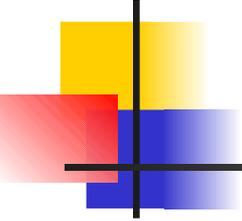


Thème 3: Les mathématiques financières

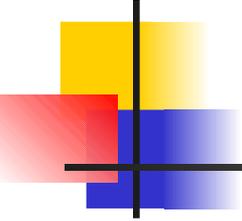
- Deux concepts importants :
 - Le calcul des intérêts
 - L'anuité

Les tables financières et la calculatrice: Sharp EL-733A



Cinq concepts importants d'un emprunt

- Capitalisation des intérêts : L'Addition des intérêts au capital.
- Période de capitalisation: Laps de temps entre deux capitalisations. Peut être mensuelle, trimestrielle et même quotidienne.
- Amortissement financier: Diminution graduelle du capital emprunté.
- Période d'amortissement: Nombre d'années requises pour le remboursement complet du prêt (capital et intérêts).
- Le terme: Durée du contrat d'emprunt.



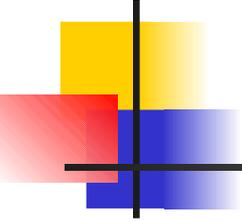
L'intérêt simple

- L'intérêt simple: En fonction du capital seulement.

Exemple: Un placement de 100 000\$ porte un intérêt simple de 8% par an.
Qu'elle sera la valeur du placement à son échéance si celle-ci est
prévue dans trois ans?

Intérêts annuels: 100 000\$ * 8% = 8 000\$

Valeur à l'échéance: 100 000 \$ + 8 000\$ + 8 000\$ + 8 000\$ = 124 000\$



L'intérêt composé

- L'intérêt composé: En fonction du capital et des intérêts des période précédentes.

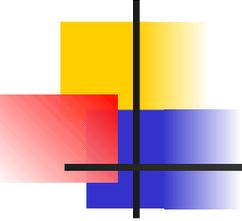
Exemple: Si notre placement de 100 000\$ avait un intérêt de 8% composé annuellement, le placement serait dans trois ans:

Intérêts première année: 100 000\$ * 8% = 8 000.00\$

Intérêts deuxième année: 108 000\$ * 8% = 8 640.00\$

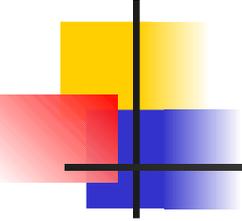
Intérêts troisième année: 116 640\$ * 8% = 9 331.20\$

Valeur à l'échéance: 125 971.20\$



Taux d'intérêt nominal et effectif

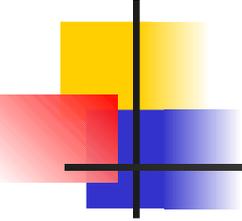
- Taux d'intérêt nominal est le taux que l'on capitalise plus fois par année.
- Le taux d'intérêt effectif est le taux réel: Le taux qu'on capitalise qu'une fois par année pour obtenir une valeur identique le taux nominal qui est capitalisé plus d'une fois.
- Le taux d'intérêt effectif est utile pour comparer deux taux capitalisés avec différentes fréquences.



Convertir un taux nominal en taux effectif

Taux effectif (Formule sera exposée au tableau)

- Permet d'analyser le taux réel du prêt.



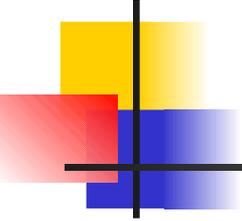
Convertir un taux nominal en taux effectif

Exemple: Un emprunt au taux de 9% capitalisé mensuellement équivaut à quel taux effectif ?

Taux effectif $(1 + (9\%/12))^{12} - 1$

$$= (1,0075)^{12} - 1$$

$$= 0.0938 \text{ ou } \mathbf{9.38\%}$$



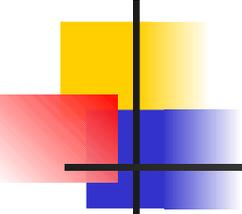
Convertir un taux nominal en taux effectif

Exemple: Une carte de crédit affiche un taux annuel de 18,5% et un taux périodique quotidien de 0,0507% (les intérêts sont capitalisées quotidiennement).
Qu'elle est le taux effectif de la carte?

$$\text{Taux périodique} = 18.5\%/365 = 0.0507\%$$

$$\text{Taux effectif} = (1,000507)^{365} - 1 = 20.32\%$$

$$\text{Sharp EL-733A: } 365 \text{ 2nd F FV } 18.5 = 20.32$$



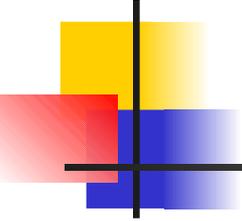
Versements mensuels d'un prêt personnel (Table 1)

- La table 1 présente les versements mensuels requis pour un prêt personnel de 1 000\$ selon différents taux et différentes durées. La capitalisation est **mensuelle**.

Exemple: On contracte un prêt de 20 000\$ pour l'achat d'une automobile. Le prêt est d'une durée de 5 ans à 8%. Les paiements mensuels seront de quel montant?

Dans la table 1: 5 ans / 8% = 20.28\$

20.28\$ X 20 = 405.60\$ par mois



Avec la calculatrice

-20 000 **PV** (Valeur actuelle)

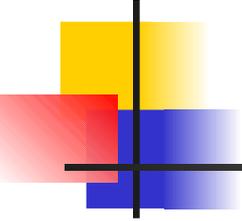
60 **n** (Nombres de paiements ou de période de capitalisation)

0.6667 **i** (Taux d'intérêt périodique = taux / nombre de périodes de capitalisation)

COMP PMT = 405.53 (paiement mensuel)

15 **AMRT** = 298.73 (capital remboursé avec le 15^e paiement)

AMRT = 106.80 (intérêts remboursé avec le 15^e paiement)

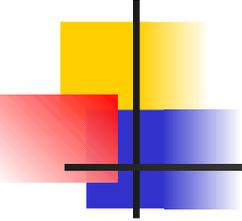


Avec la calculatrice

1 P1/P2 15 P1/P2 AC@ 4 279.04 (total du capital remboursé au cours des 15 premiers paiements)

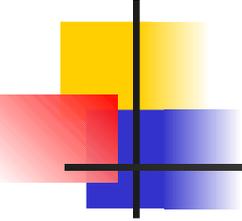
ACC = 1 803.94 (total des intérêts payés)

-



Le cas d'un prêt hypothécaire

- Les prêt hypothécaires se capitalisent mensuellement et se remboursent mensuellement. Pour le calcul avec la calculatrice Sharp EL-733A, la période de capitalisation doit correspondre exactement avec la période des versements.
- Nous devrions convertir le taux nominal en taux effectif puis reconverter en taux nominal qui se capitalise 12 fois l'an.
- Une formule peut également convertir directement d'un nominal à l'autre. (La formule sera exposée au tableau)



Le cas d'un prêt hypothécaire

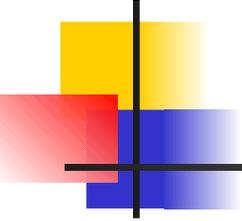
Exemple: Vous achetez une maison de 100 000\$ avec une mise de fonds de 20 000\$. Vous contractez une hypothèque de 80 000\$ sur 20 ans à 7%. Quelle seront les paiement mensuels?

En premier lieu, il faut convertir le taux nominal en taux effectif:

2 **2ndF FV**

7 = 7.12%

(taux effectif: peut aussi se trouver avec le tableau 3.1: Table de conversion des taux nominaux en taux effectifs).



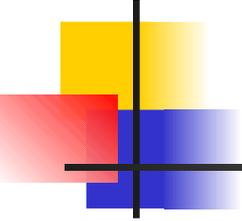
Le cas d'un prêt hypothécaire

Ensuite, on converti se taux effectif en taux nominal qui capitalise 12 fois par année:

$$\underline{12 \text{ndF PV.12} = 6.90\%}$$

Nous avons maintenant notre taux nominal équivalent.

Avec la formule: $((1 + (7\% / 2))^{12}) - 1 = 6.90\%$



Le cas d'un prêt hypothécaire

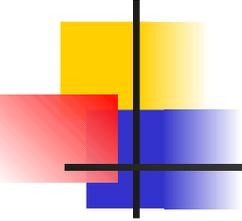
Calcul des paiements avec la calculatrice:

-80 000 **PV**

6.90 **2ndF** i iou 0.575 **2ndF** i

20 **2ndF** n nou 240 **2ndF** n

COMP **PMT**= 615.45\$



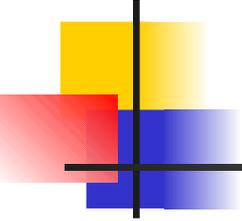
Versements mensuels pour un prêt hypothécaire (Table 2)

On peut également solutionner notre exemple avec la table 2. Dans ce cas, aucune conversion de taux nominal n'est nécessaire.

- La table 2 présente les versements mensuels pour un prêt hypothécaire de 1 000\$ (capitalisation semestrielle) selon différents taux et durées.

Exemple: Pour notre hypothèque de 20 ans à 7%:

$$7.69 \times 80 = 615.20\$$$

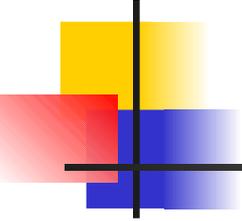


Deuxième exemple : Prêt hypothécaire

Exemple: J'achète une maison de 150 000\$ avec une mise de fonds initiale de 10 000\$. Je contracte une hypothèque de 140 000\$ sur 15 ans à 7% pour la balance, soit 140 000\$. Quel sont les paiements mensuels?

Table 2 à 7% et 15 ans: 8.93

$8.93 \times 140 = 250.20\$$



Valeur finale d'un capital placé à intérêt composé annuellement (Table 3)

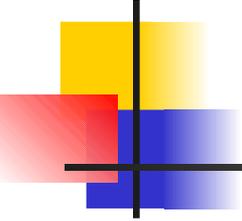
- La table 3 présente la valeur finale d'un capital de 1 000\$ placé à intérêt composé annuellement selon différents taux et nombre d'années.

Exemple: Pour un placement garanti de 6 000\$ à 4% pour 3 ans, quelle sera la valeur finale?

$$\underline{1\ 124.864 \times 6 = 6\ 749.18\$}$$

Exemple: Pour un placement de 1 000\$ pendant 20 ans à 7%.

$$\underline{3\ 869.68\$}$$



Utilisation de la table 3 lorsque la capitalisation est différente qu'annuelle

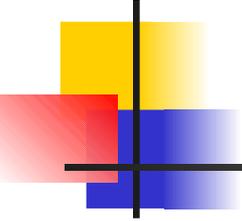
- Si la capitalisation est plus fréquente qu'annuellement, on converti le taux annuel en taux périodique et l'on augmente le nombre de période en conséquence.

Exemple: Combien vaudra un placement de 1 000\$ à 8% dans 5 ans si la période de capitalisation des intérêts était semestrielle?

On converti notre taux annuel en taux périodique: de 8% à 4%

On augmente notre nombre de période: de 5 ans à 10 semestres.

Tables 3: $n=10$ et $\text{taux}=4$: 1 480.24\$



Utilisation de la table 3 lorsque la capitalisation est différente qu'annuelle

Exemple: Si nous avons un placement de 10 000\$ à 20% dont les intérêts sont capitalisés trimestriellement et dont l'échéance est dans 4 ans, combien vaut le placement à l'échéance?

Taux d'intérêt périodique: $20\%/4 = 5\%$

Nombre de périodes: $4 \text{ ans} \times 4 \text{ trimestres/ans} = 16 \text{ trimestres}$

Tables 3: $n = 16$ et $\text{taux} = 5\%$: $\text{facteur} = 2\,182.87459$

Valeur à échéance = $10 \times 2\,182.87459 = 21\,828.75\text{\$}$

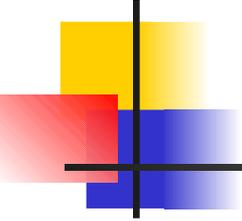


Table 3 pour tenir compte de l'inflation

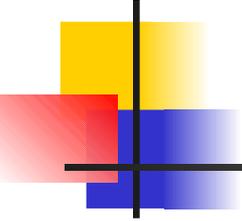
- La table 3 s'utilise également pour prévoir le coût de la vie dans plusieurs années suite à l'inflation.

Exemple: Le coût de la vie d'une personne est de 5 000\$ par mois actuellement. À 2% d'inflation par année, quel sera le coût de la vie de cette personne dans 4 ans?

$$\underline{5 \times 1\,082.43216 = 5\,412.16\$}$$

Et si son coût de la vie initial était plutôt de 2 450\$ par mois?

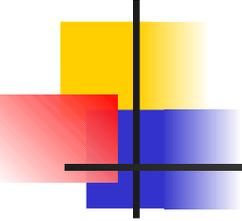
$$\underline{2\,450 \times (1\,082.43216 / 1\,000) = 2\,651.96\$}$$



La formule générale d'une valeur future

- Cette formule permet de calculer la valeur future d'un placement à intérêt composé.

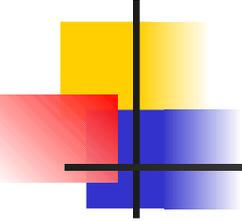
(La formule sera présentée au tableau)



Taux d'intérêt successifs

- Cette formule permet de calculer la valeur finale d'un investissement à plusieurs taux d'intérêts successifs.

(La formule sera présentée au tableau)



Valeur actualisée (Table 4)

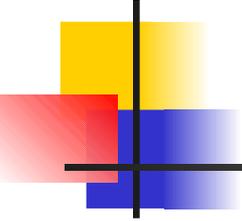
- La table 4 permet de savoir quelle somme doit-on investir maintenant pour disposer d'un capital donné (1 000\$) dans un certains nombres d'années.

Exemple: Combien doit-on investir aujourd'hui au taux de 8% capitalisé annuellement pour disposer de 3 000\$ dans trois ans?

$$\underline{793.83224 \times 3 = 2\,381.50\$}$$

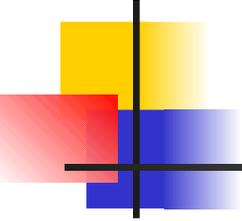
Et si je désire plutôt 500\$ dans trois ans?

$$\underline{500 \times (793.83224/1000) = 396.92\$}$$



L'annuité

- Annuité: ensemble de versements effectués à intervalles de temps égaux afin de payer une dette ou faire un placement.
 - Périodicité des versement: mensuel, trimestrielle, annuelle.
 - Terme: Montant du versement
- Annuité simple: Période de paiement coïncide avec la période de capitalisation. Ex.: prêt personnel.
- Annuité générale: La période de paiement diffère de la période de capitalisation. Ex.: hypothèque.
- Annuité Constante: termes égaux sinon annuité variable
- L'annuité peut-être en début ou en fin de période.



Valeur finale d'une somme investie tous les ans (table 5)

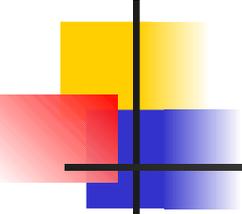
- La table 5 présente la valeur finale d'une annuité annuelle de 1 000\$ en fin de période selon différentes durées et taux d'intérêt. Annuité simple: la capitalisation est annuelle.

Exemple: Si j'investi 1 000\$ à la fin de chaque année dans un certificat garanti à 7%, combien j'aurais dans 15 ans?

25 129.02\$ (Sharp : 1000 **PMT** 15 **n** 7 **i** **COMP** **FV**)

Si j'investissait plutôt 300\$ annuellement:

$300 \times (25\ 129.02 / 1\ 000) = 7\ 538.71\$$



Valeur finale d'une annuité en début de période

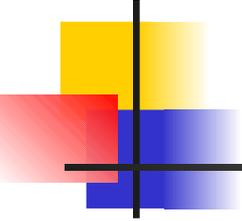
Exemple: Et si j'effectue le même exemple que précédemment, sauf en investissant le 1 000\$ à tous les débuts d'années, quelle serait la valeur finale?

$$\underline{25\ 129.02 \times 1.07 = 26\ 888.05\$}$$

(Sharp: **BGN** 1000 **PMT** 15 **n** 7 **i** **COMP** **FV**)

Attention: pour remettre en mode fin de période, réappuyer **BGN** après.

Comme tous les investissements sont fait un an plus tôt, ils profitent tous un an de plus au taux de 7%, donc la valeur de mon annuité se trouve augmentée de 7%.



Pour une annuité à périodicité mensuelle

Exemple: Supposons qu'au lieu d'investir 1 000 \$ tous les ans comme précédemment j'investisse 83.33\$ à la fin de chaque mois (83.33 X 12 mois = 999.96\$) toujours à 7% pendant 15 ans. Quelle est la valeur finale de la série de placement?

Sharp:

$$\underline{12 \text{ 2ndF PV } 7 = 6.78}$$

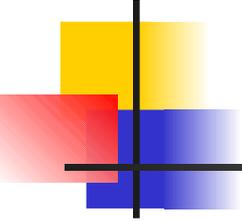
$$\underline{6.78 / 12 = 0.565}$$

$$\underline{83.33 \text{ PMT}}$$

$$\underline{0.565 \text{ i}}$$

$$\underline{12 \times 15 \text{ n}}$$

$$\underline{\text{COMP FV} = 25\,913.20\$}$$



Montant à investir pour obtenir une somme désirée (table 6)

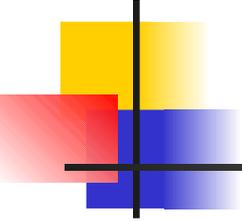
- La table 6 présente le montant à investir à la fin de chaque année pour obtenir 1 000\$ en bout de ligne pour un taux d'intérêt donnée.

Exemple: Combien doit-je investir à un taux de 10% à la fin de chaque année pendant 20 ans pour avoir 200 000\$?

$$\underline{200 \times 17.45962 = 3\,491.92\$}$$

Et si je choisissais d'investir en début d'année?

$$\underline{3\,491.92 / (1 + 10\%) = 3\,174.47\$}$$



Capital requis pour la production d'un revenu (table 7)

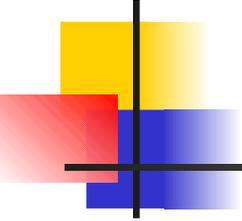
- La table 7 présente quel capital investi à un taux donné est nécessaire afin de produire des revenus annuels égaux pendant un certain nombre d'années.
 - Au bout du compte le capital est complètement épuisé
 - Les revenus ne sont pas indexés

Exemple: Quel capital dois-je investir maintenant afin de supporter un coût de la vie de 30 000\$ annuellement pendant 20 ans à un taux d'intérêt de 10% annuellement et avec un taux d'impôt de 20%?

Taux d'intérêt après impôt: $(10\% \times 80\%) = 8\%$

Table 7 : 8% et n=20: 9 818.14741

$9\ 818.14741 \times 30 = 294\ 544.42\$$



Revenu annuel pour amortir un capital

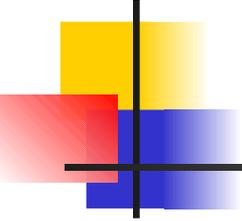
- La table 8 présente le revenu annuel pour amortir un capital de 1 000\$ selon un nombre d'années et un taux d'intérêt donné.

Exemple: Si vous avez un capital total de 225 500\$ qui est investi à 10% et que votre taux d'imposition est de 30%, quel revenu pourriez-vous en retirer pour les dix prochaines années ?

Taux d'intérêt après impôt: $10\% \times (1-30\%) = 7\%$

Table 8 à 7% et n=10: 142.3775

$225.5 \times 142.3775 = 32\,106.13\$$



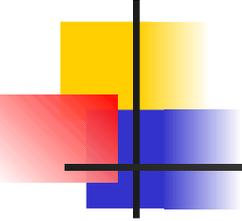
L'annuité à progression géométrique

- L'annuité à progression géométrique prend en compte un taux d'inflation donné.
- La table 9 présente la valeur finale d'une somme investie tous les ans (en fin de période) et majorée d'un taux d'inflation de 4%.

Exemple: Quel est la valeur d'un investissement de 2 000 \$ par année pendant 10 ans majoré d'un taux d'inflation de 4% à 8% d'intérêts?

Table 9 à 8% et 10 ans: 16 967

$$\underline{2 \times 16\,967 = 33\,934\$}$$



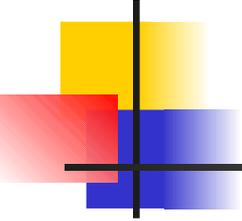
Valeur du premier versement d'une annuité à progression géométrique (table 10)

- La table 10 présente le premier versement requis, les subséquents étant majorés d'un taux d'inflation de 4%, afin d'atteindre un capital de 10 000\$. Les versements sont annuels et en fin de période.

Exemple: Combien sera le premier versement si je désire accumuler un capital de 20 000\$ dans 3 ans en investissant en fin d'année à un taux de 10% et avec une inflation hypothétique de 4%?

—
Table 10 à 10% et à 3 ans: 2 911

$$\underline{2 \times 2\,911\$ = 5\,822\$}$$



Valeur du premier versement d'une annuité à progression géométrique (table 10)

- Quel seront exactement les trois versements?

Premier versement: 5 822 \$

Deuxième versement: $5\,822 \times 1.04 = 6\,054.88$ \$

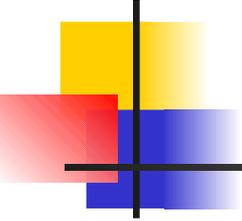
Troisième versement: $6\,054.88$ \$ $\times 1.04 = 6\,297.08$ \$

Capital accumulé:

Fin de la première année: 5 822 \$

Fin de la deuxième année: $(5\,822 \times 1.10) + 6\,054.88$
= 12 459.08 \$

Fin de la troisième année: $(12\,459.08 \times 1.10) + 6\,297.08$
= 20 002.07\$



Le capital nécessaire à la retraite

- La table 11 présente le capital nécessaire pour toucher une annuité à progression géométrique de 10 000\$ à la fin de chaque année compte tenu d'une inflation de 4%. Les revenus seront indexés avec le taux d'inflation (4%).

Exemple: Combien de capital est requis afin de produire un revenu de retraite de 40 000\$ annuellement pendant 25 ans, indexé à une inflation de 4%, si l'on compte obtenir un rendement de 9% avant impôt et que notre taux d'imposition est de 33.33%?

Taux de rendement après impôts: 6%

Table 11 à 6% et 25 ans: 189 431\$

4 X 189 431 \$ = 757 724 \$