$. $\vec{n}(a,b)$ est normal à D

Distance d'un point $A(x_A;y_A)$ à une droite D d'équation $ax + by + c = 0$ dans un plan : $\boxed{d(A;D) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$

Equation cartésienne d'un plan P : $ax + by + cz + d = 0$, avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. $\vec{n}(a,b,c)$ est normal à P

Distance d'un point $A(x_A;y_A;z_A)$ à un plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$: $\boxed{d(A;P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$

Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace : La droite passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a,b,c) \neq (0,0,0)$ a pour réprésentation paramétrique $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$,

5-3) Parallélisme et orthogonalité

- Deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont parallèles ssi $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont colinéaires, orthogonales ssi $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont orthogonaux
- Deux plans de vecteurs normaux $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont parallèles ssi $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont colinéaires, perpendiculaires ssi $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont orthogonaux
- Une droite D est orthogonale à un plan P s'il existe un vecteur $\vec{u}$ directeur de D qui est orthogonal à deux vecteurs non nuls de P, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non colinéaires. La droite D sera alors orthogonale à toute droite contenue dans P

5-4) Barycentre, tétraèdre

Si $a + b + c \neq 0$, $\boxed{G = Bar\{(A,a),(B,b),(C,c)\} \Leftrightarrow a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{b}{a+b+c}\vec{AB} + \frac{c}{a+b+c}\vec{AC}}$

Le plan (ABC) est constitué de l'ensemble de tous les barycentres possibles du triplet (A,B,C)

Volume d'un tétraèdre : $\boxed{V = \frac{1}{3}(\text{aire du triangle de base}) \times \text{hauteur} = \frac{1}{3}(\text{base}) \times (\text{distance sommet-plan de base})}$