La

relativité

restreinte

Introduction

La relativité restreinte est une théorie mise en place par Einstein en 1905. Cette théorie sert pour décrire des phénomènes physiques faisant intervenir des vitesses de l'ordre de celle de la lumière, considérée comme constante dans le vide. L'invariance de la vitesse de la lumière (donnée expérimentale) conduit donc à établir les formules de transformation de Lorentz entre les coordonnées d'espace et de temps de référentiels en mouvement de translation uniforme les uns par rapport aux autres. Nous sommes ainsi amenés a considérer non plus le temps et l'espace indépendamment mais une nouvelle notion : la notion d'espace-temps. Le temps, dépendant du référentiel galiléen dans lequel on le mesure, ne peut donc plus être considéré comme absolu. D'ou un aspect quadridimensionnel de notre univers (3 variables d'espaces, 1 variable de temps). Cette nouvelle description entraîne des changements radicaux au niveau des lois essentielles de la physique et de notre vision de l'univers…

I. Les postulats d'Einstein et leurs conséquences

a) Deux postulats

La théorie de la relativité restreinte repose sur deux principes de bases :

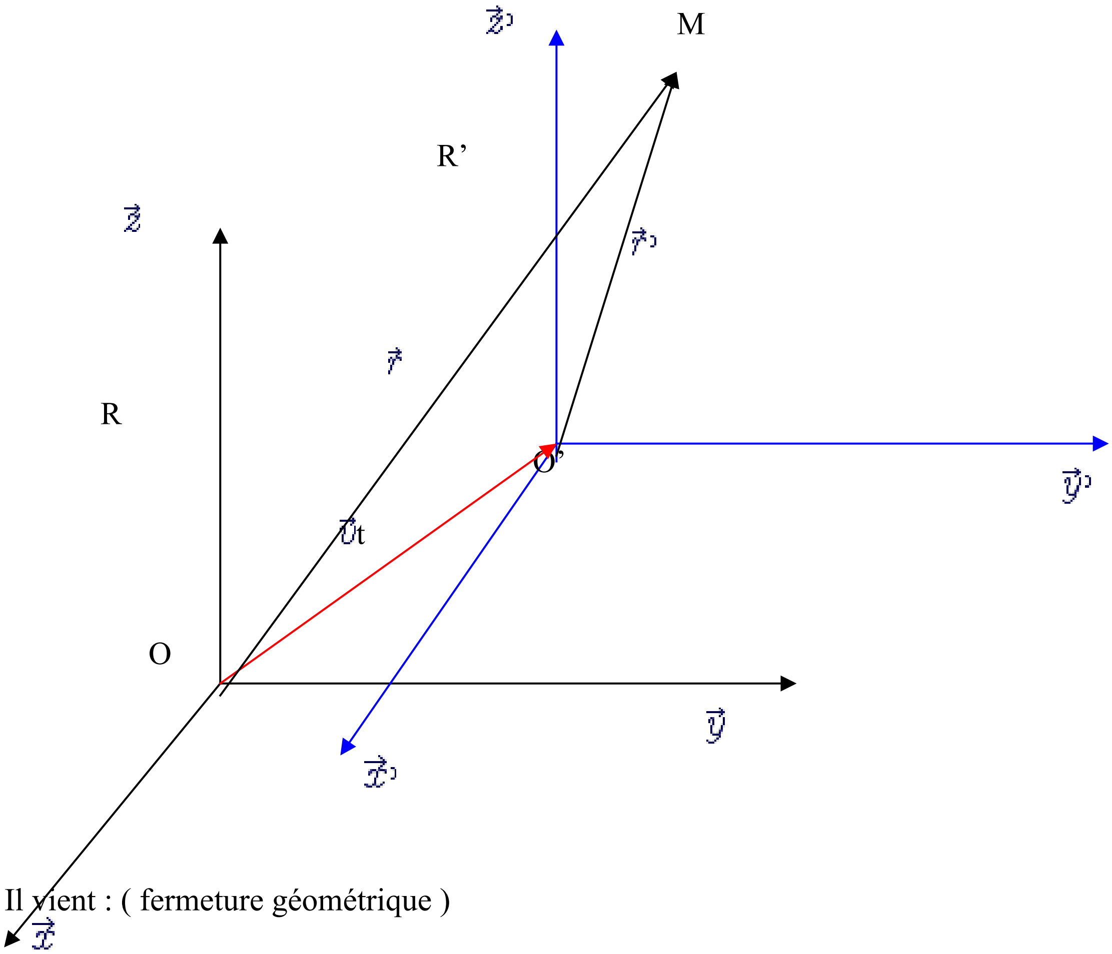
- Les lois de la physique doivent être les mêmes dans tous les référentiels galiléens ou inertiels, c'est à dire dans tous les référentiels qui sont en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre
- La vitesse de la lumière doit être une constante fixe. Chaque observateur, quel que soit son mouvement doit mesurer la même valeur

Cependant ces deux postulats mettent en défaut la mécanique classique !!

Exemple : considérons la deuxième loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique :

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

Effectuons un changement de référentiel (dans l'hypothèses ou les référentiels sont conformes a ceux demandés par la théorie) :



Il vient : (fermeture géométrique)

$$\vec{r}-\vec{r}'-\vec{v}t=\vec{0}\Longrightarrow\boxed{\vec{r}'=\vec{r}-\vec{v}t}$$

<u>C’est la transformation de Galilée.</u>

En dérivant :

$$\frac{d\vec{r}'}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}-\vec{v}$$

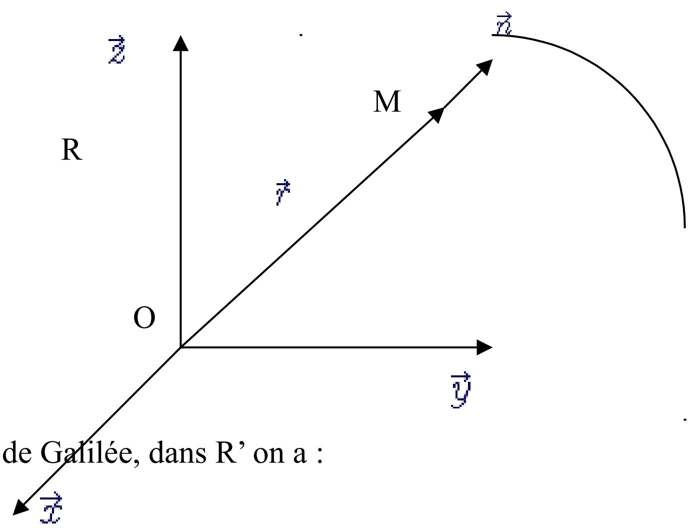
Puis en dérivant une seconde fois, on obtient :

$$\vec{a}'=\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{a}$$

L’accélération $\vec{a}$ est donc invariante par changement de référentiel galiléen. La masse est aussi implicitement supposée invariante.
Finalement, la seconde loi de Newton est invariante dans la transformation de galilée.
(ici invariante ne veut pas dire que chacun des termes de l’équation est inchangé mais seulement que la relation entre eux reste valable)
Cependant, cette transformation de Galilée implique que la vitesse de la lumière soit différente dans les deux référentiels. Dans R, supposons qu’une source de lumière émet des ondes sphériques se propageant à la vitesse c.
Un point M d’une surface d’onde ($\overrightarrow{OM}=\vec{r}$) a donc la vitesse :

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=c\vec{n}$$

($\vec{n}$ est le vecteur unitaire porté par $\vec{r}$)



Dans la transformation de Galilée, dans R’ on a :

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = c\vec{n} - \vec{v} \neq c\vec{n}$$

Pourtant, toutes les expériences montrent que c est indépendante du mouvement de l'observateur, de la source et de la direction de propagation.
Par conséquent, la transformation de Galilée ne convient pas. Il faut la remplacer par une autre transformation de telle sorte que les lois de la physique soient les mêmes dans tous les référentiels galiléens.

Exemple 2 : les lois électromagnétiques sont également mises en défaut.
On considère la transformation de Galilée (mouvement rectiligne uniforme selon $\vec{x}$ de R' animé d'une vitesse relative $\vec{v}$ par rapport a R) :

$$\begin{cases} x' \equiv x - vt \\ y' \equiv y \\ t' \equiv t \\ z' \equiv z \end{cases}$$

L'équation de propagation (unidimensionnelle) ou équation de D'Alembert s'écrit pour X représentant le champ électrique ou le champ magnétique :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0$$

Explicitons les dérivées à l'aide de la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial t'}\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x'}\frac{\partial (x - vt)}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial t'}\frac{\partial t}{\partial x}$$

Mais : $\frac{\partial (x - vt)}{\partial x} = 1$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x'}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x'^2}}$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial x'}\frac{\partial (x - vt)}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial t'}\frac{\partial t}{\partial t}$$

Mais : $\frac{\partial(x-vt)}{\partial t} = -v\frac{\partial X}{\partial x'}$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\partial X}{\partial t} = -v\frac{\partial X}{\partial x'} + \frac{\partial X}{\partial t'}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 X}{\partial x'^2} - 2v\frac{\partial^2 X}{\partial x'\partial t'} + \frac{\partial^2 X}{\partial t'^2}}$$

En réinjectant ces deux expressions dans l'équation de D'Alembert, on obtient :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x'^2} - \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial x'^2} + 2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial x'\partial t'} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t'^2} = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{(1-\frac{v^2}{c^2})\frac{\partial^2 X}{\partial x'^2} + 2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial x'\partial t'} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t'^2} = 0}$$

L'équation de d'Alembert n'est donc pas invariante dans la transformation de Galilée. Donc comme dans l'exemple précédent nous pouvons constater que les transformations galiléennes ne conviennent pas puisqu'il faut que les lois de la physique restent les mêmes dans tous référentiels galiléens. Il faut définir d'autres transformations.

Par conséquent, cette théorie apporte des bouleversements profonds dans la notion d'espace et de temps, amenant a considérer une nouvelle notion, celle d'espace-temps. Les nouvelles transformations (qui se substitueront aux transformations galiléennes) rendant possible le non changement des lois de la physique sont appelées Transformations de Lorentz (voir II)

b) Notion d'espace-temps

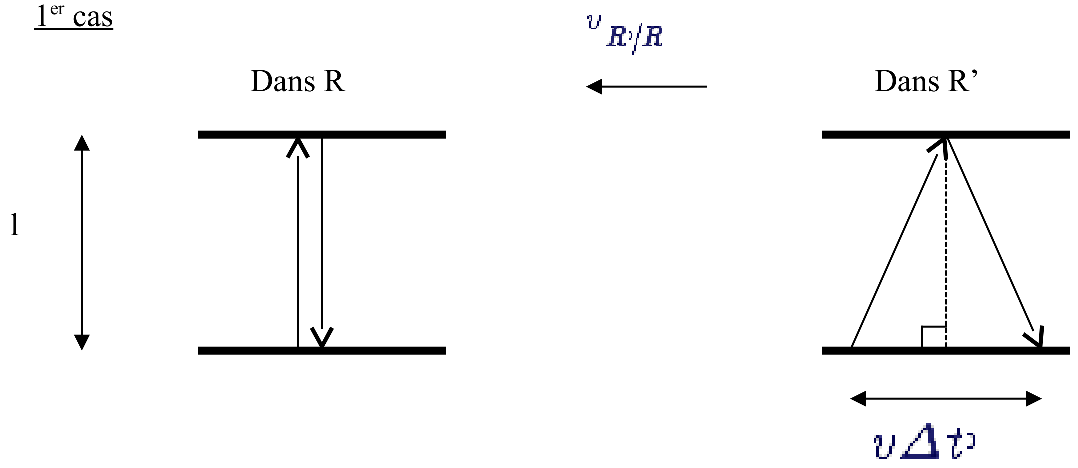
Pour que c soit constante, le temps ne doit pas s'écouler de la même façon pour un observateur immobile dans R que pour un autre dans R' en mouvement rectiligne uniforme selon $\vec{x}$ et animé d'une vitesse relative $\vec{v}$ par rapport a R.
Le temps n'est donc pas absolu. Les longueurs des objets dépendent des observateurs qui les regardent. Nous sommes donc amenés a ne plus considérer l'espace et le temps indépendamment, il faut considérer l'espace-temps. Cette nouvelle notion entraîne une vision quadridimensionnelle de l'univers décrit désormais par 3 variables d'espace et une variable de temps.

<u>II. Transformations de Lorentz / Transformations de l'espace temps.</u>

a) <u>Transformation des durées et des distances sur un exemple</u>

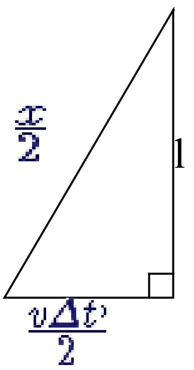
Etudions l'expérience de Michelson qui propose un calcul simple du temps d'aller retour d'un rayon lumineux animé d'une vitesse c se réfléchissant sur un miroir.
Considérons un mouvement relatif de translation uniforme du référentiel R' par rapport au référentiel R.
La vitesse de R' par rapport à R est alors notée : $v_{R'/R}$

<u>1er cas</u>



Dans R : $\Delta t = \frac{distance parcourue}{vitesse} = \frac{2l}{c}$

Dans R' : $\Delta t' = \frac{distance parcourue}{vitesse} = \frac{x}{c}$



Pythagore : $\frac{x}{2} = \sqrt{l^2 + (\frac{v\Delta t'}{2})^2}$

Donc :

$$x = 2\sqrt{l^2 + \left(\frac{v\Delta t'}{2}\right)^2}$$

Donc il vient :

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \frac{2\sqrt{l^2 + \left(\frac{v\Delta t'}{2}\right)^2}}{c} \\ &= \frac{2l}{c}\sqrt{1 + \left(\frac{v\Delta t'}{2l}\right)^2} \\ &= \Delta t\sqrt{1 + \left(\frac{v\Delta t'}{c\Delta t}\right)^2}\end{aligned}$$

En élevant au carré :

$$\Delta t'^2 = \Delta t^2\left(1 + \frac{v^2 \Delta t'^2}{c^2 \Delta t^2}\right)$$

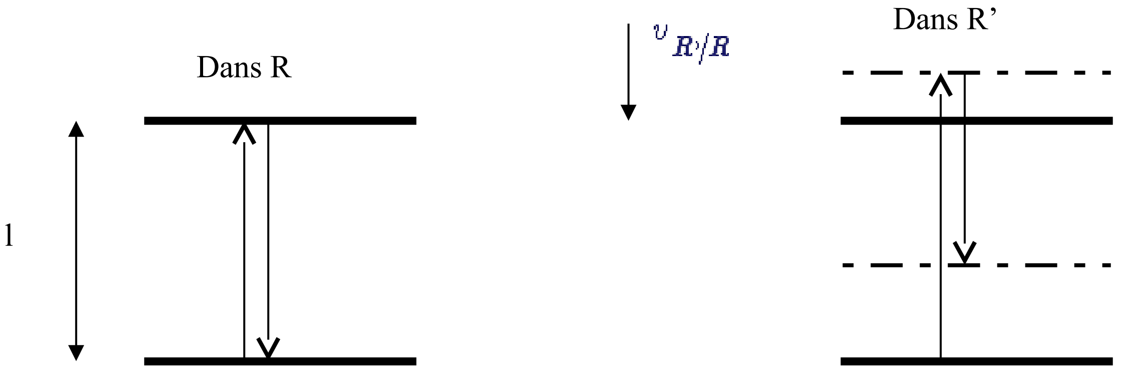
$$\Longrightarrow \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\Delta t'^2 = \Delta t^2$$

Finalement :

$$\boxed{\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

En appelant « temps propre » le temps écoulé entre deux événements pour un observateur qui les voit au même lieu, on constate que le temps mesuré par un autre observateur est plus long. Ceci constitue le phénomène de dilatation des durées.

2e cas



Dans R : $\Delta t = \frac{distanceparcourue}{vitesse} = \frac{2l}{c}$

Soit l' la distance du point de départ au miroir

Dans R' :

- temps pour l'aller : $\Delta t'_1 = \frac{l'}{c-v}$
- temps pour le retour : $\Delta t'_2 = \frac{l'}{c+v}$

Donc : $$\Delta t' = \Delta t'_1 + \Delta t'_2 = \frac{l'(c+v)+l'(c-v)}{(c-v)(c+v)} = \frac{2l'c}{c^2-v^2}$$

Mais d'après le 1[er] cas on a la formule de dilatation des durées : $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Donc en remplaçant : $\frac{l'c}{c^2-v^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{l}{c}$

$\Longrightarrow \quad \frac{l'}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{l}{c}$

$\Longrightarrow \quad l' = \frac{l}{c}\sqrt{c^2-v^2}$

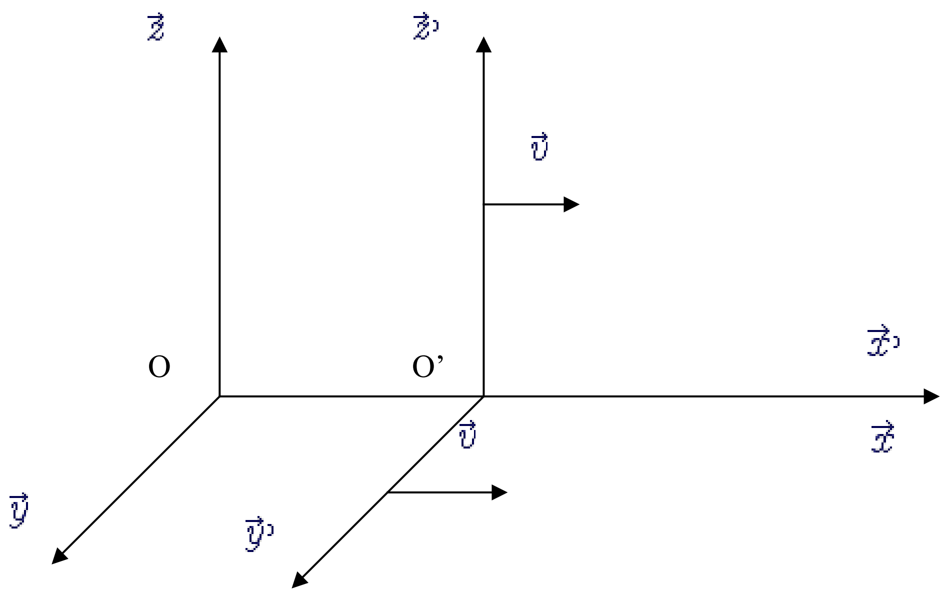
Finalement :

$$\boxed{l' = l\sqrt{1-\frac{c^2}{v^2}}}$$

La « longueur propre » d'un objet est la longueur qu'a l'objet immobile dans son référentiel, on constate que la longueur dans un autre sera plus courte : c'est la contraction des longueurs

b) Transformations de Lorentz

Soit M de coordonnées (x, y, z) à t dans le repère R et de coordonnées (x', y', z') à t' dans le repère R'. Le repère R' est en translation rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}$ dirigée selon $\vec{x}$ par rapport au repère R.



Pour satisfaire le principe de relativité restreinte, il faut trouver f, g, h, k telles que :

$$\begin{cases} x' = f(x,y,z,t) \\ y' = g(x,y,z,t) \\ z' = h(x,y,z,t) \\ t' = k(x,y,z,t) \end{cases}$$

- Un mouvement rectiligne uniforme dans R doit être uniforme dans R' donc les fonctions f, g, h et k sont linéaires.
- Les coefficients des variables de la transformation précédente ne peuvent être fonctions que de la vitesse d'entraînement v de R' par rapport a R.
- Les relations donnant x, y, z et t en fonction de x', y', z' et t' doivent être les mêmes que celles donnant x', y', z' et t' en fonction de x, y, z et t en changeant v en –v.
- Si un évènement se produit le long de $\vec{x}$, il est tel que $y=y'=z=z'=0$. La coordonnée x' ne dépend donc que de x et t, et les coordonnées y' et z', ne dépendent ni de x, ni de t.

On a donc :

$$\begin{cases} x' = ax+bt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = dx+et \end{cases}$$

- Le point O (x = 0) a une vitesse -v dans R', pour ce point nous avons donc $x'=-vt'$, mais si x=0 on a aussi $x'=bt$ et $t'=et$ donc $b=-ev$.
- Le point O'(x'=0) a une vitesse v dans R, pour ce point nous avons donc x=-vt, mais si x'=0 on a aussi $ax=-bt$ et $t'=dx+et$ donc $ax=-bt=evt$, soit $a=e$.

Donc, il vient :

$$\begin{cases} x' = ax - avt \\ t' = dx + at \end{cases}$$

- En t=0, une source située en O, émet un signal lumineux se propageant à la vitesse c, dans toutes les directions de l'espace. A t quelconque un observateur placé en M dans R, reçoit le signal, on a donc $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$. Dans R', puisque c=constante, on doit donc avoir $x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$. Donc :

$$x^2-c^2t^2 = x'^2-c^2t'^2$$

En réinjectant x' et t' dans l'équation précédente traduisant le fait que c=constante, on obtient :

$x^2-ct^2=(ax-avt)^2-c^2(dx+at)^2$

soit : $(1-a^2+c^2d^2)x^2+(c^2a^2-a^2v^2-c^2)t^2+2axt(av+c^2d)=0$

Cette équation devant être vérifiée pour tout x et pour tout t, il vient :

$$\begin{cases} a^2 = 1+c^2d^2 \\ c^2 = c^2a^2-a^2v^2 \\ c^2d = -av \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} a^2 = 1+c^2d^2 \\ c^2 = (c^2-v^2)a^2 \\ a = \frac{-c^2d}{v} \end{cases}$$

v < c fixés.

La deuxième et la troisième ligne permettent d'écrire :

$$c^2 = (v^2-c^2)\frac{c^4d^2}{v^2}$$

$$\Longrightarrow d^2 = \frac{v^2c^2}{c^4(v^2-c^2)}$$

$$\Longrightarrow d = \mp\frac{v}{c^2}\frac{1}{\frac{1}{c}\sqrt{c^2-v^2}}$$

Donc :

$$d = \mp \frac{v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

On en déduit :

$$\boxed{a = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

On pose :

$$\beta = \frac{v}{c} \leq 1$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \geq 1$$

Alors :

$$d = \mp \frac{\beta\,\gamma}{c}$$

$$a = \pm\,\gamma$$

Ecrivons sous forme matricielle cette transformation :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \pm \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On remarque que : $\gamma^2-\gamma^2\beta^2=1$ et $\gamma=\gamma(v)$ et. $\beta=\beta(v)$
Donc : il existe $\psi(v)$ tel que $\gamma=ch(\psi)$ et $\beta\gamma=sh(\psi)$ soit $\beta=th(\psi)$

A= $\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix}$

A est donc la <u>matrice d'une rotation hyperbolique</u>. Ψ est parfois appelé <u>« rapidité »</u>
On a :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On inverse la matrice : $\begin{bmatrix} -\gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -\gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On peut ainsi écrire : $\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

On obtient donc les transformations de Lorentz des coordonnées et du temps sous forme matricielle (matrice de Lorentz ou matrice de Lorentz-Poincarré) :

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}$$

Et réciproquement :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ceci donne :

$$\boxed{\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \\ z' = z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') \\ z = z' \end{cases}}$$

On remarque que pour les faible vitesses (c'est à dire v<<c), on retrouve les transformations de Galilée.
Le vecteur (ct, x, y, z) est appelé « quadri vecteur de déplacement » ou « quadri vecteur espace-temps ».

c) Le problème semble résolu

Voyons maintenant si les précédentes transformations (transformations de Lorentz) laissent invariante l'équation de D'Alembert.

L'équation de D'Alembert (unidimensionnelle) s'écrit pour X représentant le champ électrique ou le champ magnétique :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{X}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{X}}{\partial t^2} = 0$$

Calculons les dérivées successives grâce à la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}\gamma\frac{\partial(x - vt)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'}\gamma\frac{\partial(t - \frac{v}{c^2}x)}{\partial x}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \gamma^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{2\beta}{c}\frac{\partial}{\partial x'\partial t'} + \frac{\beta^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \_\_\_\_ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'}\gamma\frac{\partial(x-vt)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'}\gamma\frac{\partial(t-\frac{v}{c^2}x)}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \_\_\_\_ \frac{\partial}{\partial t} = \gamma(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'})$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \gamma^2(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2v\frac{\partial}{\partial x'\partial t'} + v^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2})}$$

En réinjectant dans l'équation de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \gamma^2(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{2\beta}{c}\frac{\partial}{\partial x'\partial t'} + \frac{\beta^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2})X \ - \frac{\gamma^2}{c^2}(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2v\frac{\partial}{\partial x'\partial t'} + v^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2})X$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = (\gamma^2 - \beta^2\gamma^2)\frac{\partial^2 X}{\partial x'^2} + (\frac{\gamma^2\beta^2}{c^2} - \frac{\gamma^2}{c^2})\frac{\partial^2 X}{\partial t'^2}$$

Mais : $\gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = 1$

Donc :

$$\boxed{\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t'^2}}$$

Les transformations de Lorentz laissent invariantes l'équation de D'Alembert.

III. A partir des transformations de Lorentz

Cette partie a pour but de montrer quelques conséquences remarquables des transformations de Lorentz sur l'espace-temps.

a) Dilatation des temps et contraction des longueurs

* Considérons t_0 « temps propre », entre deux événements (temps mesuré dans un référentiel où ces deux événements ont lieu au même endroit). Choisissions O(0, 0, 0, 0) comme point de coordonnée du premier événement. Le second événement a alors pour coordonnée M(0, 0, 0, t_0). Dans un autre référentiel en translation uniforme de vitesse $\vec{v}$ par rapport au référentiel propre ces coordonnées deviennent ($-v\gamma t_0$, 0, 0, γt_0).
Donc : $t' = \gamma t_0$.

On retrouve : $\boxed{t' = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$
D'où la dilatation des temps.

* Considérons maintenant un objet d'extrémités M et M' immobile orienté selon x' dans R' et de « longueur propre » l'. C'est a dire $l' = x'_{M'} - x'_M$

Dans R, l'objet est en mouvement et a une longueur $l = x_{M'} - x_M$

Il vient donc :

$$l' = x'_{M'} - x'_M = \frac{x_{M'} - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_M - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$l' = \frac{x_{M'} - x_M}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

d'où finalement :

$$\boxed{l' = l\sqrt{1-\frac{c^2}{v^2}}}$$

Ainsi, la longueur de l'objet dans le référentiel en mouvement est inférieure a la longueur propre. C'est la contraction des longueurs.

b) Addition relativiste des vitesses

Nous allons voir comment se fait l'addition relativiste des vitesses pour des objets allant a des vitesses proches de celle de la lumière dans un référentiel qui lui même est animé d'une vitesse proche de celle de la lumière. Nous allons donc déterminer une relation entre la vitesse réelle de l'objet notée V en fonction de la vitesse de l'objet v_2 dans le référentiel R' animé d'une vitesse v1 par rapport au référentiel d'observation R et de v_1.

Dans R' :

$$x' = v_2 \cdot t'$$

En utilisant les transformations de Lorentz, on remplace t' :

$$x' = v_2 \cdot \frac{t - \frac{v_1 \cdot x}{c^2}}{\sqrt{1-(v_1/c)^2}}$$

Puis on remplace de même x' :

$$\frac{x - v_1 \cdot t}{\sqrt{1-(v_1/c)^2}} = v_2 \cdot \frac{t - \frac{v_1 \cdot x}{c^2}}{\sqrt{1-(v_1/c)^2}}$$

d'où (γ non nul) :

$$x - v_1 t = v_2 t - \frac{v_2 v_1 x}{c^2}$$

soit

$$x\left(1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}\right) = t\left(v_2 + v_1\right)$$

Or x=Vt

Finalement il vient :

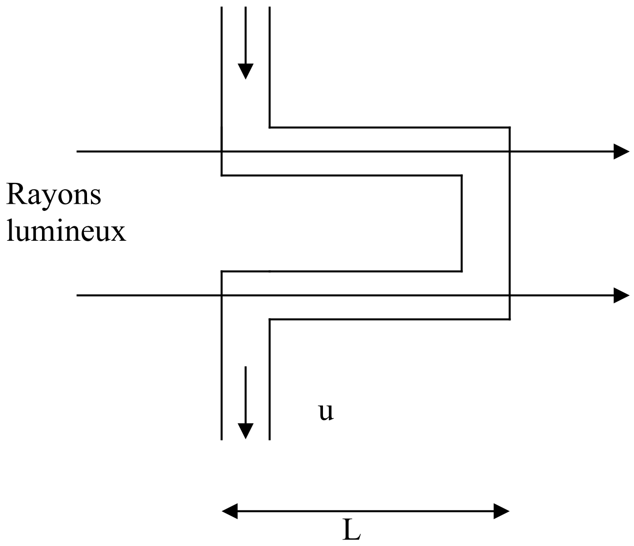
$$\boxed{V = \frac{x}{t} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}}}$$

Addition relativiste des vitesses.

IV. Calculs relativistes

Le but de cette partie est de montrer que malgré la formule démontrée ci dessus, les calculs de la cinématique classique (composition des vitesses) et ceux de la cinématique relativiste restent sensiblement les mêmes pour des vitesses usuelles. Cependant, certains faits ne peuvent être expliqués que par les théories relativistes quand on s'approche de la vitesse de la lumière.

a) Expérience de Fizeau



Le tube contient un flux ayant une vitesse u (avec u<<c)
Le liquide contenu dans le tube aux parois transparentes a un indice n.
On se propose de calculer la différence de temps de parcours de la lumière entre les trajets correspondants aux tubes supérieurs et inférieurs dans le cas de le cinématique classique d'abord puis dans le cas de la cinématique relativiste et de comparer les résultats obtenus.

Cinématique classique :

Vitesse dans le tube supérieur : $v_1 = \frac{c}{n} + u$

Vitesse dans le tube inférieur : $v_2 = \frac{c}{n} - u$

Différence de temps de parcours : $t = \frac{L}{\frac{c}{n} - u} - \frac{L}{\frac{c}{n} + u}$

En effectuant un développement limité avec u<<(c/n), il vient :

$$t = \frac{2Lun^2}{c^2}$$

Cinématique relativiste :

Vitesse dans le tube supérieur : $v_1' = \frac{\frac{c}{n}+u}{1+\frac{u}{nc}}$

Vitesse dans le tube inférieur : $v_2' = \frac{\frac{c}{n}-u}{1-\frac{u}{nc}}$

Différence de temps de parcours : $t' = L(\frac{1}{v_2'}-\frac{1}{v_1'})$

En procédant de la même manière, il vient :

$$t' = \frac{2Lu(n^2-1)}{c^2}$$

On obtient : $t-t' = \frac{2Lu}{c^2}$

On remarque donc que plus la vitesse u augmente et s'approche de la vitesse de la lumière plus l'écart entre la cinématique relativiste et la cinématique classique augmente.
Cette différence est d'ailleurs très importante, donc cette expérience confirme l'écart prévu par la théorie.

b) <u>Composition des vitesses dans la vie quotidienne</u>

Il est légitime en effet de composer les vitesses dans la vie quotidienne puisque les vitesses entrant en jeu sont très faibles par rapport a la vitesse de la lumière c, ainsi le résultats est très très peu modifié en commettant cette erreur.

c) <u>Autres exemples montrant la nécessité de la théorie d'Einstein pour des vitesses proches de celles de la lumière.</u>

Les muons

Le GPS

Accélérateur de particules

Conclusion

Donc, cette théorie de la relativité restreinte apporte de véritables changements dans la notion d'espace et de temps et induit une nouvelle notion qui est celle d'espace temps. Ce nouvel espace particulier doit être pris en compte pour des vitesses dites relativistes c'est a dire des vitesses qui s'approchent de celles de la lumière. En effet, pour des vitesses de ce calibre les anciennes lois ne sont plus valables et il faut donc bien adopter la relativité restreinte.
Cependant très peu de phénomènes liés a des vitesses relativistes se rencontrent dans la vie de tous les jours, c'est pourquoi cette théorie ne sert que dans quelques cas très spécifiques mais est tout de même grandement utile pour décrire certains phénomènes comme nous avons pu le voir avec le GPS ou les accélérateurs de particules.
Il ne s'agit donc pas de négliger cette théorie qui est une remarquable avancée dans le monde de la physique et peut qu'un jour, qui sait, nous serons en mesure de voyager a de telles vitesses…