

Formation

ouverte et

A

distance

LIVRET 52 :

LES MATHEMATIQUES FINANCIERES I

FOAD	LES MATHEMATIQUES FINANCIERES I	LIVRET 52	Page 1
------	---------------------------------	-----------	--------

SOMMAIRE

LECON 1 : LES INTERETS SIMPLES

LECON 2 : LES INTERETS COMPOSES

DEVOIR

LES INTERETS SIMPLES

I - GENERALITES

A - Définition

1°- Exemple

Nous plaçons 10 000 DH pendant 3 ans au taux annuel de 8% .

- l'intérêt produit chaque année est égale à :
 $10\ 000 \times 8/100 = 800$ DH
- Au bout de 3 ans, le placement augmentera de :
 $800 \text{ DH} \times 3 = 2\ 400$ DH
- A la fin des 3 années, le placement s'élèvera à :
 $10\ 000 + 2\ 400 = 12\ 400$ DH

2°- Remarque

En intérêt simple, les intérêts ne s'ajoutent pas en fin de période de **capitalisation** au capital pour produire intérêts.

3°- Définition

L'intérêt représente le loyer ou la rémunération de l'argent prêté . Cet argent s'appelle "**capital ou placement**"

Les intérêts simples s'appliquent généralement aux prêts ou placements à court terme (moins d'un an).

B - Formule de l'intérêt simple

- C** : Capital placé
- t** : Taux d'intérêt pour 100 DH de capital
- n** : Durée de placement
- Va** : Valeur acquise
- I** : L'intérêt

$$I = C \times t / 100 \times n$$

$$Va = C + C \times t / 100 \times n$$

$$Va = C + I$$

" Si nous plaçons une somme d'argent aujourd'hui, combien recevrons-nous demain ?"
Cela s'appelle capitaliser .

Vérification

$$I = 10\,000 + 8/100 \times 3 = 2\,400 \text{ dh}$$

$$V_a = 10\,000 + 10\,000 + 8/100 \times 3 \quad \text{ou} \quad 10\,000 + 2\,400$$

$$V_a = 12\,400$$

C - Etude de chacun des éléments de la formule de l'intérêt simple

1 - Capital

Il s'agit du montant de la somme placée à une date déterminée

Exemple :

Un capital placé au taux annuel de 3% pendant 3 ans à rapporté 18 dh d'intérêt .
Déterminer le capital initialement placé .

Solution:

$$I = C \times t/100 \times n$$

$$I \times 100 = C \times t \times n$$

$$C = \frac{I \times 100}{t \times n}$$

$$C = \frac{18 \times 100}{3 \times 3} = 200 \text{ dh}$$

2 - Durée

La durée du prêt (ou placement) peut être exprimée en années, en mois ou en jours .

Exemple 1: durée exprimée en années.

Soit un capital de 5 000 dh placé à intérêts simples à 11,5% pendant 2 ans

$$I = C \times t/100 \times n$$

$$I = 5\,000 \times 11,5/100 \times 2 = 1\,150 \text{ dh}$$

Ex 2 : Durée exprimée en mois :

Soit en capital de 3 600 dh placé à intérêts simples pendant 9 mois à 6%

$$I = C \times t/100 \times n/12(\text{mois})$$

$$I = \frac{C \times t \times n}{1\,200}$$

$$I = \frac{3\,600 \times 6 \times 9}{1\,200} = 162 \text{ DH}$$

FOAD – LES MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES I

Remarque

Au Maroc, l'année financière est de 360 jours.

Lorsque la durée de placement est comprise entre 2 dates, on compte les mois pour leur durée réelle, même si l'année est ramenée à 360 jours .

Pour le calcul du nombre de jours, on ne compte pas le jour de départ, mais le jour d'arrivée .

Ex :

Soit un capital de 4 800 DH placé au taux annuel de 4,75% du 12 mars au 17 juillet .

Durée de placement est de :

Mars - avril - mai - juin - juillet

(31j-12) - 30j - 31j - 30j - 17j

Nb . du 12.03.N au 31.03.N sa fait 20 j

19j + 30J + 31J + 30J + 17J = 127 jours

$$I = \frac{4800 \times 4,75 \times 127}{36\,000} = 80,43 \text{ DH}$$

Les mois de l'année

Mois 1*31

Mois 2*28

Mois 3*31

Mois 4*30

Mois 5*31

Mois 6*30

Mois 7*31

Mois 8*31

Mois 9*30

Mois 10*31

Mois 11*30

Mois 12*31

3 - Taux d'intérêt

Il s'exprime en % (pourcentage) et indique la somme d'argent rapportée par 100 DH en une période déterminée (en principe une année)

Ex :

Un capital de 5200 DH à intérêt simple a produit 52 DH d'intérêts pendant 36 jours.
Déterminer le taux de placement

$$I = \frac{C \times t \times n}{36000}$$

FOAD	LES MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES I	LIVRET 52	Page 5
------	---------------------------------	-----------	--------

FOAD – LES MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES I

$$t = \frac{I \times 36000}{C \times n}$$

$$T = \frac{52 \times 36000}{52000 \times 36} = 10$$

Vérification

$$I = \frac{52000 \times 10 \times 36}{36000} = 52 \text{ DH}$$

Remarque

Le taux utilisé doit correspondre à la période de placement choisie (année, semestre, trimestre et mois)

Taux proportionnels correspondants			
	Taux semestriel	Taux trimestriel	Taux mensuel
Taux annuel (t_a)	$t_s = t_a/2$	$t_t = t_a/4$	$t_m = t_a/12$

Ex :

A quel taux semestriel a été placé un capital de 5000 dh qui, en 102j, a rapporté 85 dh d'intérêts ?

Solution

Soit t , le taux annuel de placement

$$5000 \times t \times \frac{102}{360} = 85 \text{ dh}$$

$$t = 0,06$$

d'où le taux semestriel de placement

$$t_s = t_a / 2 = \frac{0,06}{2} = 0,03 \text{ soit } 3\%$$

Exercices d'applications

Application n°1 :

Soit un capital de 15.000 dh placé à intérêts simples au taux annuel de 10% pendant 90 jours.

- 1- Calculer les intérêts produits
- 2- Calculer la valeur acquise

Solution

$$I = \frac{15.000 \times 10 \times 90}{36.000} = 375\text{dh}$$

$$V_a = 15.000 + 375 = \boxed{15.375\text{dh}}$$

Application n°2 :

Quel est le capital qui, placé au taux annuel de 8%, rapporte 120dh d'intérêts en 90 jours ?

Solution

$$I = \frac{c \times t \times n}{36.000} = 120 = \frac{c \times 8 \times 90}{36.000}$$

$$\frac{120 \times 36.000}{8 \times 90} = C$$

$$\boxed{C = 6.000\text{dh}}$$

Application n°3 :

FOAD	LES MATHEMATIQUES FINANCIERES I	LIVRET 52	Page 7
------	---------------------------------	-----------	--------

FOAD – LES MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES I

A quel taux annuel est placé un capital de 7.650dh qui acquiert en 120 jours une valeur acquise de 7.841,25dh ?

Solution

$$7.650 + \left(7.650 \times t \times \frac{120}{360} \right) = 7.841,25$$

$$t = 0,075 \text{ soit } \underline{7,50\%}$$

Application n°4 :

Au bout de combien de jours, un capital de 30.000dh, placé au taux annuel de 7,50%, rapporte-t-il 468,75dh d'intérêts ?

Solution

$$468,75 = 30.000 \times \frac{7,50}{100} \times \frac{n}{360}$$

$$468,75 = 300 \times 7,50 \times \frac{n}{360}$$

$$\text{d'où } \underline{n = 75 \text{ jours}}$$

Méthodes des nombres et des diviseurs fixes :

Il s'agit d'une méthode de calcul rapide des intérêts simples, qui trouve son utilité dans le calcul de l'intérêt produit par plusieurs capitaux, placés au même taux .

Principe :
$$I = \frac{c \times t \times n}{36.000}$$

Dans cette formule divisions le numérateur et le dénominateur par t

$$I = \frac{\frac{C \times t \times n}{t}}{\frac{36.000}{t}} = \frac{c \times n}{36.000}$$

$$\text{Posons } \frac{36.000}{t} = \text{diviseur fixe} = D$$

$$C \times n = \text{Nombre} = N$$

FOAD	LES MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES I	LIVRET 52	Page 8
------	---------------------------------	-----------	--------

$$I = \frac{N}{D}$$

Exemple : Calculer l'intérêt global produit par les 3 capitaux suivants placé à intérêts simples au taux unique de 9%

$C_1 = 16.000\text{dh}$ pendant 36j

$C_2 = 20.000\text{dh}$ pendant 60j

$C_3 = 30.000\text{dh}$ pendant 90j

Solution :

$$IG = I_1 + I_2 + I_3$$

$$D = \frac{36.000}{t} = \frac{36.000}{9} = 4.000$$

$$I = \frac{N}{D} \quad N = c \times n$$

$$IG = \frac{16.000 \times 36 + 20.000 \times 60 + 30.000 \times 90}{36.000 \times 9}$$

$$IG = 1.119\text{dh}$$

L'escompte Commercial

1- Définition

L'escompte est l'opération par laquelle un banquier verse par avance au porteur d'un effet de commerce (lettre de change, billet à ordre) non échu (avant son échéance) le montant de celui-ci, sous déduction d'un intérêt.

2- l'escompte commercial

FOAD – LES MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES I

l'escompte commercial est l'intérêt retenu par la banque sur la valeur nominale (somme inscrite sur l'effet) de l'effet pendant le temps qui s'écoule depuis le jour de la remise à l'escompte jusqu'au jour de l'échéance.

soient :

V_n : la valeur nominale de l'effet

T : le taux de l'escompte

N : la durée de l'escompte

E : le montant de l'escompte commercial

V_a : la valeur actuelle de l'effet (la différence entre la V_n et l'escompte) ou encore valeur escomptée

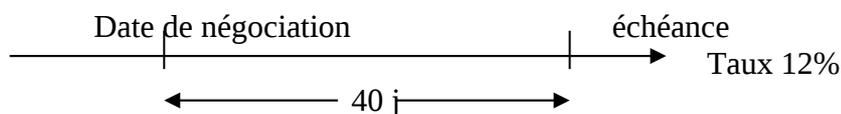
Remarque

La durée de l'escompte est égale au nombre de jours compris entre celui de la remise (exclu) et celui de l'échéance (inclus). La pratique bancaire conduit souvent à y ajouter un certain nombre de jours dits **jours de banque**

$$E = \frac{VN \times T \times N}{36\,000}$$

Exemple

Un commerçant négocie une traite de 8850 dh, payable dans 40 jours. Taux d'escompte 12°/°.



FOAD	LES MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES I	LIVRET 52	Page 10
------	---------------------------------	-----------	---------

$$E = \frac{V_n \times t \times n}{36\,000}$$

$$E = \frac{8850 \times 12 \times 40}{36\,000} = 118 \text{ dh}$$

$$V_a = V_n - E$$

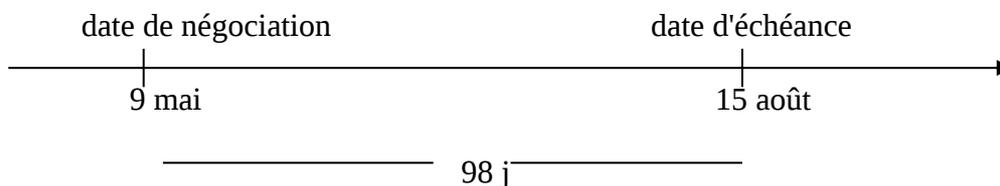
d'où

$$V_a = 8850 - 118 = 8732$$

Application

Un fournisseur négocie le 9 mai une traite d'un montant de 15 000 dh dont l'échéance est le 15 août de la même année. La banque escompte la traite à un taux de 12 %. Quel est le montant de l'escompte ?

Solution



$$E = \frac{V_n \times T \times n}{36\,000} = \frac{15\,000 \times 98 \times 12}{36\,000} = 490 \text{ dh}$$

$$V_a = 15\,000 - 490 = 14\,510 \text{ dh}$$

3- Pratique de l'escompte

Dans la pratique, la remise d'un effet à l'escompte entraîne des frais financiers, en plus de l'escompte proprement dit.

Les frais comprennent plusieurs commissions (Exemple : commission d'acceptation et de courrier).

L'ensemble de l'escompte et des commissions s'appelle « l'agio »

D'une manière générale, l'agio se compose de :

FOAD	LES MATHEMATIQUES FINANCIERES I	LIVRET 52	Page 11
------	---------------------------------	-----------	---------

- **L'escompte**
- Divers commissions
- T.V.A (taxe sur la valeur ajoutée taux 7%)
- La T .V.A est appliquée directement sur l'ensemble de l'agio (H.T)

Exemple :

Soit un effet de commerce d'un montant de 25 000 DH, échéant le 24 juin 1997 et escompté le 15 avril de la même année aux conditions suivantes :

Taux d'escompte 13%

Commissions de manipulation 2dh par effet

T.V.A 7%

Tenir compte d'un jour de banque

Nombre de jours : 70+1 =**71jours**

$$\text{Escompte} = \frac{25\,000 \times 13 \times 71}{36\,000} = \mathbf{640,97}$$

Commissions de manipulation = 2 dh

Total H.T = 642,97 dh

T.V.A = 45 dh

Agio T.T.C = 687,97 dh

Valeur actuelle (V.a) = 25 000 – 687,97 = **24 312,03 dh**

EXERCICE S D'APPLICATION

EX 1

Calculer la valeur nominale d'un effet qui, escompté au taux de 12% pendant 69 jours, a une valeur actuelle commerciale de 15 045,80 dh.

EX 2

Un effet de 31200 a été escompté à 9 % et a donné une valeur actuelle commerciale de 30888 dh au 16 avril. Combien de jours l'effet avait-il à courir ? En déduire son échéance.

EX 3 :

Quel est le taux d'escompte d'un effet de 14960 dh, échéant le 28 juin et ayant donné une valeur actuelle, au 2 avril, de 14526,16 dh ?

EX 5 :

Deux effets, dont l'un est payable dans 120 jours, l'autre dans 90 jours, sont escomptés au taux de 12%.

Le total des montants des deux effets est de 34000 dh et le total des escomptes de 1200 dh .

Quelle est la valeur nominale de chaque effet sachant que le premier est supérieur au second ?

EX 6 :

Un commerçant est en relation avec 2 banques qui lui font les conditions d'escompte suivantes :

B.M.C.I : escompte 12% ; commission 1%

B.C.M : escompte 10% ; commission 2%.

Sachant qu'il désire négocier un effet de 14400 dh, on demande à partir de quelle durée (nombre de jours restant à courir), il aura intérêt à s'adresser à la B.M.C.I.

CORRIGES

EX 1 :



FOAD – LES MATHEMATIQUES FINANCIERES I

← 87 jours →

Escompte : $14960 - 14\,526,16 = 433,84$ dh

$$\text{D'où } 14\,960 \times \frac{t}{100} \times \frac{87}{360} = 433,84 \text{ dh}$$

$$t = 12 \qquad \text{taux d'escompte} = 12\%$$

EX 4 :

Soit X en DH la valeur nominale de l'effet échéant dans 120 jours et $(34\,000 - x)$ celle de l'effet échéant dans 90 jours .

$$X \times \frac{12}{100} \times \frac{120}{360} + (34\,000 - X) \times \frac{12}{100} \times \frac{90}{360} = 1200$$

$$0,04 X + 1020 - 0,03 X = 1200$$

$$X = 18\,000 \text{ DH}$$

Nominal du premier effet : 18 000 DH

Nominal du second effet : $34\,000 - 18\,000 = 16\,000$ DH

EX 5 :

Soit X le nombre de jours restant à courir . L'agio sera :

$$\text{❖ B.M.C.I.} = \frac{14\,400 \times 12 \times X}{36\,000} + \frac{14\,400 \times 1}{100} = 4,8 X + 144$$

$$\text{❖ B.C.M.} = \frac{14\,400 \times 10 \times X}{36\,000} + \frac{14\,400 \times 2}{100} = 4X + 288$$

FOAD	LES MATHEMATIQUES FINANCIERES I	LIVRET 52	Page 15
------	---------------------------------	-----------	---------

FOAD – LES MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES I

36 000

100

Le commerçant s'adressera à la B.M.C.I si l'agio retenu par elle est inférieur à celui retenu par la B.C.M. , d'où l'inéquation suivante :

$$4,8 X + 144 < 4 X + 288$$

$$4,8 x - 4 X < 288 - 144$$

$$0,8 X < 144$$

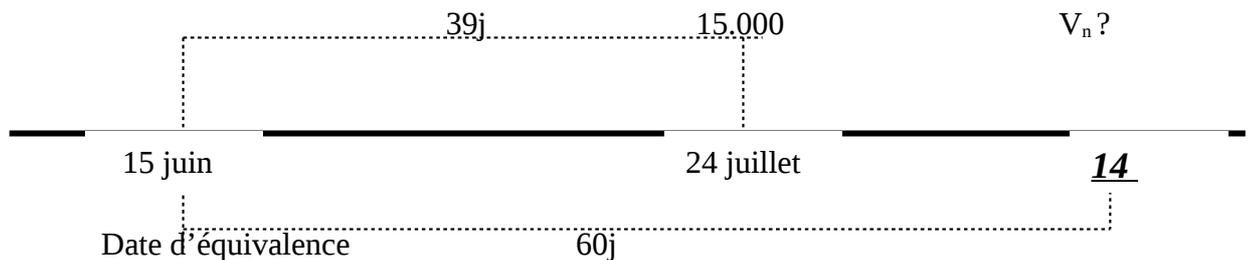
$$X < 180$$

Il aura avantage à s'adresser à la B.M.C.I. , si le nombre de jours restant à courir par l'effet est inférieur à 180 jours (ou 6 mois) .

Équivalence de capitaux à intérêts simples

Définition : Deux effets sont équivalents à une date donnée, lorsque, escomptés au même taux, ils ont la même valeur actuelle à une date déterminée dite date d'équivalence.

Exemple : le commerçant souhaite remplacer le 15 juin en effet de 15.000 dh arrivant à échéance le 24 juillet, par un autre échéant le 14 août.
 Quel doit être le montant de cet effet, le taux d'escompte étant de 12% ?



$$V_{a1} = V_{a2}$$

$$15.000 - \frac{15.000 \times 12 \times 35}{36.000} = V_n - \frac{V_n \times 12 \times 60}{36.000}$$

$$V_n = 15.107,14$$

La valeur nominale du nouvel effet sera de 15.107,14dh

N.B. : la date d'équivalence est antérieure à la date d'échéance des 2 effets, elle doit être postérieure à la date de création des 2 effets.

Application n°1 :

Le commerçant accepte de remplacer un effet de 8.532dh payable dans 80 jours par un effet échéant dans 180 j. Quel doit être le montant de cet effet, le taux d'escompte étant de 10%.

Solution :

$$8.532 - \frac{8.532 \times 10 \times 80}{36.000} = V_n - \frac{V_n \times 10 \times 180}{36.000}$$

$$V_n = 8.781,47$$

La valeur nominale du nouvel effet sera de 8.781,47dh

Application n°2 :

Le débiteur désire remplacer un effet de valeur nominale de 75.000dh qu'il doit payer dans 60 j par un autre effet de valeur nominale 74.600dh.

Quelle serait l'échéance de cette nouvelle dette (taux d'escompte 13%)

Solution :

$$74.600 - \frac{74.600 \times 13 \times n}{36.000} = 75.000 - \frac{75.000 \times 13 \times 60}{36.000}$$

$$n = \frac{36.000 \times 1.225}{74.600} = 46 \text{ j}$$

Application n°3 :

A quelle date un effet de valeur nominale 20.000dh à échéance du 15 Avril est-il équivalent à un effet de 20.435,86dh à échéance du 14 juin et la même année ? taux d'escompte 12,60%

Solution :

$$20.000 - \frac{20.000 \times n \times 12,6}{36.000} = 20.435,86 - \frac{20.435,86 (n+60) \times 12,60}{36.000}$$

$$20.000 - 7n = 2.006,71 - 7,152551 n$$

n = 44 jours avant le 15 avril soit le 2 mars de la même année.

Equivalence de plusieurs effets : l'échéance commune

L'échéance commune est le cas de remplacement de plusieurs capitaux (ou effets) par un seul capital (effet).

L'échéance commune est l'échéance d'un effet unique qui, à la date d'équivalence, a une valeur actuelle égale à la somme des valeurs actuelles des effets remplacés.

FOAD – LES MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES I

Exemple :

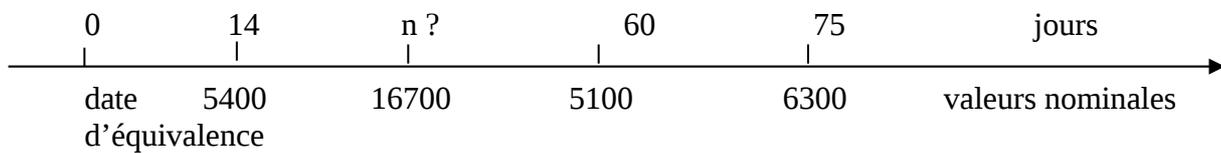
Un débiteur a accepté 3 traites :

- 5.400 h : échéance dans 14 jours
- 5.100dh : échéance dans 60 jours
- 6.300dh : échéance dans 75 jours

Il souhaite que son créancier les remplace par un effet unique de valeur nominale de 16.700dh.

Quelle serait l'échéance de cet effet ? taux d'escompte : 12%

Solution :



$$16.700 - \frac{16.700 \times 12 \times n}{36.000} = \left[5.400 - \frac{5.400 \times 12 \times 14}{36.000} \right] + \left[5.100 - \frac{5.100 \times 12 \times 60}{36.000} \right] + \left[6.300 - \frac{6.300 \times 12 \times 75}{36.000} \right]$$

$$n = \frac{184,70 \times 360}{16.700 \times 0,12} = 34 \text{ jours}$$

N.B. : Il peut arriver que la valeur nominale de l'effet unique soit égale à la somme des valeurs nominales des divers effets remplacés :

L'échéance commune est dans ce cas particulier, appelée **échéance moyenne**

Exercices d'application

EX:1

Une personne place à court terme un capital de 18000 DH du 16 avril au 24 août de la même année, au taux annuel de 8%.

Que va lui rapporter son capital ?

EX:2

- Quel est le capital qui a produit un intérêt de 280 DH sachant qu'il a été placé pendant 54 jours à 12 % ?

- Quelle est la durée de placement d'un capital de 74600 Dh placé à 10% et rapportant un intérêt de 1119 DH ?

EX:3

Une personne dispose d'un capital .Elle en place :

- $\frac{1}{4}$ à 7% pendant 18 mois
- $\frac{5}{6}$ du reste à 9% pendant 16 mois
- Le reste soit 5000 à 8% pendant un certain temps

Ces différents placements ont rapporté un intérêt total de 4150 DH

Calculer le capital total et la durée de placement des 5000 DH

EX:4

En remboursement d'un emprunt, on a réglé 5300 DH. Ce versement comprend :

- l'intérêt au taux de 6% sur la totalité du capital
- $\frac{1}{10}$ de la somme empruntée

Quel est le montant emprunté ?

EX:5

Calculer l'escompte commercial d'un effet de valeur nominale de 8 300 DH à 40 jours au taux de 10.75 %.

EX:6

Un effet de 6210 DH est négocié le 12 juillet au taux de 9.5 % l'an, par un commerçant qui reçoit en contrepartie une somme de 6151 DH.

FOAD – LES MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES I

Quelle est la date d'échéance de cet effet ?

EX:7

On remplace un effet de 13000 DH au 31 janvier par un effet au 02 avril.
Date d'équivalence : 1^{er} janvier (février compte 28 jours). Taux d'escompte 10.50 % .

Quelle est la valeur nominale du nouvel effet ?

EX:8

Un artisan doit payer les 4 effets suivants :

- 12 000 le 15 mai
- 25 000 le 31 mai
- 18 000 le 05 juin
- 32 400 le 10 juillet

En accord avec son fournisseur, il remplace les deux premiers effets par un effet unique ayant une valeur nominale de 37 000 DH.

Quelle est doit être l'échéance de cet effet unique ?

De même ,il remplace les deux derniers effets par un seul effet au 30 juin.

Quelle sera la valeur nominale de cet effet ?
(date d'équivalence :30 juin)

Taux : 11.25 %

EX:9

Un client devait vous régler le 31 mai une facture de 6 574,80 DH. Il endosse à votre profit 5 effets non échus et il s'engage à verser en espèces le solde le 31 mai .

Calculer le montant à percevoir le 31 mai. Taux 9%

Détail des effets :

308 au 10 mai
160 au 15 mai
200 au 17 mai
500 au 5 juin
5205 au 30 juin

CORRIGES DES EXERCICES d'APPLICATION

EX:1

- Calcul de la durée :

Du 16 avril au 30 avril (30-16)	14
Mai	31
Juin	30
Juillet	31
24 août	24
	130 jours

- Calcul de l'intérêt :

$$I = 18\,000 \times 8 \times 130/36\,000 = 520$$

EX:2

- Formule exprimée en fonction de n = nombre de jours

$$C = I \times 36\,000/tn$$

$$C = 280 \times 36\,000 / 54 \times 12 = 10\,080\,000/648 = 15\,555.56$$

- Formule exprimée en fonction de n = nombre d'années

$$n = I \times 100 / Ct$$

$$n = 1119 \times 100 / 74\,600 \times 10 = 111\,900 / 746\,000 = 0.15 \text{ année soit en jours : } 0.15 \times 360 = 54 \text{ jours}$$

EX:3

$$I1 = \frac{1}{4} C \times 7 \times 18 / 1200 = \frac{1}{4} C \times 0.105$$

$$\text{Reste en capital : } 4/4C - 1/4C = 3/4C$$

$$I2 = (5/6) (3/4)C \times 9 \times 16/1200 = 15/24C \times 0.12 = 5/8C \times 0.12$$

$$\text{Reste en capital : } 3/4C - 5/8C = 1/8C$$

$$\text{Or } 1/8C = 5\ 000 \text{ donc } C = 5\ 000 \times 8 = \quad \mathbf{40\ 000\ DH}$$

$$\text{D'ou } I1 = \frac{1}{4} (40\ 000) \times 0.105 = \quad \mathbf{1\ 050\ DH}$$

$$\text{Et } I2 = \frac{5}{8} (40\ 000) \times 0.12 = \quad \mathbf{3\ 000\ DH}$$

Le total de l'intérêt est de 4 150 DH donc

$$I3 = 4150 - 1050 - 3000 = \quad \mathbf{100\ DH}$$

$$n = I \times 100 / Ct$$

$$= 100 \times 100 / 5000 \times 8$$

$$= 0.25 \text{ année donc } 0.25 \times 12 = \quad \mathbf{3\ mois}$$

EX:4

$$\begin{aligned} VA = 5300 &= \frac{1}{10} C + I \\ &= \frac{1}{10} C + C \times 6/100 \\ &= 0.10C + 0.06C \\ &= 0.16C \quad \text{TM } C = \mathbf{33\ 125\ DH} \end{aligned}$$

Vérifions :

$$\begin{array}{l} \mathbf{1/10C} \\ \mathbf{I} \end{array} \quad \begin{array}{l} = 1/10 (33125) \\ = 33\ 125 \times 6\% \end{array} \quad \begin{array}{l} = 3\ 312.50 \\ = 1\ 987.50 \end{array}$$

$$5\ 300.00$$

EX 5

$$e = 8300 \times 40 \times 10.75 / 36000 = \mathbf{99.14}$$

EX 6

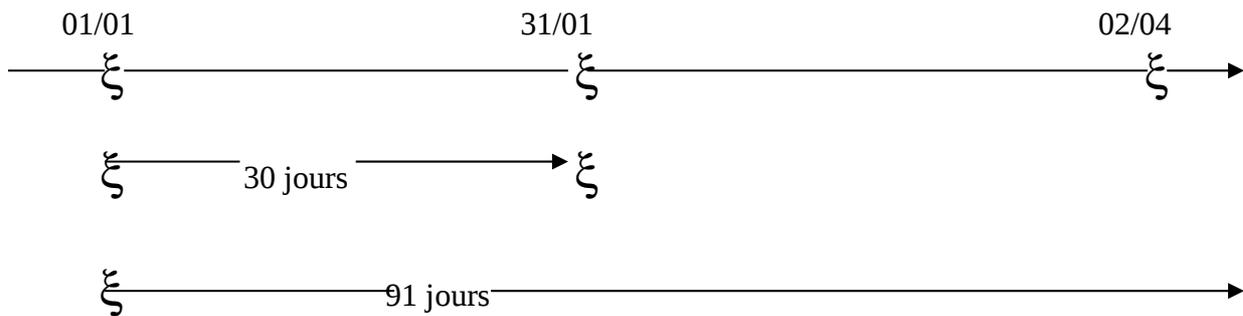
$$6151 = 6210 - e \quad \text{d'où } e = 59$$

$$\begin{aligned} 59 &= V_{tn} / 36\,000 \\ &= 6210 \times 9.5 \times N / 36000 \\ 36000 \times 59 &= 6210 \times 9.5 \times N \end{aligned}$$

N = 36 jours

L'échéance se situe donc 36 jours après le 12 juillet soit le 17 août.

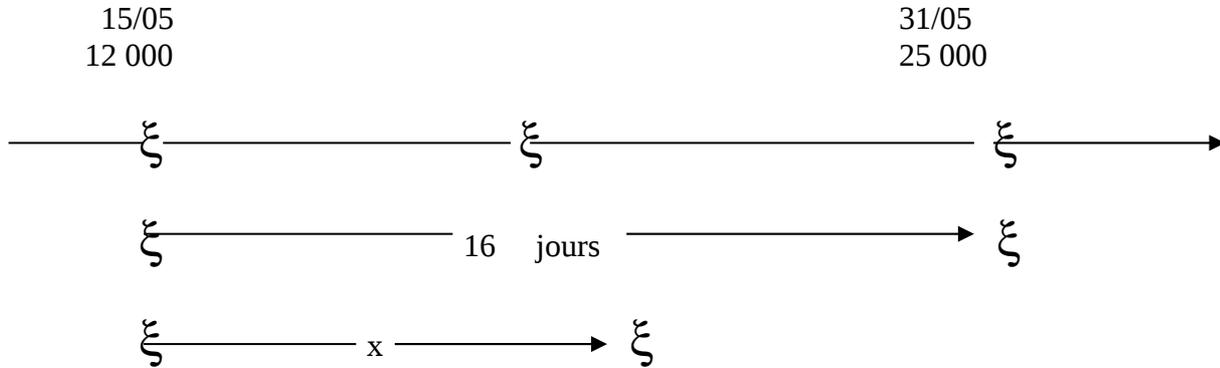
EX 7



$$\begin{aligned} V - V \times 10.5 \times 91 / 36000 &= 13\,000 - 13\,000 \times 10.5 \times 30 / 36000 \\ (36000 V - 955.5 V) / 36\,000 &= 13\,000 - 113.75 \\ 35044.50 V / 36000 &= 12\,886.25 \\ V &= 12886.25 \times 36000 / 35044.50 \\ \mathbf{V} &= \mathbf{13237.60} \end{aligned}$$

EX 8

Premier effet unique



Prenons comme date d'équivalence le 15 mai

$$37000 - 37000 * 11.25 * (x) / 36000 = 12\ 000 + 25000 - 25000 * 11.25 * 16$$

36000

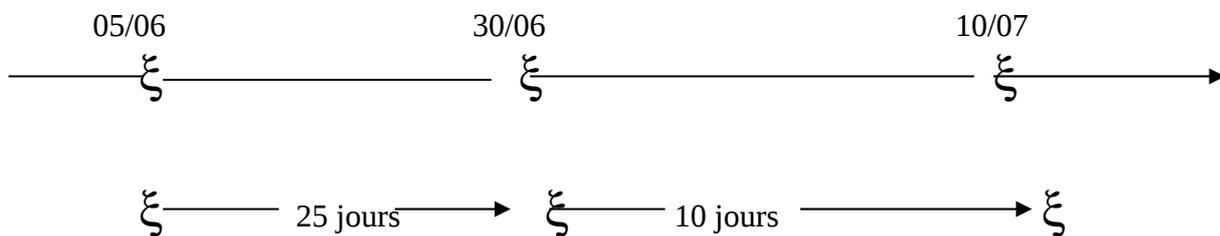
$$37000 - 11.5625 (x) = 12\ 000 + 24875$$

$$11.5625 (x) = 125$$

$$(x) = 10.81 \quad | \quad 11 \text{ jours}$$

Donc 11 jours après le 15 mai soit le 26 mai

Deuxième effet unique



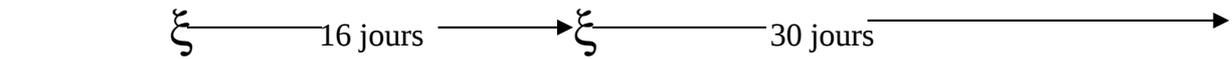
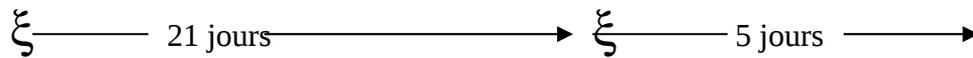
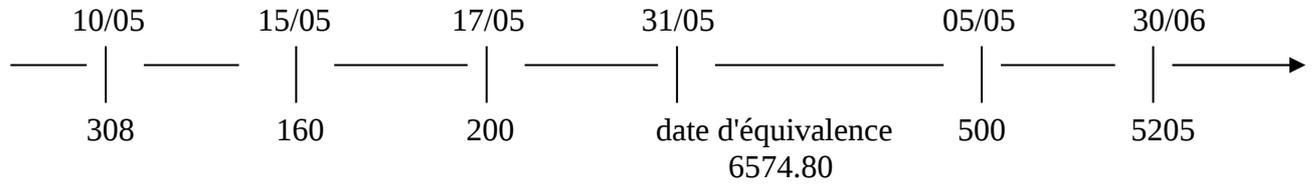
Soit V la valeur nominale recherchée, on peut écrire :

$$V = 18000 + 18000 * 11.25 * 25 / 36000 + 32400 - 32400 - x * 11.25 * 10 / 36000$$

$$V = 18000 + 140.62 + 32400 - 101.25$$

$$V = \mathbf{50439.37}$$

EX 9



ξ



$$6574.80 = 308 + 308 \times 9 \times 21 / 36000 + 160 + 160 \times 9 \times 16 / 36000 + 200 + 200 \times 9 \times 14 / 36000 + 500 - 500 \times 9 \times 5 / 36000 + 5205 - 5205 \times 9 \times 30 / 36000 + S$$

$$= 309.62 + 160.64 + 200.70 + 499.37 + 5165.96 + S$$

$$= 6336.29 + S$$

$$S = 238.51$$

Intérêts Composés (1)

I – Définition :

Un capital est dit placé à intérêts composés, lorsque, à la fin de chaque période de placement, Les intérêts produits sont ajoutés au capital pour former un nouveau capital qui produira à son tour Intérêt pendant la période suivante.

Exemple :

Soit un capital de 8000 dh placé à intérêts composés au taux de 5% l'an pendant 3 ans.

Déterminer sa valeur acquise en fin de placement.

Période	Capital placé au début de la période	Intérêts Produits	Valeur acquise
1	8000	$8000 \times 5\% = 400$	$8000 + 400 = 8400$ dh
2	8400	$8400 \times 5\% = 420$	$8400 + 420 = 8820$ dh
3	8820	$8820 \times 5\% = 441$	$8820 + 441 = 9261$ dh

Pour bout de 3 ans de placement, la valeur acquise par le capital est de 9261 dh et les intérêts produits s'élèvent à 1261 dh.

II – Formule fondamentale des intérêts composés

C : Capital placé

n : Durée de placement

t : taux d'intérêt pour 1 dh de capital

Va : Valeur acquise

La valeur acquise après n période de placement s'exprimera pas la formule :

$$\mathbf{Va = C (1+t)^n}$$

Exemple 1 :

La valeur acquise par un capital de 50000 dh placé à 12% est au bout de 5 périodes de :

$$50000 (1.12)^5 = 88117 \text{ dh}$$

$(1.12)^5$: Utilisation d'une table financière (voir extrait)
ou d'une calculatrice financière

Exemple 2 :

Un capital de 120000 dh est placé à intérêts composés au taux semestriel de 6%.
Capitalisation Semestrielle(*).

Calculer sa valeur acquise au bout de 4 ans.

Solution:

La durée doit être exprimée en semestres soit 8 semestres

D'après la T.F n° = 1

$$V_a = 120000 (1.06)^8$$

$$V_a = 120000 \times 1.593848$$

$$V_a = 191261.76$$

III – Problèmes sur la formule des intérêts composés :**a- Recherche de la valeur acquise :**

Un capital de 20000 dh a été placé pendant 7 ans au taux semestriel de 7%

C = 20000 t = 7% n = 7 ans soit 14 semestres

$$V_a = 20000 (1.07)^{14}$$

$$V_a = 20000 \times 2.578534 = 51570.68 \text{ dh}$$

*** même exemple mais avec un taux trimestriel**

$$V_a = 20000 (1.07)^{28}$$

$$V_a = 132976.76 \text{ dh}$$

b- Recherche du taux :

A quel taux d'intérêts composés annuel faut-il placer une somme de 10000 dh pour obtenir au bout de 10 ans une valeur de 26370 dh ?

*"Si nous plaçons une somme d'argent, aujourd'hui, combien recevons – nous demain ?" Cela s'appelle capitaliser.

Solution :

$$C = 10000 \quad t = X \% \quad n = 10 \quad Va = 26370 \text{ dh}$$

$$Va = C (1+t)^n$$

$$26370 = 10000 (1+t)^{10}$$

$$(1+t)^{10} = \frac{26370}{10000} = 2.6370 \quad \text{ne se trouve pas sur la table financière}$$

Il faut procéder par **interpolation** :

$$2.593742 < 2.6370 < 2.653298$$

$$1 < 2 < 3$$

$$10\% < t < 10.25 \%$$

$$4\% < y < 5\%$$

$$(1.10)^{10} < (1+t)^{10} < (1.1025)^{10}$$

$$\frac{t - 10\%}{10.25\% - 10\%} = \frac{2.6370 - 2.593742}{2.653298 - 2.593742}$$

$$t = 10.18 \%$$

Application:

Soit un capital de 6000 dh placé pendant 5ans à 4.4%. Calculer la valeur acquise.

$$Va = 6000 (1.044)^5 \quad \text{taux 4.4\% n'est pas tabulaire}$$

Il faut procéder par **interpolation** :

$$4.25 \% < 4.4\% < 4.5\%$$

$$(1.0425)^5 < (1.044)^5 < (1.045)^5$$

$$1.231347 < t < 1.246182$$

$$t = (1.044)^5 = 1.240248$$

$$Va = 6000 \times 1.240248$$

$$= 7441.43 \text{ dh}$$

c- Recherche du capital

La personne investit une somme d'argent dans un projet. 4 années plus tard, elle retire 50000 dh. Quelle est la somme placée si le taux d'intérêt est de 11.30 % par an ?

$$V_a = C(1+t)^n$$

$$50000 = C(1.113)^4 \quad \text{le taux } 11.30\% \text{ n'est pas tabulaire}$$

Solution par **interpolation** :

$$\begin{aligned} 11.25 &< 11.30 < 11.50 \\ (1.1125)^4 &< (1.113)^4 < (1.1150)^4 \\ 1.531733 &< t < 1.545608 \end{aligned}$$

$$t = 1.534556$$

$$\frac{11.30 - 11.25}{11.50 - 11.25} = \frac{t - 1.531793}{1.545608 - 1.531793}$$

$$t = (1.113)^4 = 1.534556$$

$$V_a = C(1+t)^n$$

$$C = \frac{V_a}{(1+t)^n} = \frac{50000}{1.534556} = 32582.71 \text{ dh}$$

d- Recherche de la durée

Un capital de 125000 dh a acquis une valeur acquise de 16800 dh au taux de 10%. Quelle a été la durée de placement ?

$$V_a = c(1+t)^n$$

$$16800 = 12500(1.10)^n$$

$$(1.10)^n = \frac{16800}{12500} = 1.344$$

La T.F n° 1 nous donne 1.331 000 et 1.464100

$$(1.10)^3 < (1.10)^n < (1.10)^4$$

$$1.331000 < (1.10)^n < 1.464100$$

$$n = 3.09 \cong 3.1 \text{ soit } 3 \text{ ans et } 1 \text{ mois}$$

IV – Formule de capitalisation avec un nombre fractionnaire de période :**1° - Solution rationnelle :**

Consiste à utiliser la formule générale pour la partie entière et utiliser les intérêts simples pour la partie fractionnaire

Exemple :

Calculer en utilisant la solution rationnelle, la valeur acquise par un capital de 100.000 dh placé pendant 8 ans et 5 mois au taux annuel de 6%.

$$V_a = 100.000 (1.06)^{8 \frac{5}{12}}$$

$$V_a = 100.000 (1.06)^8 + 100.000 (1.06)^8 * \frac{5}{12} * \frac{6}{100}$$

$$V_a = 100.000 (1.06)^8 * (1 + \frac{5}{12} * 0.06)$$

\downarrow Intérêt composé Pour la partie entière (8) ans	\downarrow Intérêt simple pour la partie fractionnaire (5/12)
---	---

$$V_a \frac{8 \frac{5}{12}}{12} = 100000 * 1.593848 * 1.024999$$

$$= 163369.42$$

2° - Solution Commerciale :

On considère que la totalité de la durée du placement s'effectue à intérêts composés.

Reprenons l'exemple précédent.

$$V_a \frac{8 \frac{5}{12}}{12} = 100000 \times (1.06)^8 \times (1.06)^{\frac{5}{12}}$$

\downarrow T.F N° 1	\downarrow T.F N° 6
--------------------------	--------------------------

$$V_a \frac{8 \frac{5}{12}}{12} = 100000 \times 1.593848 \times 1.02458$$

$$= 163302.5$$

Application:

Calculer la valeur acquise par un capital de 100000 dh placé pendant 6 ans et 3 mois au taux de 13.10%

$$V_a = 100000 (1.1310)^{6\frac{3}{12}}$$

Solution commerciale :

$$V_a = 100000 (1.1310)^6 (1.310)^{\frac{3}{12}}$$

Le taux 13.10 n'est pas tabulaire

Double interpolation

Interpolation n° 1 :

$$13 < 13.10 < 13.25$$

$$(1.13)^6 < (1.1310)^6 < (1.1325)^6$$

$$2.081952 < (1.1310)^6 < 2.109742$$

$$(1.1310)^6 = 2.093068$$

interpolation n° 2 :

$$(1.13)^{\frac{3}{12}} < (1.1310)^{\frac{3}{12}} < (1.1325)^{\frac{3}{12}}$$

$$1.03103 < X < 1.03160$$

$$(1.1310)^{\frac{2}{3}} = 1.031258$$

$$V_a = 100000 \times 2.093068 \times 1.031258$$

$$V_a = 215849,31 \text{ dh}$$

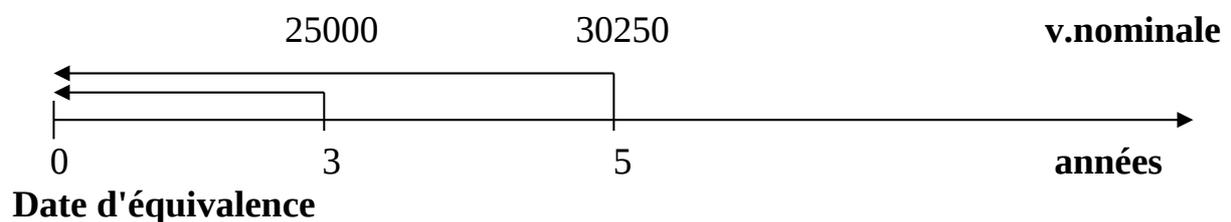
Notion de Capitaux équivalents

I – Définition :

Deux capitaux de valeurs nominales et d'échéances différentes sont équivalents à intérêts composés, à une date déterminée (date d'équivalence), si escomptés à intérêts composés, au même taux et dans les mêmes conditions, ils ont, à cette date, une même valeur actuelle.

Exemple 1 :

Soit un capital de 25000 dh payable dans 3 ans et un capital de 30250 dh payable dans 5 ans. Taux d'escompte : 10%



Date d'équivalence

1^{er} Capital :

Valeur actuelle à la date d'équivalence = $25000 (1+t)^{-3}$
 $25000(1.1)^{-3} = 25000 \times 0.7513145 = 18782.87$ dh

2^{ème} Capital :

$30250(1.1)^{-5} = 30250 \times 0.62092132 = 18782.87$ dh

A l'époque 0, ces 2 capitaux, au taux annuel de 10% ont une même valeur actuelle : Ils sont donc équivalents.

Si nous changeons la date d'équivalence, les valeurs actuelles restent les mêmes à conditions que le taux ne change pas.

Exemple :

Epoque 1 $25000 (1.1)^{-2} = 30250(1.1)^{-4} = 20661.15$ dh

Exemple 2 :

Un débiteur qui doit s'acquitter des dettes suivantes :

24000 dh payable dans un 1an

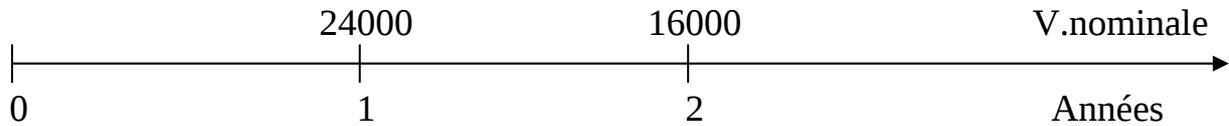
16000 dh payable dans 2 ans

Obtient de son créancier de se libérer par un paiement unique dans 2 ans.

Quelle est la valeur de ce paiement unique si le taux d'intérêts composés est de 13% ?

Solution:

Equivalence à l'époque 0



$$\begin{aligned}
 &24000 (1.13)^{-1} \\
 &16000(1.13)^{-2} \\
 &24000 (1.13)^{-1} + 16000 (1.13)^{-2} = V_n (1.13)^{-2} \\
 &21238.94 + 12530.352 = V_n \times 0.783147 \\
 &43119.99 = V_n \\
 &\text{Soit } 43120
 \end{aligned}$$

Un capital est équivalent à intérêts composés, à une date déterminée, à un ensemble de plusieurs capitaux si la valeur actuelle de ce capital est égale à la somme des valeurs actuelles des autres capitaux.

Application n° 1 : Calcul du taux :

Une personne a emprunté 15000 dh à intérêts composés. Au lieu de rembourser le capital et les intérêts 5 ans après comme convenu, elle propose de rembourser à cette date 8000 dh et le reste est versé 5 ans plus tard par un montant de 29110.90 dh.

Quel est le taux d'intérêts composés ?

Solution:

$$\begin{aligned}
 &15000 (1+t)^{10} = 8000(1+t)^5 + 29110.90 \\
 &\text{Posons } (1+t)^5 = x \\
 &15000x^2 - 8000x - 29110.90 = 0 \\
 &15x^2 - 8x - 29.11090 = 0 \\
 &\Delta = 64 + 1746.654 \qquad \Delta = 1810.654
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{\Delta} = 42.55178022 \\
 &x_1 = 1.685059 \qquad x_2 = -1.1517 < 0 \text{ à rejeter} \\
 &\text{on a alors } (1+t)^5 = 1.685 \\
 &\text{d'après la T. Financière n° 1 on a } t = 11 \text{ soit } 11\%
 \end{aligned}$$

Application n° 2 : Calcul de la valeur nominale :

Un débiteur a contracté 4 dettes auprès du même créancier :

8200 dh payable dans 1 ans 3 mois ;

9600 dh payable dans 2 ans 6 mois ;

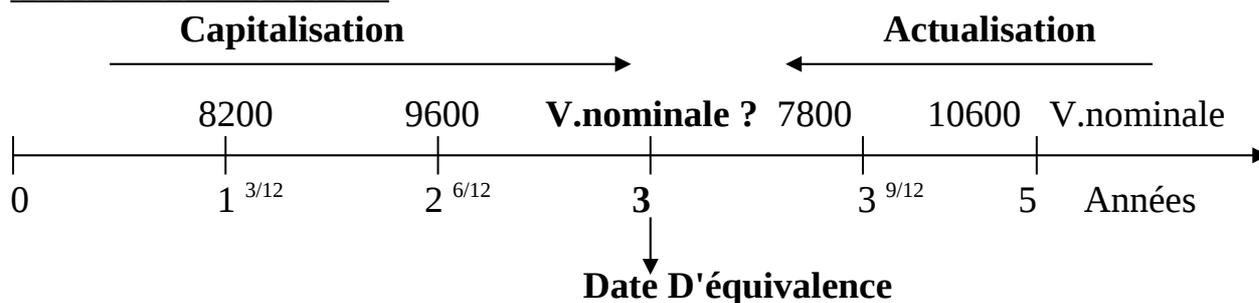
7800 dh payable dans 3 ans 9 mois ;

10600 dh payable dans 5 ans.

Préférant se libérer en une seule fois, il obtient de son créancier la faculté de s'acquitter par un paiement unique dans 3 ans.

Calculer le montant de ce paiement, compte tenu d'un taux annuel de 8%.

Solution Commerciale :



$$V. \text{ nominale de l'effet unique} = 8200(1.08)^{1 \times 9/12} + 9600 (1.08)^{6/12} + 7800 (1.08)^{-3/12} + 10600 (1.08)^{-2}$$

$$\begin{aligned} V. \text{ nominale} &= 8200 \times 1.144172 + 9600 \times 1.03923 + 7800 \times 0.943913 \\ &\quad + 10600 \times 0.857338 \\ &= 35809.12 \text{ dh} \end{aligned}$$

Application n° 3 : Calcul de l'échéance :

Déterminer l'échéance d'une dette de 4983.245 dh destinée à remplacer les 3 dettes suivantes :

1000 payable dans 6 mois

1800 payable dans 18 mois

2000 payable dans 30 mois

Si on applique une capitalisation semestrielle avec taux semestriel de 6 %

Solution:

$$4989.245 (1+t)^{-n} = 1000 (1+t)^{-1} + 1800 (1+t)^{-3} + 2000 (1+t)^{-5}$$

$$4989.245 (1.06)^{-n} = 1000 (1.06)^{-1} + 1800 (1.06)^{-3} + 2000 (1.06)^{-5}$$

$$(1.06)^{-n} = 0.792$$

Suivant la table financière n° 2, on aura $n = 4$ soit 4 semestres

Un créancier accepte que son débiteur remplace 3 dettes :

5500 payable dans 2 ans

5800 payable dans 3 ans

6400 payable dans 4 ans
 Par un versement unique de 17200 dh. Compte tenu d'un taux annuel de 9%.
 Déterminer l'échéance de ce paiement.

Solution :

Soit x l'échéance du paiement unique par rapport à l'époque 0 choisie comme date d'équivalence

$$17200 (1.09)^{-x} = 5500(1.09)^{-2} + 5800(1.09)^{-3} + 6400(1.09)^{-3}$$

$$(1.09)^{-x} = \frac{13641.82}{17200} = 0.792129$$

$$0.772183 < 0.792129 < 0.841680$$

$$(1.09)^{-2} < (1.09)^{-x} < (1.09)^{-3}$$

$$x = 2 + 0.712994805 = 2.712994805$$

Soit 2 ans et 256 jours

Cas de l'échéance moyenne :

Rappelons qu'il s'agit de l'éventualité ou la valeur nominale du capital unique
 En remplacement de plusieurs capitaux, est égale à la somme des valeurs
 nominales de ces capitaux.

Exemple:

Un débiteur qui s'est engagé à payer au même créancier :
 20420 dh dans 1 ans 6 mois
 17610 dh dans 2 ans
 13270 dh dans 2 ans 6 mois
 Préférerait se libérer par un paiement unique de 51300 dh

Cas de l'échéance moyenne puisque : $20420 + 17610 + 13270 = 51300$ dh.
 Somme du valeur nominale = Valeur nominale du capital unique.

Quelle serait l'échéance de ce paiement au taux annuel de 9,75 % ?

Solution :

Prenons l'époque 0 comme date d'équivalence

Soit n l'échéance moyenne

$$51300 (1.0975)^{-n} = 20420 (1.0375)^{-1.5} + 17610 (1.0975)^{-2} + 13270 (1.0975)^{-2.5}$$

$$51300 (1.0975)^{-n} = 42896.54$$

$$(1.0975)^{-n} = 0.836189863$$

$$0.830216 < 0.836189863 < 0.911162$$

$$(1.0975)^{-1} = 0.911162$$

$$(1.0975)^{-2} = 0.830216$$

$$n = 1.926199404$$

l'échéance moyenne aura lieu dans :

1an 333 jours

APPLICATION :

Déterminer l'échéance d'une dette unique de 20 000 dh, destinée à remplacer 3 dettes :

100 000 payable dans 1 an

60 000 payable dans 2 ans

17211.10 payable dans 4 ans

taux 9%

l'équivalence à l'époque 0 s'établit ainsi :

$$200\ 000 (1.09)^{-n} = 100\ 000 (1.09)^{-1} + 60\ 000 (1.09)^{-2} + 17\ 211.10 (1.09)^{-4}$$

$$n = 0.772183 \text{ d'après la T. Financière}$$

$$n = 3 \text{ ans.}$$

Le capital unique sera payable dans 3 ans. (échéance Commune)

FOAD	LES MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES I	LIVRET 52	Page 37
------	---------------------------------	-----------	---------

EXERCICES D'APPLICATION (intérêts composés)

EXERCICES ET CORRIGES

Exercice 1 :

Nous plaçons à intérêts composés au taux annuel de 7.25 %

*le 1^{er} mai 1996 : 15 000 DH

* le 1^{er} avril 1997 : 14 500 DH

*le 1^{er} octobre 1996 : 17000 DH

*le 1^{er} novembre 1998 : 15200 DH

Quelle est la valeur acquise totale le 31 décembre 1998 ?

Capitalisation annuelle. Solution rationnelle. Solution Commerciale.

Exercice 2 :

Quel est le capital qui, placé à intérêts composés au taux annuel de 7.50 %, a acquis, au bout de 4 ans et 8 mois de placement, une valeur de 45 000 dh ?

Capitalisation annuelle. Solution rationnelle. Solution Commerciale.

Exercice 3 :

On place 8250 DH à intérêts composés pendant 5 ans à un taux annuel Variable (Capitalisation annuelle)

1. Si le taux annuel est de 7.5 % pendant les deux premières années, 8% la troisième année et de 7% les deux dernières années. quelle est la valeur acquise au bout de 5 ans par ce capital ?

2. à quel taux annuel fixe aurait-il fallu faire ce placement pour obtenir au bout de 5 ans la même valeur acquise ?

Exercice 4 :

Un capital de 9750 DH a acquis une valeur de 13 000 DH après 4 ans et 7 mois de placement à intérêts composés.

Déterminer le taux annuel de placement.

Capitalisation annuelle. Solution rationnelle et solution Commerciale.

Exercice 5 :

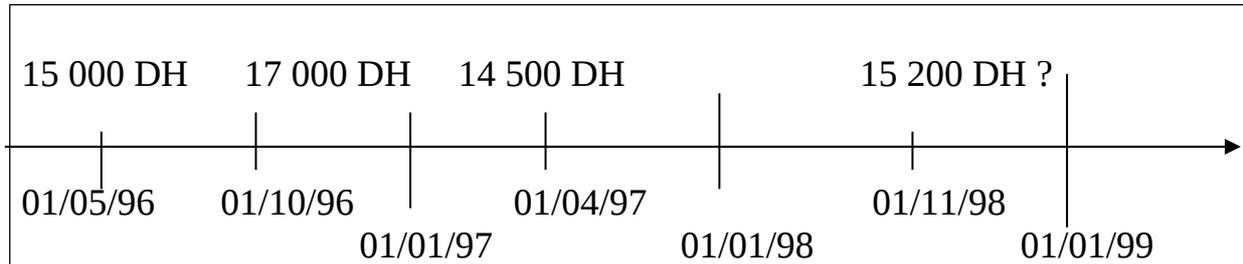
Le 1^{er} janvier 1994, on place à intérêts composés 28 000 DH.

Le 1^{er} janvier 1995, on retire 12 000 DH.

Le 1^{er} janvier 1996, on fait un nouveau dépôt de 16 000 DH.

Le 1^{er} janvier 1997, on dispose en compte de 38 775,77 DH.

Calculer le taux annuel de placement (entre 8% et 9 %). Capitalisation annuelle.

EXERCICE 1 :**Solution rationnelle**

On capitalise les intérêts simples de la première année le 1^{er} janvier 1997 :

$$15000 + 15000 \times 0.0725 \times 8/12 + 17000 \times 0.0725 \times 3/12 \\ = 15000 + 725 + 17000 + 308.125 = 33\,033,125 \text{ DH}$$

Valeur acquise par les deux premiers placements au 31 décembre 1998 :

$$33\,033,125 \times (1.0725)^2 = 33\,033,125 \times 1.150\,256\,25 = 37\,996,56 \text{ DH.}$$

On capitalise les intérêts simples du troisième placement au 1^{er} janvier 1998 :

$$14\,500 + 14\,500 \times 0.0725 \times 9/12 = 15\,288,4375$$

Valeur acquise par le troisième placement au 31 décembre 1998 :

$$15\,288,4375 \times (1.0725) = 16\,396,85$$

On ajoute les intérêts simples du dernier placement au 31 décembre 1998 :

$$15\,200 \times 0.0725 \times 2/12 = 183.67$$

Valeur acquise totale : $37996.56 + 16396,85 + 15200 + 183.67 = 69777.08 \text{ DH.}$

Solution Commerciale :

On utilise la formule générale de la valeur acquise à intérêts composés.

$$15000 \times (1.0725)^{2+8/12} + 17000 \times (1.0725)^{2+3/12} + 14500 \times (1.0725)^{1+9/12} \\ + 15200 \times (1.0725)^{2/12} = 15000 \times (1.0725)^{8/3} + 17000 \times (1.0725)^{27/12} \\ + 14500 \times (1.0725)^{21/12} \\ + 15200 \times (1.0725)^{1/6} = 15000 \times 1.205\,200\,96 + 17000 \times 1.170\,560\,66 \\ + 14500 \times 1.130\,304\,03 \\ + 15200 \times 1.011\,733\,7 = 18\,078.01 + 19\,899.53 + 16\,389.41 + 15\,378.35 \\ = 69\,745.30 \text{ DH}$$

EXERCICE 2 :



Solution Commerciale :

$$C_0 = 45000 \times (1.075)^{-(4+8/12)} = 45000 \times (1.075)^{-14/3} = 45000 \times 0.713\ 554\ 528 = 32\ 109.95\ \text{DH}$$

Solution Rationnelle :

Les huit derniers mois de placement font l'objet d'intérêts simples.

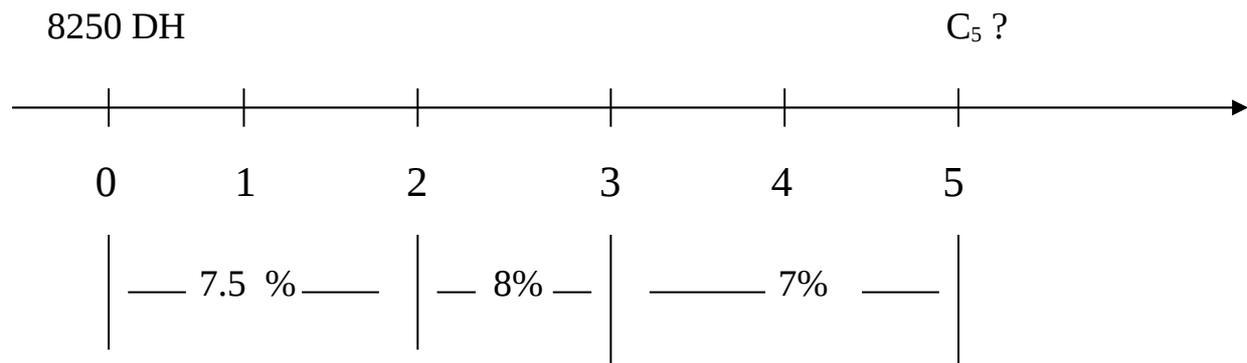
Valeur Acquise à la fin de la quatrième année de placement :

$$C_4 + C_4 \times 0.075 \times 8/12 = 45000$$

$$C_4 = 42\ 857.14$$

$$C_0 = 42\ 857.14 \times (1.075)^{-4} = 32\ 091.45\ \text{DH}$$

EXERCICE 3 :



1°) Valeur acquise à la fin de la deuxième année :

$$C_2 = 8250 \times (1.075)^2$$

Valeur acquise à la fin de la troisième année :

$$C_3 = C_2 \times (1.08) = 8250 \times (1.075)^2 \times (1.08)$$

Valeur acquise au bout de 5 ans :

$$\begin{aligned} C_5 &= C_3 \times (1.07)^2 = 8250 \times (1.075)^2 \times (1.08) \times (1.07)^2 \\ &= 8250 \times 1.155\,625 \times 1.08 \times 1.144\,9 = 11\,788.598\,81 \\ &\text{soit } \mathbf{11\,788.60\, DH.} \end{aligned}$$

2°) Soit X le taux annuel (par dirham) fixe.

$$8250 \times (1 + x)^5 = 11\,788.60$$

$$(1 + x)^5 = 11\,788.60/8250$$

$$X = (11\,788.60/8250)^{1/5} - 1 = 0.073\,993 \text{ soit } \mathbf{7.40\%}.$$

EXERCICES D'APPLICATION

(équivalence à intérêts composés)

Exercice n° 1 :

On remplace 5 règlements :

640 DH dans 7 mois

670 DH dans 1 an et 8 mois

650 DH dans 11 mois

680 DH dans 2 ans et 1 mois

660 DH dans 1 an et 5 mois

par un paiement unique de 3 350 DH dans 1 an et 6 mois

A quel taux annuel a été calculé cet échange : Solution commerciale

Exercice n° 2 :

Pour l'achat d'un appareil ménager , un commerçant propose 2 formules de crédit au taux mensuel de 0.775 % .

Première proposition : règlement en 4 versement

1 000 DH 1 mois après la livraison

950 DH , 2 mois après la livraison

940 DH , 3 mois après la livraison

860 DH , 4 mois après la livraison

Coût total d'acquisition : 3 750 DH

Deuxième proposition ; règlement en 4 versement

850 DH , 1 mois après la livraison

910 DH , 2 mois après la livraison

980 DH , 3 mois après la livraison

1 060 DH , 4 mois après la livraison

Coût total d'acquisition : 3 800 DH

Montrer que les 2 formules de crédit à intérêts composés sont équivalentes. Quel est le prix de l'appareil ménager ?

Exercice n° 3 :

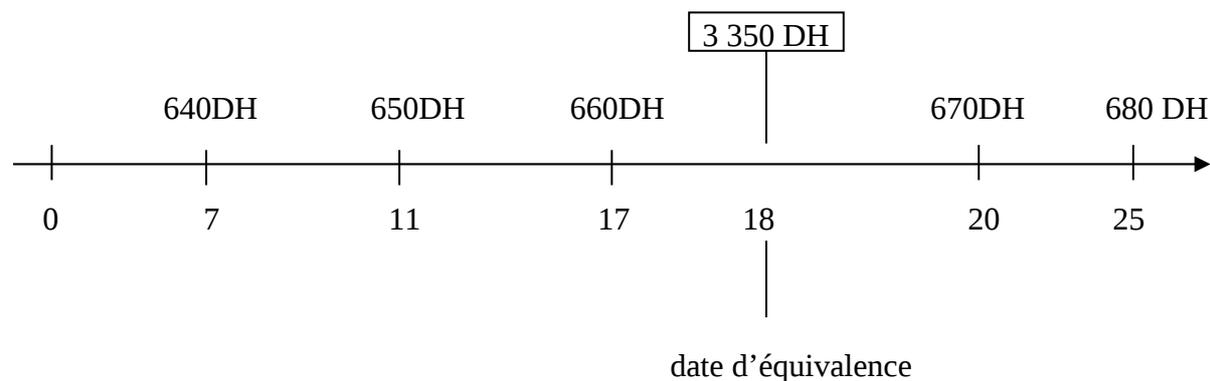
Un débiteur obtient de son créancier la possibilité de se libérer de 5 dettes :

- 4 800 DH payables dans 1 an et 2 mois
 - 5 200 DH payables dans 1 an et 7 mois
 - 5 300 DH payables dans 2ans et 5 mois
 - 6 800 DH payables dans 3 ans et 1 mois
 - 7 900 DH payables dans 3 ans et 7 mois
- par un paiement unique dans 2 ans.

Calculer le montant de ce paiement, compte tenu d'un taux annuel de 7 %. Solution commerciale.

CORRIGES

Exercice n° 1 :



A la date du versement unique, nous pouvons écrire :

$$640 \times (1+i)^{11/12} + 650 \times (1+i)^{7/12} + 660 \times (1+i)^{1/12} + 670 \times (1+i)^{-2/12} + 680 \times (1+i)^{-7/12} = 3\,350$$

i étant le taux annuel par dirham.

Après plusieurs essais, on constate que le taux est situé entre 9 % et 10 %. A 9 %, le versement unique serait de 3 347,98 DH. Le taux sera donc déterminé par une interpolation entre 9 % et 9,5 %.

0,09	→	3 347,9827		
0,005 ?	i	→	3 350	2,0173 2,7649
0,095	→	3 350,7476		

$i = 0,09 + 0,005 \times 2,0137/2,7649 = 0,093\,648$

FOAD – LES MATHEMATIQUES FINANCIERES I

Si l'on considère que le versement unique a été arrondi à 3 350 DH par défaut, le taux annuel est de 9,5 %.

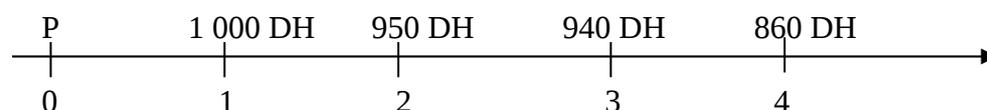
Si non le taux est très légèrement supérieur à 9,36 %.

En effet si $i = 0,09365$, on obtient $694,73 + 684,85 + 664,94 + 660,08 + 645,40 = 3350$

Taux annuel : 9,365 %.

Exercice n° 2 :

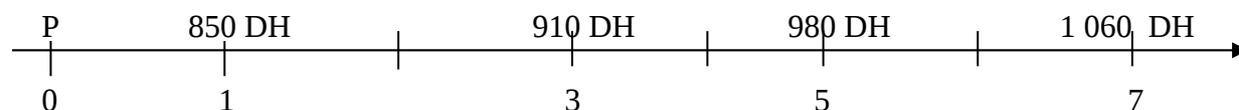
Première formule de crédit :



Prix de l'appareil ménager (valeur actuelle à l'époque 0 – livraison de l'appareil – des quatre versements mensuels).

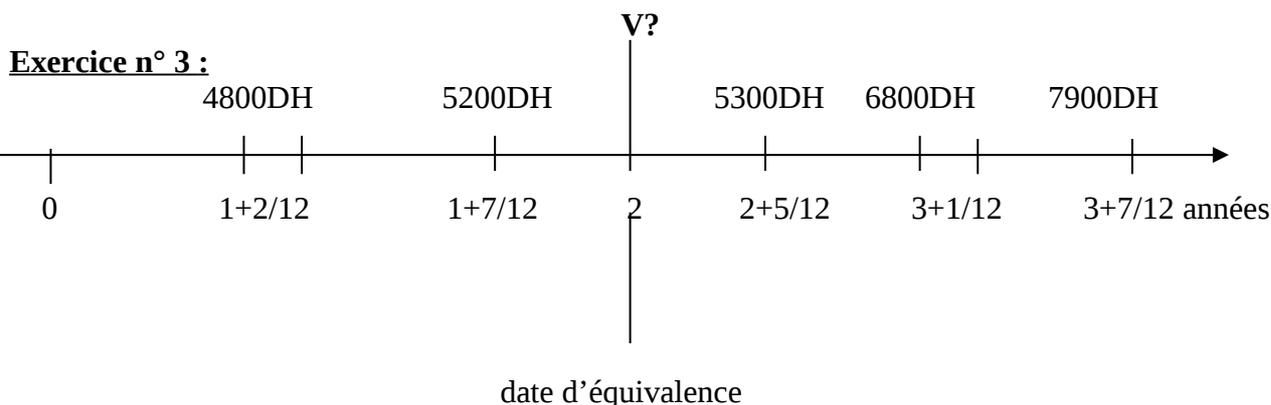
$$P = 1\,000 \times (1,00775)^{-1} + 950 \times (1,00775)^{-2} + 940 \times (1,00775)^{-3} + 860 \times (1,00775)^{-4} = 992,31 + 935,44 + 918,48 + 833,85 = 3\,680,08 \text{ soit } \mathbf{3\,680\,DH.}$$

Deuxième formule de crédit :



$$P = 850 \times (1,00775)^{-1} + 910 \times (1,00775)^{-3} + 980 \times (1,00775)^{-5} + 1\,060 \times (1,00775)^{-7} = 834,46 + 889,17 + 942,89 + 1\,004,24 = 3\,679,76 \text{ soit } \mathbf{3\,680\,DH.}$$

Les deux formules de crédit sont bien équivalentes au taux mensuel de 0,775 %.



$$V = 4\,800 \times (1,07)^{10/12} + 5\,200 \times (1,07)^{5/12} + 5\,300 \times (1,07)^{5/12} + 6\,800 \times (1,07)^{-13/12} + 7\,900 \times (1,07)^{-19/12} = 5\,078,41 + 5\,348,68 + 5\,152,67 + 6\,319,41 + 7\,097,46 = 28\,996,36 \text{ soit } \mathbf{29\,000\,DH} \text{ par excès.}$$

DEVOIR

SUR LES INTERETS SIMPLES

EX 1

Un commerçant propose à ses clients deux modes de règlement pour un article :

- a- 10 000 DH versés au comptant ;
- b- 4 000 DH comptant, le solde en 3 traites de même montant, échelonnées de 3 mois en 32 mois ; la première venant à échéance 3 mois après le versement comptant.

Quel doit être le montant nominal de chaque traite pour que les 2 modes de règlement soient équivalents le jour de la vente (taux 10%)?

EX 2

UN commerçant vend une marchandise au comptant au prix de 1 750 DH ou à crédit, de la façon suivante :

- 350 DH au comptant,
- Le reste par acceptation de 5 traites de même valeur de 285 DH échéant de 30 en 30 jours.

À quel taux les calculs devront-ils être faits pour que les 2 règlements soient équivalents le jour de la vente ?

EX 3

Un commerçant doit à son créancier les 5 effets suivants :

3 888 DH au 10 septembre N

5 790 DH au 25 septembre N

7 280 DH au 30 Septembre N

9 436 DH au 15 Octobre N

5 400 DH au 30 Octobre N.

Il veut se libérer en une seule fois en payant un effet de 31 794 DH.

Quelle devra être l'échéance de cet effet ?

EX 4

Le 15 Mars N, un commerçant présente 3 effets à l'escompte. La banque lui remet la même somme pour chacun d'eux.

Sachant que le premier s'élève à 8 460 DH au 13 Juillet, le deuxième et de 8 400 DH au 1^{er} Juin, le troisième est de 8 310 DH ; on demande de calculer :

- 1°) Le taux d'escompte appliqué par la banque;
- 2°) L'échéance du troisième effet;
- 3°) La date à laquelle on pourrait remplacer les trois effets par un effet de 25 170 DH.

FOAD	LES MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES I	LIVRET 52	Page 46
------	---------------------------------	-----------	---------

EX 5

Au taux de 8% on veut remplacer deux effets :

- effet n° 1 : d'une valeur nominale de 3 600 DH à 60 jours d'échéance;
- effet n° 2 : nominale et d'échéance inconnues,

par deux autres effets :

- effet n° 3 : de nominal 3 000 DH à 180 jours d'échéance;
- effet n° 4 : de valeur nominal inconnue et à 27 jours d'échéance.

Sachant que :

- La somme des valeurs nominales des effets remplacés est égale au total des valeurs nominales des effets de remplacement ;
- La somme des valeurs actuelles des effet n° 3 et 4 s'élève à 8 844 DH.

Calculer :

- 1°) La valeur nominale des effets n° 4 et 2;
- 2°) l'échéance de l'effet n° 2.

EX 1 :

Une entreprise a décidé d'acquérir un ordinateur. Elle a le choix entre :

-Un paiement unique de 7568.60 DH à une date déterminée.

-Payer 2500DH dans 6 trimestre, 3200DH dans 8 trimestres et 2800 DH dans 12 trimestres .

Déterminer l'échéance du règlement unique. (Taux trimestriel 8%)

EX 2 :

Une entreprise avait prévu d'acheter une nouvelle machine pour le 31/12/1992. Pour cela, elle a placé chaque année et pendant 2 ans 50 000 DH à intérêt composés.

Le 1^{er} placement a eu lieu le 31/12/1988.

Pour tenir compte de l'effet de l'inflation, le montant placé annuellement a été porté à 80 000 DH à partir du 3^{ème} versement, c'est à dire le 31/12/90.

Quel est le montant dont elle va disposer à la date sachant que le dernier placement a eu lieu le 31/12/199 et que le taux d'intérêt est de 12 % l'an.

EX 3 :

On avait emprunté 150 000 DH à intérêts composés. Au lieu de rembourser la capital et les intérêts 5 ans après comme prévu, on propose de rembourser à cette date 80 000 DH seulement, le reste étant acquitté 5 ans plus tard par un versement de 124704,40 DH. Quel est le taux retenu pour les calculs ?

EX 4 :

Un industriel envisage l'acquisition d'un matériel de très courte durée : 3ans. Ce matériel doit procurer :

30 000 DH de gains la 1^{er} année

24 000 DH de gains la 2^{ème} année

20 000 DH de gains la 3^{ème} année

Quelle somme devrait-il investir dans ce matériel pour obtenir un taux de rentabilité de 12%.

EX 5 :

Un débiteur qui doit rembourser à son créancier 20 000 DH dans 2 ans et 18 000 DH dans 5 ans obtient de se libérer par un paiement unique de 37 000 DH dans 3 ans .A quel taux annuel a été calculé cet arrangement ?

CORRIGE DU DEVOIR SUR LES INTERETS SIMPLES**EX 1**

Soit A en DH le montant nominal de chaque traite.

$$10\,000 = 4\,000 + \left[\frac{A - \frac{A \times 10 \times 3}{360}}{1\,200} \right] + \left[\frac{A - \frac{A \times 10 \times 6}{360}}{1\,200} \right] + \left[\frac{A - \frac{A \times 10 \times 9}{360}}{1\,200} \right]$$

$$10\,000 = 4\,000 + \left[\frac{A - \frac{A}{40}}{40} \right] + \left[\frac{A - \frac{2A}{40}}{40} \right] + \left[\frac{A - \frac{3A}{40}}{40} \right]$$

$$400\,000 = 160\,000 + 40A - A + 40A - 2A + 40A - 3A$$

A = 2 105,26 DH : valeur nominale de chaque traite.

EX 2

Soit t % le taux

$$1\,750 = 350 + \left[\frac{285 - 285 \times \frac{t}{100} \times \frac{30}{360}}{100} \right] + \left[\frac{285 - 285 \times \frac{t}{100} \times \frac{60}{360}}{100} \right] + \left[\frac{285 - 285 \times \frac{t}{100} \times \frac{90}{360}}{100} \right]$$

$$+ \left[\frac{285 - 285 \times \frac{t}{100} \times \frac{120}{360}}{100} \right] + \left[\frac{285 - 285 \times \frac{t}{100} \times \frac{150}{360}}{100} \right]$$

$$285 \times \frac{t}{100} \times \frac{30 + 60 + 90 + 120 + 150}{360} = 350 + (285 \times 5) - 1\,750$$

$$3,562 t = 7,0175$$

$$t = 7,02 \%$$

EX 3

Il s'agit du problème de l'échéance moyenne.

Choisissons comme date d'équivalence le 10 Septembre N.

Nominal	Échéance	Jours	Nombres (A x n)
3 888	10 Sept. N	0	0
5 790	25 Sept. N	15	86 850
7 280	30 Sept. N	20	145 600
9 436	15 Oct. N	35	330 260
5 400	30 Oct. N	50	270 000
31 794			832 450
	$n = \frac{832\,450}{31\,794} = 26,18 \rightarrow 27$		

EX 4

1°) Égalité des valeurs actuelles des 2 premiers effets :

$$8\,460 - 8\,460 \times \frac{t}{100} \times \frac{120}{360} = 8\,400 - 8\,400 \times \frac{t}{100} \times \frac{78}{360}$$

$$289,2t - 18,2t = 8\,460 - 8\,400$$

t=6 **Taux d'escompte : 6 %**

2°) Équivalence entre le second et le troisième.

$$8\,400 - 8\,400 \times \frac{6}{100} \times \frac{78}{360} = 8\,310 - 8\,310 \times \frac{6}{100} \times \frac{n}{360}$$

$$1,385n = 8\,310 + 109,20 - 8\,400 = 19,20$$

n= 13,86 **d'où n = 14 soit le 29/03/N**

3°) Il s'agit de l'échéance moyenne .

$$x = \frac{(8\,460 \times 120) + (8\,400 \times 78) + (8\,310 \times 14)}{25\,170}$$

$$x = \frac{1\,015\,200 + 655\,200 + 116\,340}{25\,170} = 71$$

L'échéance de l'effet unique sera le 25 Mai N.

EX 5

1°) Puisque la valeur actuelle totale des effets N° 3 et 4 est de 8 844 DH, on peut écrire :

$$3\,000 - 3\,000 \times \frac{8}{100} \times \frac{180}{360} + A - A \times \frac{8}{100} \times \frac{27}{360} = 8\,844$$

$$A - 0,06A = 8\,844 - 3\,000 + 120$$

$$0,99A = 5\,964$$

A = 6 000 DH

Puisque $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$
 On peut écrire : $3\,600 + A_2 + 3\,000 + 6\,000$
 D'où **A₂ = 5 400 DH** : valeur nominale du 2° effet.

2°) Soit n le nombre de jours restant à courir pour l'effet N° 2.
 Puisque la somme des valeurs actuelles des 2 premiers effets est égale à 8 844 DH (équivalents aux 2 autres), on a :

$$\left[3\,600 - 3\,600 \times \frac{8}{100} \times \frac{60}{360} \right] + \left[5\,400 - 5\,400 \times \frac{8}{100} \times \frac{n}{360} \right] = 8\,844$$

$$3\,552 + 5\,400 - \frac{6n}{5} = 8\,844$$

$$1,2n = 108$$

n = 90
 L'échéance de l'effet n° 2 aura lieu dans 90 jours.

CORRIGE DU DEVOIR SUR LES INTERETS COMPOSES

EX 1 :

L'équivalent à l'époque :

$$7568,60 (1,08)^{-n} = 25000(1,08)^{-6} + 3200 (1,08)^{-8} + 2800(1,08)^{-12} \text{ d'après la table financière}$$

$N^{\circ} = 2$ on a :

$$(1,08)^{-6} = 0,630170$$

$$(1,08)^{-8} = 0,540269$$

$$(-1,08)^{-12} = 0,397114$$

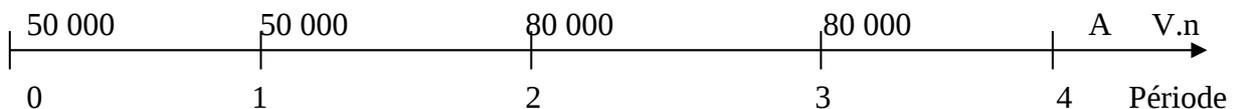
$$7568,60 (1,08)^{-n} = 4416,205$$

$$(1,08)^{-n} = 0,583490$$

D'après la table financière $N^{\circ} = 2$ on a $n=7$ soit 7 semestres

EX 2 :

$$A = 50000 (1,12)^4 + 50000 (1,12)^3 + 80000(1,12)^2 + 80000 (1,12)^1$$



D'après la table financière $N^{\circ} = 1$ on a :

$$(1,12)^1 = 1,120$$

$$(1,12)^2 = 1,2544$$

$$(1,12)^3 = 1,404928$$

$$(1,12)^4 = 1,573519$$

$$A = 78675,95 + 70246,4 + 100352 + 89600$$

$$A = 338874,35$$

EX 3 :

L'équivalence à l'époque versement

$$150\,000 (1++)^{10} = 80000 (1++)^5 + 124704,40$$

$$150 X^2 - 80m - 124,7044 = 0$$

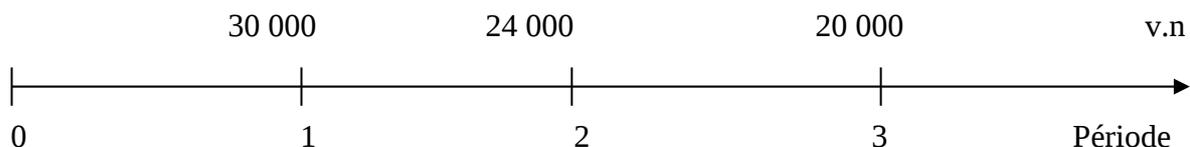
$$75x^2 - 40x - 62,3522$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 40 + 142,49 = 1,216$$

Pour $(1++)^5 = 1,216$ la table I donne $+ = 0,04$ le taux rechercher est 4%

FOAD – LES MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES I

EX 4 :

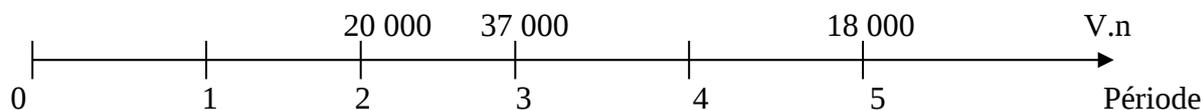


$$S = 30\,000 (1,12)^{-1} + 24\,000 (1,12)^{-2} + 20\,000 (1,12)^{-3}$$

$$S = 60153,96\text{DH}$$

EX 5 :

Solution :



Plaçons-nous à l'époque 3 pour écrire l'équivalence, ce qui facilitera le calcul :

$$20\,000 (1+i) + 1800(1+i)^{-2} = 3700$$

Nous ne pourrions résoudre cette équation que par des approximations successives,

1^{er} phase : après une série d'essai (6%, 7%, 8% etc) il faut à 2 taux qui donnent chacun au premier membre de l'équation une valeur encadrant 37000

à 8% $\longrightarrow 20\,000 \times 1,08 + 18000 \times (1,08)^{-2} = 37032,09$

à 9% $\longrightarrow 20\,000 \times 1,09 + 18000 \times (1,09)^{-2} = 36950,24$

Le taux est donc compris entre 8% et 9%

2^{ème} phase : interpolation

$$\begin{array}{l} 0,08 \longrightarrow 37032,09 \\ 0,09 \longrightarrow 36950,24 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0,08 \longrightarrow 37032,09 \\ X \longrightarrow 37000 \end{array}$$

$$0,01 \longrightarrow 81,85$$

$$Y \longrightarrow 32,09$$

$$\begin{array}{l} 0,01 \longrightarrow 81,85 \\ Y \longrightarrow 32,09 \end{array}$$

$$Y = \frac{0,01 \times 32,09}{81,85} = 0,00392$$

$$X = 0,08 + 0,00392 = 0,08392$$

Le taux d'actualisation avoisine 8,392 %

$$20\,000 \times 1,08392 + 18\,000 (1,08392)^{-2} = 3699,08$$

(Résultat légèrement inférieur à 37000 en raison même de l'interpolation)

à l'aide d'une calculatrice, nous pouvons affiner le résultat précédent.