UNIVERSITE MOULAY ISMAIL
FACULTE DES SCIENCES JURIDIQUES
ECONOMIQUES ET SOCIALES
MEKNES

Master
AISA

Les critères de décision en univers mesurable

Préparé par:

- Cherkani Safae
- Cherkani Sami

Encadré par le Professeur:

Mme Cherkaoui

2008/2009

Introduction

L'incertitude caractérise une situation dans laquelle « aujourd'hui » je ne sais pas ce que sera ma situation demain !, la situation d'un voisin ! etc…

Le problème de l'incertitude ne vient pas tant de l'ignorance de l'individu que des conséquences qu'il peut avoir sur ses anticipations.

Certes l'attitude des individus ou agents économiques est généralement différenciée et peut conduire à des conséquences parfois regrettables.

Face à ce problème la microéconomie s’est élargie afin d’intégrer cette nouvelle dimension de l’incertitude pour cerner plus ou moins le chois des individus en avenir risqué!!

on est en présence d’un avenir risqué ou de l’incertitude mesurable au sens de «*Knight* ».

Nous présenterons donc trois critères de décision :

I- Le critère de Markowitz.

II-Le critère de Bernoulli.

III- L'arbre de décision et d'information.

Introduction à l'économie de l'incertitude

Lorsqu'une personne doit prendre une décision en univers incertain, deux cas doivent être distingues:

Soit la personne qui doit prendre la décision doit le faire immédiatement sur la base donc de l'information imparfaite dont elle dispose. Economie de l'Incertitude

Soit elle peut prendre le temps d'améliorer son information avant de prendre sa décision l'Economie de la certitude.

la certitude est un cas particulier de l'incertitude

Définition risque et incertitude

- **L'incertitude c'est le cas ou on ne fait pas l'hypothèse que le décideur affecte des probabilités aux états du monde.**

- **Risque :c'est le cas ou on fait cette hypothèse.**

Les différents types d'incertitude en économie

- **L'incertitude décisionnelle : concerne l'environnement décisionnel des individus et s'applique a priori a tous sans qu'ils aient une quelconque prise sur cet environnement (quel temps fera-t-il demain ?). L'incertitude décisionnelle est donc totalement exogène a la décision..**

- **L'incertitude stratégique : L'incertitude stratégique est une situation dans laquelle je ne connais pas les préférences de d'autruit, ou l'ensemble de ses actions, ou son niveau d'information.**

I- Le critère de Markowitz et la frontière d’efficience

Le critère de Markowitz :a été déterminé pour arbitrer entre la possession de différents titres financiers ou porte feuilles financiers.

le risque d’un titre ou d’un portefeuille peut être mesuré par la dispersion de son cours tout au long du temps, et être utilisé pour prévoir son évolution future, La dispersion des cours ou rendement d’un titre peut être mesuré par l’écart-type.

Cette mesure de la dispersion va compléter l'information de l'investisseur sur le rendement ou le cours moyen du titre ou du portefeuille, a priori, un investisseur va préférer les titres les plus rentables mais impliquant le moins de risque.

Rappel : l'espérance mathématique, la variance, et l'écart type :

L'espérance mathématique

- **Etant donné une variable aléatoire réelle x prenant les valeurs $x_1, \dots, x_j, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1 \dots\dots p_j \dots\dots\dots\dots p_n$ respectivement, et de moyenne finie E(x), on appellera espérance mathématique de x, le réel noté E(x) obtenu par :**

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} p_{i\times} x_i$$

- **Pour une fonction de densité f(x), on aura :**

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

La variance, et l'écart type :

- Etant donné une variable aléatoire réelle x prenant les valeurs $x_1, \ldots x_j, \ldots x_n$ avec les probabilités $p_1, \ldots, p_j \ldots, p_n$ respectivement, et de moyenne finie E(x), on appellera variance de x le réel noté V(x) ou donné par :

  V(x)= $\sum_{i}^{n} p_i (x_i - E(x))^2$ = $\sigma^2{}_x$

- Pour une fonction de densité f(x), on aura :

$$V(x) = \sigma^2{}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - f(x))^2 dx$$

- On notera également que la variance peut aussi se calculer de la façon qui suit :

  V(x)= $\sigma^2{}_x$ =E(x2)-(E(x))2

Présentation du critère de MARKOWITZ

- **Fonction de valorisation :**
  - La fonction de valorisation est caractérisée par un couple composé par l'espérance mathématique de l'action et sa variance.

$$E(a_j) = \sum_{e_i=1}^{e_i=n} \left(p_{e_i} R_{a_j,e_i}\right)$$

$$\sigma^2(a_j) = \sum_{e_i=1}^{e_i=n} p_{e_i} \left(R_{a_j,e_i} - E(a_j)\right)^2$$

Critère de choix n° 1 :

$$a_k \succ a_l \text{ si } \begin{cases} E(a_k) \square E(a_l) \text{ et } \sigma(a_k) < \sigma(a_l) \\ \text{ou bien} \\ E(a_k) > E(a_l) \text{ et } \sigma(a_k) \leq \sigma(a_l) \end{cases}$$

Cette règle de comparaison est assez restrictive car: elle ne prend pas en considération le fait qu'un fort écart-type puisse être compensé par une forte espérance .

Donc ce critère ne fonctionne pas toujours : il faut le compléter

Si le critère précédent ne permettait pas de se prononcer on utiliserait le critère de choix n° 2 ou n°3 :

critère de choix n° 2 :

$$a_k \succ a_l \quad \text{si} \quad \frac{E(a_k)}{\sigma(a_k)} > \frac{E(a_l)}{\sigma(a_l)}$$

Cette règle consiste à mesurer le pourcentage d'espérance par unité d'écart type

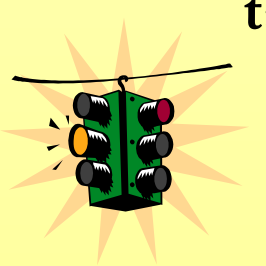
La meilleur stratégie sera celle qui aura la plus grande espérance par unité d'écart type

Critère de choix n° 3 :

$$a_k \succ a_l \qquad \text{si} \qquad \frac{moy(\mathrm{a_k}) - moy(a_l)}{\sigma(a_k) - \sigma(a_l)} > \lambda$$

Cette règle apporte une notion de déplacement mesuré par le Taux Marginal de Substitution entre l'espérance et l'écart type.

On peut donc changer de stratégie à condition que le taux d'échange soit assez élevé.



Il faut toujours tester deux actions de telle façon que le numérateur et le dénominateur soient positifs

Exemple d'application

Actions\états	e_1	e_2	e_3	e_4
a_1	20	25	40	100
a_2	5	30	50	125
a_3	40	50	75	0
$p(e_i)$	p_1=0.20	p_2=0.25	p_3=0.40	p_4=0.15

$$\left.\begin{aligned} E(a_1) &= 41{,}25 \\ \sigma(a_1) &= 25{,}97 \\ E(a_2) &= 47{,}25 \\ \sigma(a_2) &= 31{,}37 \\ E(a_3) &= 50{,}50 \\ \sigma(a_3) &= 24{,}95 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a_3 &\succ a_1 \\ a_3 &\succ a_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a^* = a_3}$$

Application du critère n°2 :

$$\left.\begin{array}{l} E(a_1) = 41{,}25 \\ \sigma(a_1) = 25{,}97 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{E(a_1)}{\sigma(a_1)} = \frac{41{,}25}{25{,}97} \approx 1{,}58$$

$$\left.\begin{array}{l} E(a_2) = 47{,}25 \\ \sigma(a_2) = 31{,}37 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{E(a_2)}{\sigma(a_2)} = \frac{47{,}25}{31{,}37} \approx 1{,}50$$

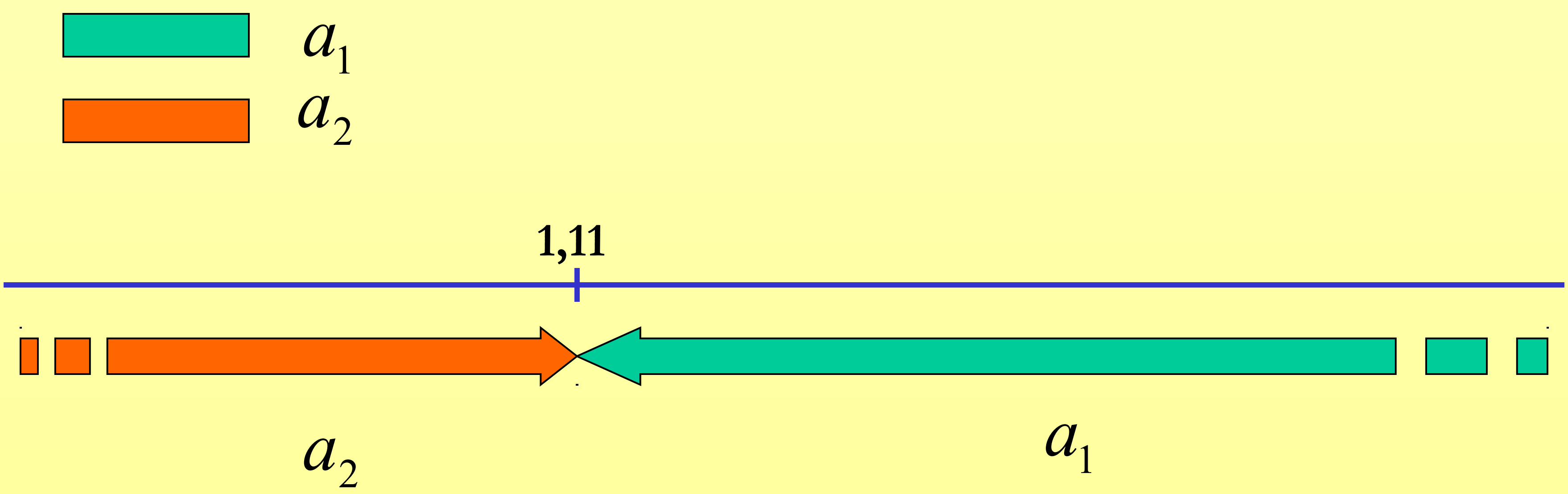
$$\left.\begin{array}{l} E(a_3) = 50{,}50 \\ \sigma(a_3) = 24{,}95 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{E(a_3)}{\sigma(a_3)} = \frac{50{,}50}{24{,}95} \approx 2{,}02$$

$$a_3 \succ a_1 \succ a_2$$

Comparaison de a_2 et a_1 à l'aide du critère n°3 :

Comparaison de a_2 et de a_1

$$a_2 \succ a_1 \quad \text{si} \quad \frac{E(a_2)-E(a_1)}{\sigma(a_2)-\sigma(a_1)} = \frac{47{,}25-41{,}25}{31{,}37-25{,}97} \approx 1{,}11 > \lambda$$



2- Le critère de BERNOULLI

Bernoulli critique le critère de PASCAL à partir d'un exemple connu sous l'appellation Paradoxe de Saint-Pétersbourg

Le Paradoxe de Saint-Pétersbourg :

Un mendiant possède un billet de loterie lui permettant de gagner 20.000 Ducats avec une probabilité égale à 0,5. Un riche marchand lui propose d'acheter ce billet à 9.000 Ducats. Le mendiant accepte, ce qui est contraire au paradigme Pascalien !

Formalisation de ce problème :

	e1	e2
a1	0	20 000
a2	9 000	9 000
Prob$\{e_j\}$	0,5	0,5

$$\left.\begin{aligned} E(a_1) &= 0{,}5\times 0 + 0{,}5\times 20000 = 10000 \\ E(a_2) &= 0{,}5\times 9000 + 0{,}5\times 9000 = 9000 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{a^* = a_1}$$

Pourquoi le mendiant préfère vendre son billet de loterie ?

La réponse de D. Bernoulli :

Daniel Bernoulli a avancé deux explications permettant de le résoudre :

✓Ce qui importe aux individus ce n'est pas le gain en lui même mais plutôt l'utilité qu'il procure.

✓La satisfaction des individus augmente de moins en moins vite au fur et à mesure qu'ils s'enrichissent. C'est le Principe dit de l'utilité marginale décroissante. Ce qui signifie que les fonctions mesurant la satisfaction ou l'utilité doivent être concaves.

Rappel

Principe de l'utilité marginale décroissante : l'utilité croît de moins en moins vite au fur et à mesure que la richesse augmente. La fonction est alors concave (sa dérivée seconde étant négative).

- **Fonction de valorisation :**
  - **Évaluer l'espérance mathématique de l'utilité de chaque action.**

$$Eu(a_j) = \sum_{e_i = e_1}^{e_i = e_n} p_{e_i} \, u\left(R_{a_j, e_i}\right)$$

- **Critère de choix :**
  - **Choisir l'action dont l'espérance mathématique de l'utilité est la plus élevée.**

$$a^* \in \arg\max Eu(a_j)$$

Dans le cas du paradoxe de saint petersbourg

Le mendiant accepte de vendre son billet de loterie dès lors que :

$$Eu(a_2) > Eu(a_1)$$

Soit :

$$\frac{1}{2}u(0) + \frac{1}{2}u(20000) < \frac{1}{2}u(9000) + \frac{1}{2}u(9000)$$

$$u(20000) < 2.u(9000)$$

Si la fonction d'utilité du mendiant est de type u(x)=Ln(x), il est rationnel d'accepter l'échange :

Ln(20000)=9,9 et 2*Ln(9000)=18,20

Critique du critère de Bernoulli

Ce critère peut être pris en défaut à l'aide de l'exemple suivant :

On joue à pile ou face : si l'on obtient « face » on gagne 2€ et on a le droit de rejouer. Si l'on obtient « pile » on ne gagne rien et le jeux s'arrête.

Si on a le droit de jouer un deuxième coup et qu'on obtient de nouveau « face » le gain précédent est multiplier par deux. Si on tire « pile », le jeux s'arrête.

En ainsi de suite …

Question : Combien êtes vous prêt à payer pour jouer à ce jeux ?

Profil des gains attendus :

$$\text{gain} = \begin{cases} 2 \ \text{ avec la probabilité } \dfrac{1}{2} \\ 2^2 \ \text{ avec la probabilité } \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \\ \ldots \\ 2^{\text{n}} \ \text{ avec la probabilité } \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \\ \ldots \end{cases}$$

Le paradigme pascalien nous donne la valorisation ci-dessous

$$E(gain) = \frac{1}{2}2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 2^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n 2^n + \cdots = +\infty$$

Comme l'espérance de gain est infini, on accepte de payer une somme exorbitante pour jouer à ce jeux …… vraiment ?

La réponse de Bernoulli :

Si u(x)=Ln(x)

$$E\,u\left(gain\right)=\frac{1}{2}Ln\left(2\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}Ln\left(2^{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}Ln\left(2^{n}\right)+\cdots$$

$$E\,u\left(gain\right)=\frac{1}{2}Ln\left(2\right)\left[1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\cdots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots\right]$$

$$E\,u\left(gain\right)=Ln\left(4\right)=u\left(4\right)$$

Si votre fonction d'utilité est logarithmique, vous ne miserez que maximum 4€ pour jouer à ce jeux !

Mais si les gains attendus sont :

$$\text{gain} = \begin{cases} e^{2} \quad \text{avec la probabilité } \dfrac{1}{2} \\ e^{2^{2}} \quad \text{avec la probabilité } \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2} \\ \ldots \\ e^{2^{n}} \quad \text{avec la probabilité } \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} \\ \ldots \end{cases}$$

Avec le critère de Bernoulli on obtient :

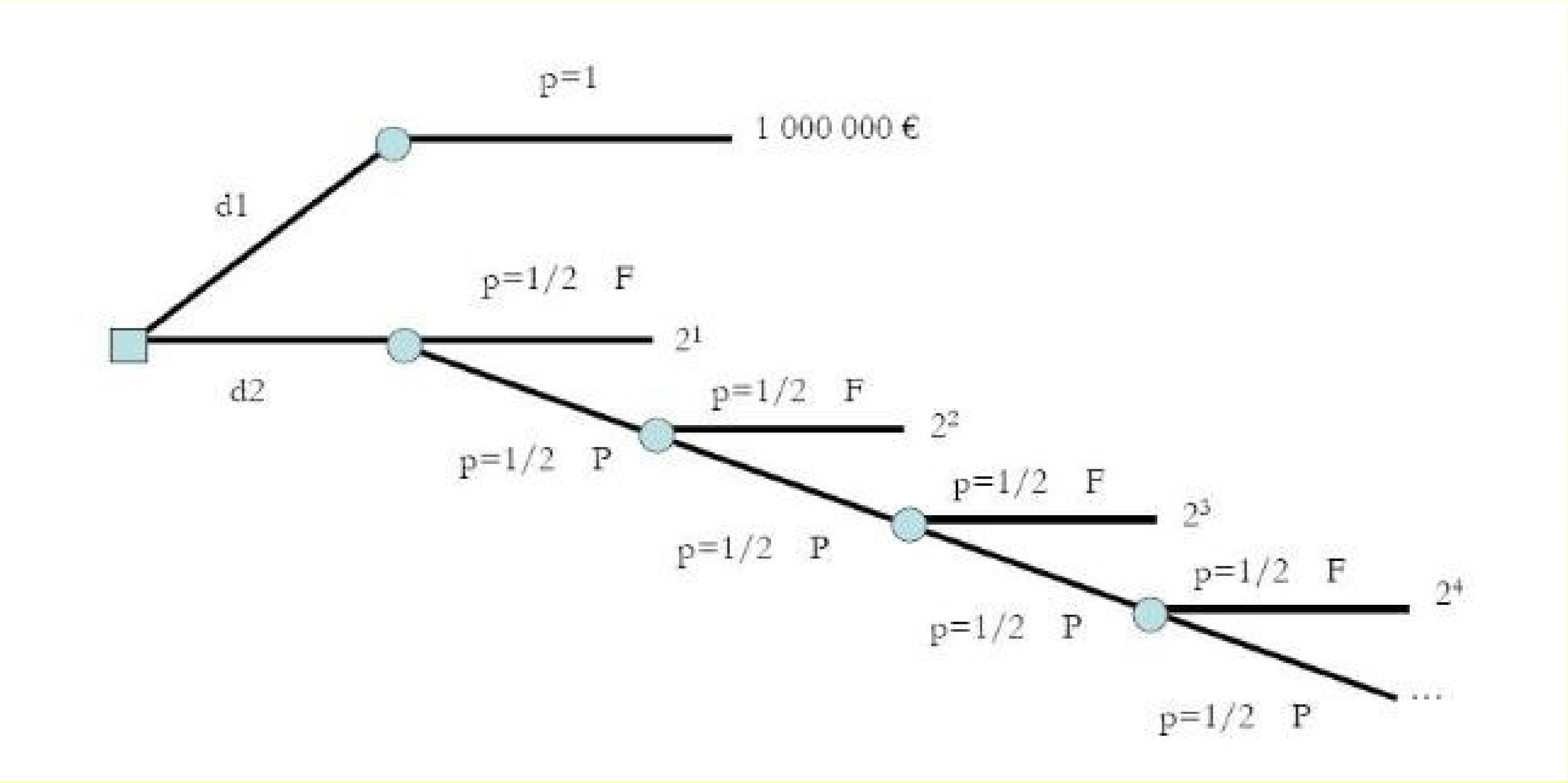
$$Eu(gain) = \frac{1}{2} Ln\left(e^{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{2} Ln\left(e^{2^{2}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} Ln\left(e^{2^{n}}\right) + \cdots = +\infty$$

Comme l'espérance de l'utilité du gain est infinie, on accepte de payer une somme exorbitante pour jouer à ce jeux. Le critère de Bernoulli est pris en défaut …..

Arbre de décision et information

Dans le but de déterminer la stratégie optimale, on procède de la façon suivante : on calcule pour chaque action, son espérance(a). L'on obtient alors un arbre réduit dont m branches partent du nœud initial et se terminent par les espérances des différentes actions, pour finalement opter pour l'action dotée de la plus forte espérance.

Le choix de St Petersbourg en termes d'arbre de décision



Ce qui formellement revient à considérer le processus ci-après :

- $\forall$ i=1… m $E(a_i) = \sum p_j R_{i,j}$

L'action optimale est celle qui a la plus grande espérance :

- Soit a* : $\exists$ un indice $\in \{1,2,\ldots\ldots, m\}$ tel que $a^* = a_{opt}$ et $E(a^*) = \sum p_j R_{opt,j}$

- **Exemple:**

Soit:

$E\ (a_1)=6$

$E\ (a_2)=27$

$E\ (a_3)=36{,}75$

- **La décision optimale consistera à choisir l'action a_3**

La valeur espérée de l’information parfaite (EVPI)

Soit a* l’action optimale obtenue à l’aide de l’arbre de décision, nous déterminerons pour chacun des états possibles l’action qui apportera moins de regret, soit $a_{(j)}$, celle correspondant à l’état e_j. Formons un tableau qui reprendra la solution obtenue avec le critère de Pascal et les solutions optimales lorsque le décideur sera informé sur l’état qui se réalisera ultérieurement.

Information Possible		**Décision à priori**		**Décision à postériori**		**Valeur de l'informationparfaite**
état	Probabilité	décision	résultat	Décision	résultat	regret
e_1	p_1	a^*	R_{opt}	$a_{ind(1)}$	$R_{ind(1)}$	$R_{ind(1),1} - R_{opt,1}$
e_2	p_2	a^*	R_{opt}	$a_{ind(2)}$	$R_{ind(2)}$	$R_{ind(2),2} - R_{opt,2}$
e_n	p_n	a^*	R_{opt}	$a_{ind(n)}$	$R_{ind(n)}$	$R_{ind(n),n} - R_{opt,n}$

- **La dernière colonne nous indique le regret quand l'état de la nature est avéré .**
- **L'espérance mathématique de ce regret est donnée par l'expression qui suit :**

$$\mathbf{EVPI} = \sum p_j \left[R_{ind(j),j} - R_{opt,j} \right]$$

- **Nous pouvons également l'exprimer à l'aide de la formule suivante:**

EVPI=$\sum p_j$ Regret(a*,ej) ou regret(a*,e_j) représente regret sous l'état e_j lorsque la décision prise est a*

la révision des croyances du système d’acquisition d’information

- <u>L’acquisition de l’information</u>

La révision de l’information est issue de la règle de Bayes :

$$P(A/b) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

C'est-à-dire la révision d’information d’un événement A par exemple est effectuée par le biais d’un autre événement B qui fait réviser les croyances de l’agent économiques avant la prise de décision.

Le système d'information et la stratégie optimale

Considérons les indicateurs suivants tels que les probabilités soient connues $P(I_e / e_j)$

$\forall e=1$,…..k et $\forall i=1$,…..,n ; nous sommes en présence d'un arbre de décision dont les k premières branches sont indicateurs de $I_1, I_2, \ldots I_k$;chacune de ces branches étant suivie de m branches correspondants aux actions possibles , les probabilités des premières branches sont les $P(I_e)$ et celle des branches terminales les $P(e_j / I_e)$.

Il faudra ensuite déterminer ces dernières connaissant les probabilités des divers états, ce qui donne lieu aux calculs ci-dessous :

$$Pej/Ie) = \frac{P\left({}^{Ie}/_{ej}\right)}{P(Ie)} \times P(e_j) \quad \text{avec} \quad P(Ie) = \sum_1^n P\left({}^{Ie}/_{ej}\right) P(e_j)$$

Ensuite on calcule $E(a_i/I_e) \times r_{i,j}$

On opera pour l'action qui maximise $E(a_i/I_e)$ ce qui nous conduit à obtenir la stratégie optimale :

- a_1 avec la probabilité $P(I_1)$
- a_2 avec la probabilité $P(I_2)$
- ……………………………………….
- ……………………………………….
- ……………………………………….
- a_n avec la probabilité $P(I_n)$

la valeur espérée de cette stratégie optimale est $\sum_e P(I_e) \times E(a_i/I_e)$

Efficience

- L’efficience du système $I_1, \ldots\ldots I_k$ est mesurée par le ratio suivant :

$$\text{Efficience} = \frac{\sum P(I_l)\times\left[\sum P(e_j/I_l)\times R_{indice(l),j}\right]}{\sum P(ej)\left[R_{ind(j),j}-R_{opt,j}\right]} - \frac{\sum P(e_j)R_{opt,j}}{\sum P(e_j)\left[R_{ind(j),j}-R_{opt,j}\right]}$$

’usage
de l’information $I_1, \ldots\ldots I_n$ si ce pourcentage est faible, alors il sera inutile d’y
recourir.

Conclusion

Il en résulte que l'objectif de la microéconomie de l'incertain est de doter l'agent économique des mesures lui permettant de calculer le gain espérer et le risque encouru en même temps de telle manière à optimiser les chances de gain et de réduire les possibilités de perte.