Thème 3: Les mathématiques financières

- <u>Deux concepts importa</u>nts :
  - Le calcul des intérêts
  - L’anuité

<u>Les tables financières et la calculatrice: Sharp</u> EL-733A

Cinq concepts importants d’un emprunts

- Capitalisation des intérêts : L’Addition des intérêts au capital.
- Période de capitalisation: Laps de temps entre deux capitalisations. Peut être mensuelle, trimestrielle et même quotidienne.
- Amortissement financier: Diminution graduelle du capital emprunté.
- Période d’amortissement: Nombre d’années requises pour le remboursement complet du prêt (capital et intérêts).
- Le terme: Durée du contrat d’emprunt.

L'intérêt simple

- L'intérêt simple: En fonction du capital seulement.

Exemple: Un placement de 100 000$ porte un intérêt simple d
Qu'elle sera la valeur du placement à son échéance si celle-ci
prévue dans trois ans?

Intérêts annuels: 100 000$ * 8% = 8 000$

Valeur à l'échéance: 100 000 $ + 8 000$ + 8 000$ + 8 000$ = 124 000$

L’intérêt composé

- L’intérêt composé: En fonction du capital et des intérêts des période précédentes.

Exemple: Si notre placement de 100 000$ avait un intérêt de 8% composé annuellement, le placement serait dans trois ans:

Intérêts première année:	100 000$ * 8% = 8 000.00$
Intérêts deuxième année:	108 000$ * 8% = 8 640.00$
Intérêts troisième année:	116 640$ * 8% = 9 331.20$

Valeur à l’échéance: 125 971.20$

Taux d'intérêt nominal et effectif

- Taux d'intérêt nominal est le taux que l'on capitalise plus fois par année.

- Le taux d'intérêt effectif est le taux réel: Le taux qu'on c qu'une fois par année pour obtenir une valeur identique le taux nominal qui est capitalisé plus d'une fois.

- Le taux d'intérêt effectif est utile pour comparer deux ta capitalisés avec différentes fréquences.

Convertir un taux nominal en taux effectif

Taux effectif=(Formule sera exposée au tableau)

- Permet d'analyser le taux réel du prêt.

Convertir un taux nominal en taux effectif

Exemple: Un emprunt au taux de 9% capitalisé mensuel équivaux à quel taux effectif ?

Taux effectif $= (1 + (9\%/12))^{12} - 1$

$= (1{,}0075)^{12} - 1$

$= 0.0938$ ou **9.38%**

Convertir un taux nominal en taux effectif

Exemple: Une carte de crédit affiche un taux annuel de 18,5% et un taux périodique quotidien de 0,0507% (les intérêts sont capitalisées quotidiennement). Qu'elle est le taux effectif de la carte?

Taux périodique = 18.5%/365 = 0.0507%

Taux effectif = $(1{,}000507)^{365} - 1 = 20.32\%$

Sharp EL-733A: 365 **2nd F FV** 18.5 = 20.32

Versements mensuels d'un prêt personnel (Table 1)

- La table 1 présente les versements mensuels requis pour un prêt personnel de 1 000$ selon différents taux et différentes durées. La capitalisation est **mensuelle**.

  Exemple: On contracte un prêt de 20 000$ pour l'achat d'une automobile. Le prêt est d'une durée de 5 ans à 8%. Les paiements mensuels seront de quel montant?

  Dans la table 1: 5 ans / 8% = 20.28$

  20.28$ X 20 = 405.60$ par mois

Avec la calculatrice

-20 000 **PV** (Valeur actuelle)

60 **n** (Nombres de paiements ou de période de capitalisation)

0.6667 **i** (Taux d'intérêt périodique = taux / nombre de périodes de capitalisation)

COMP PMT = 405.53 (paiement mensuel)

15 **AMRT** = 298.73 (capital remboursé avec le 15e paiement)
AMRT = 106.80 (intérêts remboursé avec le 15e paiement)

Avec la calculatrice

1 **P1/P2** 15 **P1/P2 ACC** = 4 279.04 (total du capital remboursé au cours des 15 premiers paiements)

ACC = 1 803.94 (total des intérêts payés)

-

Le cas d’un prêt hypothécaire

- Les prêt hypothécaires se capitalisent **semestriellement** mais se remboursent **mensuellement**. Pour le calcul avec la calculatrice Sharp EL-733A, la période de capitalisation d correspondre exactement avec la période des versemen
- Nous devront convertir le taux nominal en taux effectif p reconvertir en taux nominal qui se capitalise 12 fois l’an
- Une formule peut également convertir directement d’un nominal à l’autre. (La formule sera exposée au tableau)

Le cas d'un prêt hypothécaire

Exemple: Vous achetez une maison de 100 000$ avec une mise de fonds de 20 000$. Vous contractez une hypothèque de 80 000$ sur 20 ans à 7%. Quelle seront les paiement mensuels?

En premier lieu, il faut convertir le taux nominal en taux effectif:

2 **2ndF FV**

7 **=** 7.12%

(taux effectif: peut aussi se trouver avec le tableau 3.1: Table de conversion des taux nominaux en taux effectifs).

Le cas d'un prêt hypothécaire

Ensuite, on converti se taux effectif en taux nominal qui capitalise 12 fois par année:

12 **2ndF PV** 7.12 **=** 6.90%

Nous avons maintenant notre taux nominal équivalent.

Avec la formule: $((1+(7\%/2))^{2/12}-1)$ X 12 = 6.90%

Le cas d'un prêt hypothécaire

Calcul des paiements avec la calculatrice:

-80 000 **PV**

6.90 **2ndF i i** ou 0.575 **2ndF i**

20 **2ndF n n** ou 240 **2ndF n**

COMP PMT = 615.45$

Versements mensuels pour un prêt hypothécaire (Table 2)

On peut également solutionner notre exemple avec la table 2. Dans ce cas, aucune conversion de taux nominal n'est nécessaire.

- La table 2 présente les versements mensuels pour un prêt hypothécaire de 1 000$ (capitalisation semestrielle) selon différents taux et durées.

Exemple: Pour notre hypothèque de 20 ans à 7%:

7.69 X 80 = 615.20$

Deuxième exemple : Prêt hypothécaire

Exemple: J'achète une maison de 150 000$ avec une mi fonds initiale de 10 000$. Je contracte une hypothèque ans à 7% pour la balance, soit 140 000$. Quel sont les paiements mensuels?

Table 2 à 7% et 15 ans: 8.93

8.93 X 140 = 250.20$

Valeur finale d'un capital placé à intérêt composé annuellement (Table 3)

- La table 3 présente la valeur finale d'un capital de 1 000$ placé à intérêt composé annuellement selon différents taux et nombre d'années.

  Exemple: Pour un placement garanti de 6 000$ à 4% pour 3 ans, quelle sera la valeur finale?

  1 124.864 X 6 = 6 749.18$

  Exemple: Pour un placement de 1 000$ pendant 20 ans à 7%.

  3 869.68$

Utilisation de la table 3 lorsque la capitalisation est différente qu'annuelle

- Si la capitalisation est plus fréquente qu'annuellement, on converti le taux annuel en taux périodique et l'on augmente le nombre de période en conséquence.

  Exemple: Combien vaudra un placement de 1 000$ à 8% dans 5 ans si la période de capitalisation des intérêts était semestrielle?

  On converti notre taux annuel en taux périodique: de 8% à 4%

  On augmente notre nombre de période: de 5 ans à 10 semestres.

  Tables 3: n=10 et taux=4 : 1 480.24$

Utilisation de la table 3 lorsque la capitalisation est différente qu'annuelle

Exemple: Si nous avons un placement de 10 000$ à 20% dont les intérêts sont capitalisés trimestriellement et dont l'échéance est dans 4 ans, combien vaut le placement à l'échéance?

Taux d'intérêt périodique: 20%/4 = 5%

Nombre de périodes: 4 ans X 4 trimestres/ans = 16 trimestres

Tables 3: n= 16 et taux = 5%: facteur = 2 182.87459

Valeur à échéance= 10 X 2 182.87459 = 21 828.75$

Table 3 pour tenir compte de l’inflation

- La table 3 s’utilise également pour prévoir le coût de la vie dans plusieurs années suite à l’inflation.

  Exemple: Le coût de la vie d’une personne est de 5 000$ par mois actuellement. À 2% d’inflation par année, quel sera le coût de la vie de cette personne dans 4 ans?

  5 X 1 082.43216 = 5 412.16$

  Et si son coût de la vie initial était plutôt de 2 450$ par mois?

  2 450 X (1 082.43216 / 1 000) = 2 651.96$

La formule générale d’une valeur future

- Cette formule permet de calculer la valeur future d’un placement à intérêt composé.

(La formule sera présentée au tableau)

Taux d’intérêt successifs

- Cette formule permet de calculer la valeur finale d’un investissement à plusieurs taux d’intérêts successifs.

(La formule sera présentée au tableau)

Valeur actualisée (Table 4)

- La table 4 permet de savoir quelle somme doit-on investir maintenant pour disposer d'un capital donné (1 000$) dans un certains nombres d'années.

  Exemple: Combien doit-on investir aujourd'hui au taux de 8% capitalisé annuellement pour disposer de 3 000$ dans trois ans?

  793.83224 X 3 = 2 381.50$

  Et si je désire plutôt 500$ dans trois ans?

  500 X (793.83224/1000) = 396.92$

L'annuité

- Annuité: ensemble de versements effectués à intervalles temps égaux afin de payer une dette ou faire un placem
  - Périodicité des versement: mensuel, trimestrielle, annuelle.
  - Terme: Montant du versement
- Annuité simple: Période de paiement coïncide avec la pé capitalisation. Ex.: prêt personnel.
- Annuité générale: La période de paiement diffère de la p de capitalisation. Ex.: hypothèque.
- Annuité Constante: termes égaux sinon annuité variable
- L'annuité peut-être en début ou en fin de période.

Valeur finale d'une somme investie tous les ans (table 5)

- La table 5 présente la valeur finale d'une annuité annuelle de 1 000$ en fin de période selon différentes durées et taux d'intérêt. Annuité simple: la capitalisation est annuelle.

  Exemple: Si j'investi 1 000$ à la fin de chaque année dans un certificat garanti à 7%, combien j'aurais dans 15 ans?

  25 129.02$ (Sharp : 1000 **PMT** 15 **n** 7 **i** **COMP** **FV**)

  Si j'investissait plutôt 300$ annuellement:

  300 x (25 129.02/1 000) = 7 538.71$

Valeur finale d’une annuité en début de période

Exemple: Et si j’effectue le même exemple que précédemment, sauf en investissant le 1 000$ à tous les débuts d’années, quelle serait la valeur finale?

25 129.02 X 1.07 = 26 888 .05$

(Sharp: **BGN** 1000 **PMT** 15 **n** 7 **i** **COMP** **FV)**

Attention: pour remettre en mode fin de période, réapuyer **BGN** après.

Comme tous les investissement sont fait un an plus tôt, ils profitent tous un an de plus au taux de 7%, donc la valeur de mon annuité se trouve augmentée de 7%.

Pour une annuité à périodicité mensuelle

Exemple: Supposons qu'au lieu d'investir 1 000 $ tous les ans comme précédemment j'investisse 83.33$ à la fin de chaque mois (83.33 X 12 mois = 999.96$) toujours à 7% pendant 15 ans. Quelle est la valeur finale de la série de placement?

Sharp:

12 **2ndF PV** 7 = 6.78

6.78 / 12 = 0.565

83.33 **PMT**

0.565 **i**

12 X 15 **n**

COMP FV = 25 913.20$

Montant à investir pour obtenir une somme désirée (table 6)

- La table 6 présente le montant à investir à la fin de chaque année pour obtenir 1 000$ en bout de ligne pour un taux d'intérêt donnée.

  Exemple: Combien doit-je investir à un taux de 10% à la fin de chaque année pendant 20 ans pour avoir 200 000$?

  200 X 17.45962 = 3 491.92$

  Et si je choisissais d'investir en début d'année?

  3 491.92 / (1 + 10%) = 3 174.47$

Capital requis pour la production d'un revenu (table 7)

- La table 7 présente quel capital investi à un taux donné est nécessaire afin de produire des revenus annuels égaux pendant un certain nombre d'années.
  - Au bout du compte le capital est complètement épuisé
  - Les revenus ne sont pas indexés

Exemple: Quel capital dois-je investir maintenant afin de supporter un coût de la vie de 30 000$ annuellement pendant 20 ans à un taux d'intérêt de 10% annuellement et avec un taux d'impôt de 20%?

Taux d'intérêt après impôt: (10% X 80%) = 8%
Table 7 : 8% et n=20: 9 818.14741

9 818.14741 X 30 = 294 544.42$

Revenu annuel pour amortir un capital

- La table 8 présente le revenu annuel pour amortir un capital de 1 000$ selon un nombre d'années et un taux d'intérêt donné.

  Exemple: Si vous avez un capital total de 225 500$ qui est investi à 10% et que votre taux d'imposition est de 30%, quel revenu pourriez-vous en retirer pour les dix prochaines années ?

  Taux d'intérêt après impôt: 10% X (1-30%) = 7%

  Table 8 à 7% et n=10: 142.3775

  225.5 X 142.3775 = 32 106.13$

L’annuité à progression géométrique

- L’annuité à progression géométrique prend en compte un taux d’inflation donné.
- La table 9 présente la valeur finale d’une somme investie tous les ans (en fin de période) et majorée d’un taux d’inflation de 4%.

Exemple: Quel est la valeur d’un investissement de 2 000 $ par année pendant 10 ans majoré d’un taux d’inflation de 4% à 8% d’intérêts?

Table 9 à 8% et 10 ans: 16 967

2 X 16 967 = 33 934$

Valeur du premier versement d'une annuité à progression géométrique (table 10)

- La table 10 présente le premier versement requis, les subséquents étant majorés d'un taux d'inflation de 4%, afin d'atteindre un capital de 10 000$. Les versements sont annuels et en fin de période.

  Exemple: Combien sera le premier versement si je désire accumuler un capital de 20 000$ dans 3 ans en investissant en fin d'année à un taux de 10% et avec une inflation hypothétique de 4%?

  Table 10 à 10% et à 3 ans: 2 911

  2 X 2 911$ = 5 822$

Valeur du premier versement d'une annuité à progression géométrique (table 10)

- Quel seront exactement les trois versements?

  Premier versement: 5 822 $
  Deuxième versement: 5 822 X 1.04 = 6 054.88 $
  Troisième versement: 6 054.88 $ X 1.04 = 6 297.08 $

  Capital accumulé:

  Fin de la première année: 5 822 $
  Fin de la deuxième année: (5 822 x 1.10)+ 6 054.88
  = 12 459.08 $
  Fin de la troisième année: (12 459.08 X 1.10) + 6 297.08
  = 20 002.07$

Le capital nécessaire à la retraite

- La table 11 présente le capital nécessaire pour toucher une annuité à progression géométrique de 10 000$ à la fin de chaque année compte tenu d'une inflation de 4%. Les revenus seront indexés avec le taux d'inflation (4%).

  Exemple: Combien de capital est requis afin de produire un revenu de retraite de 40 000$ annuellement pendant 25 ans, indexé à une inflation de 4%, si l'on compte obtenir un rendement de 9% avant impôt et que notre taux d'imposition est de 33.33%?

  Taux de rendement après impôts: 6%

  Table 11 à 6% et 25 ans: 189 431$

  4 X 189 431 $ = 757 724 $