

# **Cours de Gestion de Portefeuilles \_ LIII**

Dr. BIDIASSE Honoré

## **Introduction**

L'objectif général de ce cours est de faire acquérir une connaissance approfondie du cadre conceptuel servant à comprendre les mécanismes du marché financier, notamment la gestion des portefeuilles dans une économie moderne.

Pour mieux comprendre la logique sous-jacente à l'évaluation des actifs financiers et leur composition au sein d'un portefeuille, il est utile de décrire l'environnement institutionnel dans lequel s'opère la gestion de portefeuille.

### **1- Généralités**

Dans toute économie, on observe la coexistence de deux groupes d'agents économiques. Certains acteurs économiques, généralement l'Etat et les entreprises, investissent plus qu'ils n'épargnent, d'où un besoin de financement. Ils sont appelés agents à besoin de financement. Une autre catégorie, essentiellement les ménages, disposent des ressources qui excèdent le montant qu'ils souhaitent affecter à des dépenses. Ces agents à capacité de financement ont une épargne supérieure à leurs investissements. Cette distinction conceptuelle se trouve dans les travaux de Gurley et Shaw.

C'est cette complémentarité des besoins qui explique l'existence des marchés financiers. Ces derniers mettent en relation les agents à besoin de financement (ou prêteurs) avec les agents à déficit de financement (ou emprunteurs). Un marché financier est donc le lieu où s'opèrent des transactions sur des actifs financiers, c'est-à-dire des droits à percevoir des revenus futurs.

Le fonctionnement du marché financier repose sur l'activité de deux compartiments principaux qui le composent, dont les fonctions sont différentes et complémentaires : le marché primaire et le marché secondaire<sup>1</sup>.

Le **marché primaire** est le marché des émissions des actifs financiers (constitués d'actifs nouvellement créés). Ce compartiment remplit une fonction de financement ou d'allocation du capital. Le marché primaire permet de lever du capital et de transformer directement l'épargne des ménages en ressources longues. En contrepartie des capitaux recueillis, des valeurs mobilières ou actifs financiers (actions, obligations, ...) sont émis pour matérialiser les droits acquis par ceux qui ont apporté ces capitaux. Cette fonction de financement est la plus importante du marché financier.

Le **marché secondaire** est le second compartiment indispensable au fonctionnement d'un marché financier. Il est également appelé bourse de valeurs. C'est le lieu où s'échangent des titres déjà existants. C'est en quelque sorte un marché d'occasion. La bourse de valeurs assure la liquidité et la mobilité de l'épargne. On y négocie à tout moment les actifs financiers anciens. Cette négociabilité représente pour le détenteur un avantage essentiel, dans la mesure où elle lui permet en principe de pouvoir faire face à un besoin de financement à venir, en vendant le titre. Elle assure ainsi la liquidité du marché financier. Cette dernière permet de réaliser des arbitrages de portefeuille sans devoir attendre l'échéance des titres qui le composent ou rechercher individuellement une éventuelle contrepartie.

Le marché secondaire remplit également une fonction d'évaluation permanente des titres cotés, ce qui rend les transactions rapides et efficaces. En assurant, dans de bonnes conditions, la mobilisation de l'épargne investie en actifs financiers, la bourse des valeurs permet le bon fonctionnement du marché primaire et donc du financement de l'économie.

On parle de finance directe lorsque le financement s'effectue directement par les marchés financiers. A contrario, l'intermédiation financière caractérise la finance indirecte.

---

<sup>1</sup> Il existe une troisième composante, le marché tertiaire, qui est celui des actifs en fin de vie (cette composante ne sera pas étudiée ici).

Finalement, les **actifs** qui s'échangent sur les **marchés** sont notamment des **actions**, des **crédits** de court terme (**trésorerie**), des **obligations**, des **devises**, des **matières premières**. Ces actifs (**titres** ou **contrats**) peuvent être échangés sous différentes formes : **transaction au comptant (spot)**, à **terme (forward)**, **option** d'achat ou de vente, **produit dérivé** complexe.

Toutefois, si les principes de base du fonctionnement des marchés financiers sont relativement simples, l'ingénierie financière contemporaine a créé et continue de créer une immense variété de produits de plus en plus complexes.

## **2- La dynamique de l'économie financière**

Un des problèmes majeurs de la finance consiste à estimer le prix d'un instrument financier. Cette évaluation est d'autant plus complexe que le produit est lui-même complexe. Cette complexité est d'autant plus relevée aujourd'hui qu'elle est soumise à la dynamique de l'économie financière et à ses crises. En effet, le phénomène de mondialisation pousse naturellement à se poser un certain nombre de questions essentielles.

***Premièrement, quels sont les piliers du développement de l'économie financière et l'unité des marchés financiers qui en résulte ?***

La dynamique de l'économie financière repose sur les « trois D » : la désintermédiation, le découisonnement et la déréglementation. A ces facteurs majeurs, l'on peut ajouter ce qu'on pourrait appeler « les économies de vitesse ».

En ce qui concerne la **désintermédiation**, l'on relève que créanciers et créditeurs s'adressent directement au marché plutôt qu'à un intermédiaire (banquier). Il en résulte une titrisation des créances ou des actifs.

– Par exemple, « *Émettre une obligation au lieu de demander un emprunt à son banquier* ».

Le banquier devient une aide ou un conseil, mais il n'est pas forcément la contrepartie. De plus, la titrisation permet de revendre le risque à d'autres acteurs pour des besoins complémentaires ou spéculateurs).

En ce qui concerne le **découisonnement** ou encore abolition des frontières (et l'ouverture conséquente des marchés nationaux), l'on assiste à un découisonnement des instruments financiers et la fin des catégorisations

d'établissements financiers. C'est ainsi que les sociétés de bourse n'ont plus le monopole des opérations sur les actions, tendance renforcée avec l'abrogation du « Glass-Steagall Act »<sup>2</sup>.

De plus, avec l'« **Innovation de produit** », on invente de nouveaux instruments financiers et on les commercialise librement. Souvent, les produits sont conçus et testés sur les marchés « de gré à gré » et finissent sur les marchés « organisés », comme par exemple le *Credit default swap* ou transfert du risque de crédit.

Pour ce qui est de la déréglementation, il convient de noter que 1971 marque la fin du système de **Gold Exchange Standard** (le dollar est indexé sur l'or et les autres devises sont indexées sur le dollar). Mais à partir des années 1980, sous la pression de la concurrence internationale et des pressions inflationnistes, ce système va être remplacé par le système de change flottant pour lequel, les devises « flottent » les unes par rapport aux autres selon l'offre et la demande.

En ce qui concerne les économies de vitesses, il s'agit de souligner l'ampleur des facteurs tels : les technologies de l'information et de la communication, le développement de l'« e-Trading », la communication entre les places financières, les mouvements de fusion ou regroupement.

La conséquence de tous ces éléments c'est l'unité des marchés financiers. Autrement dit, l'on pourrait dire qu'il y a :

- **Unité de lieu** (les différentes places financières sont interconnectées) ;
- **Unité de temps** (les échanges sont instantanés, les transactions se font 24h/24h).

---

<sup>2</sup> Le Glass-Steagall Act est une loi, passée par le Congrès américain pendant la Grande Dépression des années 1930, promulguant la séparation des activités d'investissement et des activités commerciales des banques.

La loi visait à protéger les banques commerciales, qui acceptent les dépôts des épargnants et accordent des prêts aux particuliers et aux entreprises, des risques pris par les banques d'investissement.

La loi Glass-Steagall est abrogée en 1999 sous l'administration Clinton, principalement pour permettre la naissance d'un géant de la banque : Citigroup. De nombreux experts s'accordent à dire que l'abrogation du Glass-Steagall Act a contribué à la crise financière de 2008.

***Deuxièmement, quel lien entre cette mondialisation et l'économie réelle, i.e. Comment définir le rapport échanges physiques / transactions financières ?***

Le lien entre mondialisation et économie réelle est perçu à travers deux faits stylisés.

Les marchés financiers n'attirent des transactions que parce qu'ils répondent à des besoins : ils mettent en relation offreurs et demandeurs ; ils rendent des services aux entreprises, aux épargnants et aux Etats.

Le fonctionnement actuel de l'économie est de plus en plus lié à des activités réparties dans des endroits géographiquement éloignés. Toutefois, la proportion échanges physiques / transactions uniquement financières se réduit.

**Ex.** Sur le marché des changes 1/8 en 1980 ; 1/40 en 1989, 1 /50 depuis 1995, 1/100 en 2007.

Les transactions financières dominent désormais largement : Ce sont elles qui déterminent le plus les cours.

**3- Que dire des krachs, crises et l'effet systémique ?**

Si les marchés financiers ne sont pas rationnels du point de vue de l'économie réelle, l'économie réelle finit par suivre le marché, d'où l'importance de la compréhension des crises. Le cycle de vie d'un krach boursier se présente de la manière suivante :

- 1) Hausse des cours basée sur une croissance réelle de l'économie
- 2) Effet moutonnier (investissement en masse des particuliers) et envol des cours
- 3) Endettement des investisseurs pour bénéficier de la hausse
- 4) Nouvelle qui confirme la surévaluation du marché
  - a. Vente en masse des titres ...
  - b. ... qui fait baisser les cours et
  - b. ... qui déclenche d'autres ventes

=> Le marché plonge : krach (Stock market crash)

=> La crise se propage à l'économie « réelle ».

Il existe des krachs sur tous les types de marchés. Le cas le plus fréquent c'est le marché des actions. Mais, d'autres marchés peuvent être aussi concernés, l'immobilier (Subprime), les obligations (Tulipes).

### **Typologie des crises**

La crise typique est un krach c'est-à-dire une baisse des cours. Elle se manifeste par une augmentation du risque de marché dont l'amplification se fait par mimétisme.

Mais il existe d'autres types de crise ou d'effets associés la fuite vers la qualité ou encore la crise de liquidité.

### **Quelques crises récentes**

- Crise des marchés des changes : Europe en 1992 ;
- États ne pouvant rembourser leurs dettes : emprunts russes (1918), dette mexicaine en 1994, argentine en 2000 ;
- Mars 2000 bulle de la "nouvelle économie" ;
- Crise immobilières : Crise asiatique en août 97, subprime mortgage à partir de juillet 2007 ;
- Crise de liquidité interbancaire en sept 2008 puis crise systémique mondiale.

Le trait caractéristique de ces crises, c'est leur propagation instantanée aux places boursières du monde entier et les conséquences sur l'économie réelle. Dès lors, l'on comprend l'importance de la compréhension du fonctionnement des marchés financiers. Il est également utile de comprendre celui des autres composantes que sont les marchés d'actions, les marchés d'obligations, les marchés à terme de matières premières, les marchés d'options, le choix de portefeuilles.

Toutefois, aux rappels des concepts fondamentaux de la théorie financière, doit s'ajouter la présentation des principes de choix inter temporels et de choix en

univers incertain, sur lesquels repose les questions de choix de portefeuilles, d'évaluation des actifs financiers et de partage de risque.

### **Plan du cours**

Chapitre 1 : Les choix financiers en avenir aléatoire

Chapitre 2 : Les choix de portefeuilles : le modèle de Markowitz

Chapitre 3 : Le modèle d'évaluation des actifs financiers : MEDAF

# **Chapitre 1 : Les choix financiers en avenir aléatoire**

La valeur d'un actif financier résulte de la confrontation de l'offre et de la demande. La plupart des titres rapportant des revenus aléatoires, la demande ne peut donc être expliquée sans recourir à un modèle comportement des investisseurs face au risque.

Il est important en économie de distinguer risque et incertitude. Une situation d'incertitude est celle où l'on ne peut attribuer une probabilité (subjective ou objective) aux éventualités. Il y a risque lorsqu'on peut attribuer une probabilité aux éventualités.

On ne s'intéresse dans ce chapitre et dans les suivants qu'aux situations risquées. Les cas d'incertitude relèvent d'autres types d'analyses (critère du minimax, critère d'Hurwicz, critère de Laplace, ...).

Lorsque l'investissement est certain, le critère de choix qui s'impose est celui de gain maximum. Ce critère devient non pertinent lorsqu'on est en situation de risque.

## **1- Le critère de l'espérance mathématique du gain**

D'après la théorie économique, lorsqu'on est confronté à un problème de choix en univers risqué, on peut utiliser le critère d'espérance mathématique du gain. En effet, l'attrait d'un investissement  $X$  ouvrant la perspective de gains  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  avec les probabilités  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  est intégralement mesuré par l'espérance mathématique :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

Le paradoxe de SAINT-PETERSBOURG, posé par le mathématicien Nicholas BERNOUILLI en 1728, a entraîné la remise en cause de cette approche. Le rappel de ce paradoxe n'est pas sans intérêt pour l'histoire de la pensée. Il s'agissait d'un jeu qui se déroulait avec une pièce de monnaie. Le joueur ayant choisi « Face » recevait



$2^n$  francs si « Face » apparaissait pour la première fois au  $n$ -ième lancé. Cet événement ayant une probabilité  $1/2^n$  de se produire, l'espérance mathématique de ce jeu est infinie :  $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = +\infty$ .

L'investisseur qui choisit le critère d'espérance mathématique pourra donc consacrer une somme d'argent très importante pour participer à cette loterie. Une loterie désigne toute situation caractérisée par un aléa quelconque, ce qui renvoie à tout investissement. Or peu d'entre nous sont prêts à consacrer une somme conséquente pour participer à ce jeu : c'est le paradoxe de SAINT-PETERSBOURG.

Bernouilli fait appel à la notion d'utilité pour résoudre ce paradoxe. Selon lui, les agents économiques ont une utilité marginale décroissante pour le revenu, et évaluent une loterie par l'espérance d'utilité des différentes conséquences. Ses travaux ont été complétés par ceux de VON NEUMAN et OSKAR MORGENSTERN.

## 2- Le critère d'espérance d'utilité

Les décisions de consommation et d'investissement des individus sont sans aucun doute influencées par beaucoup de facteurs. La théorie du choix d'actifs en avenir aléatoire généralement acceptée et qui sous-tend l'analyse des demandes d'actifs financiers, utilise l'hypothèse de l'espérance de l'utilité. Celle-ci trouve sa justification axiomatique avec le théorème de VON NEUMAN et MORGENSTERN (1957).

Les préférences d'un agent admettent une représentation en termes d'utilité s'il existe une fonction  $u(\bullet)$  telle que :

La variable aléatoire  $\tilde{x}$  est préférée à  $\tilde{y}$  si et seulement si  $E[u(\tilde{x})] \geq E[u(\tilde{y})]$

Où  $E[\bullet]$  est l'espérance mathématique.

VON NEUMAN et MORGENSTERN (VNM) cherchent à formuler des hypothèses sur les investisseurs en bourse. Les concepts de base de la théorie de VNM sont au nombre de trois :

- L'ensemble des possibles ou états de la nature ( $s$ )

Les états de la nature sont exclusifs les uns des autres : seul l'un d'eux survient et jamais plusieurs simultanément. On définit un événement ou une circonstance comme étant un sous-ensemble de  $(s)$ .

- L'ensemble des conséquences  $(c)$

Une conséquence est toute espèce de phénomène qui motive directement le décideur. Il s'agira toujours ici de gains pécuniaires.

- L'ensemble des actions  $(A)$

Une action est toute application  $c(a, s)$  de l'ensemble des états de la nature sur celui des conséquences.

La théorie de l'utilité résume les choix de l'individu rationnel au moyen de deux indices seulement :

Un indice qui s'applique aux conséquences que ses actions auront dans les différentes circonstances du futur : c'est l'utilité de ces conséquences ;

Un indice qui s'applique aux différentes circonstances du futur : c'est la probabilité (subjective) de ces circonstances, telle qu'elle est perçue par l'investisseur.

Une fonction d'utilité associe à chaque gain envisagé par l'individu un nombre ou indice d'utilité caractéristique de la satisfaction procurée à l'individu par le gain considéré. La théorie de l'utilité stipule que :

- L'utilité marginale de la fortune est toujours positive de sorte que l'utilité est une fonction croissante du niveau de la fortune ;
- L'utilité marginale de la fortune est décroissante : il s'agit de traduire l'idée selon laquelle on préfère certes toujours plus à moins de fortune, mais cet intérêt décroît à mesure que la fortune augmente,
- L'utilité d'une loterie est égale à l'espérance des utilités des sommes monétaires qui la composent.

Autrement dit, soit une loterie  $A$  qui rapporte la somme  $S_1$  avec une probabilité  $p$  et la somme  $S_2$  avec une probabilité  $(1-p)$  ; soit le tableau suivant :

| Revenu | Probabilité |
|--------|-------------|
| $S_1$  | $p$         |
| $S_2$  | $(1-p)$     |

Alors, on a :  $u(A) = p \cdot u(S_1) + (1-p) \cdot u(S_2)$

De façon générale, on peut représenter une loterie  $\tilde{x}$  par un vecteur  $(x_1, \dots, x_n)$  de gains monétaires  $x_i$  pour chaque état de la nature  $i=1, \dots, s$  ; et un vecteur de probabilités  $(\pi_1, \dots, \pi_s)$ , avec  $\sum_{i=1}^s \pi_i = 1$ .

Représenter le comportement rationnel d'un agent face au risque par la maximisation de  $u(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^s \pi_i \cdot u(x_i) = E[u(\tilde{x})]$ , pour une certaine fonction  $u(\bullet)$  bornée supérieurement, constitue l'hypothèse de l'espérance d'utilité.

### Règle de décision :

Si l'espérance mathématique d'utilité procurée par un investissement est supérieure au niveau d'utilité sans investissement, alors il faut investir. Par ailleurs, face à deux investissements (ou loteries), le théorème de VNM dit qu'il faut choisir celui qui procure l'espérance d'utilité la plus grande.

### Exemple

Supposons que la richesse initiale d'un investisseur est donnée par :  $W_0 = 20,5$ . Ce dernier a une fonction d'utilité de la forme  $u(W) = \sqrt{W}$ . Il est confronté au choix d'investissement suivant :

| Revenu | Probabilité |
|--------|-------------|
| 4,5    | 50%         |
| -4,5   | 50%         |

Question : Faut-il investir ?

### Solution

L'utilité courante de cet individu est de :

$$u(W_0) = \sqrt{20,5} = 4,53$$

L'espérance d'utilité de l'investissement est égal à :

$$\begin{aligned} E[u(W)] &= 0,5 \times u(W_0 + 4,5) + 0,5 \times u(W_0 - 4,5) \\ &= 0,5 \times u(20,5 + 4,5) + 0,5 \times u(20,5 - 4,5) \\ &= 0,5 \times u(25) + 0,5 \times u(16) \\ &= 4,5 \end{aligned}$$

On constate que  $E[u(W)] = 4,5 < E[u(W_0)] = 4,53$ . Autrement dit, la situation de l'investisseur se détériore s'il investit, ce qu'il n'acceptera pas. Selon le critère de l'espérance d'utilité, l'agent n'a pas intérêt à investir dans ce projet.

### 3- L'aversion au risque

En finance comme en microéconomie, on pose comme hypothèse que tout agent économique maximise une fonction d'utilité et qu'il est averse au risque. Voici quelques profils types de fonction d'utilité selon le degré d'aversion au risque de l'investisseur.

Par exemple, pour calculer l'espérance d'utilité d'un agent sur la loterie suivante :

| Revenu | Probabilité |
|--------|-------------|
| $x$    | $p$         |
| $y$    | $(1-p)$     |

On a :  $p \cdot u(x) + (1-p) \cdot u(y)$ .

Illustrons cette construction pour  $p = \frac{1}{2}$ ,

#### Figure 1.1

L'espérance d'utilité de la loterie est  $\frac{1}{2} \cdot u(x) + \frac{1}{2} \cdot u(y)$

L'utilité de la valeur espérée de la loterie est  $u\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$

Dans le cas représenté ici, l'utilité de la valeur espérée est plus grande que l'espérance d'utilité de la loterie : l'individu est averse au risque.

Par contre, si l'individu aime le risque, on a plutôt ce cas-ci :

### Figure 1.2

Enfin, si l'individu est indifférent face au risque, on :

### Figure 1.3

## 3-1- L'équivalent certain d'un investissement

Par définition de l'aversion au risque, l'investisseur préfère une somme sûre égale à  $E(W)$  à un jeu dont l'espérance de gain vaut cette somme sûre :

$$u[E(W)] > E[u(W)]$$

$$E[u(W)] = \sum_i \pi_i \cdot u(W_i) \text{ est l'espérance de l'utilité du jeu et } u[E(W)]$$

représente l'utilité d'une somme sûre égale à l'espérance de gain du jeu.

L'équivalent certain d'une loterie  $L$  est une loterie, sûre, qui procure le même niveau d'utilité que la loterie  $L$ . Il est indifférent entre recevoir le gain certain  $C$  (égal à  $E(W)$ ) et l'investissement :  $E[u(W)] = E[u(C)] = u(C)$ .

La deuxième égalité est due au fait que  $C$  n'est pas aléatoire ; cet équivalent certain est propre à chaque individu puisque dépendant de sa fonction d'utilité.

## 3-2- La prime de risque

L'aversion au risque justifie que l'investisseur demande une compensation pour placer son épargne sur un support plus risqué. La **prime de risque**, introduite

par PRATT (1964), correspond au montant que l'investisseur accepte de perdre afin de bénéficier d'un revenu sans risque. Si  $p$  désigne cette prime, elle est égale à l'écart entre l'espérance de gain et l'équivalent certain  $C$  :

$$p = E(W) - C$$

Le tableau suivant récapitule, pour un investisseur, l'attitude face au risque, la forme de sa fonction d'utilité et la prime de risque.

| Attitude face au risque     | Forme de la fonction d'utilité | Prime de risque |
|-----------------------------|--------------------------------|-----------------|
| Aversion pour le risque     | Concave                        | $> 0$           |
| Indifférence pour le risque | Croissante et linéaire         | $= 0$           |
| Préférence pour le risque   | Convexe                        | $< 0$           |

### Exemple

Un agent économique a une fonction d'utilité de VNM :  $u(W) = 5\log(W) + 1996$

Où  $W$  mesure le gain. Il est confronté à la loterie suivante : si pile  $W = 36$  ; si face  $W = 100$ . Sa richesse initiale est égale à 70.

1. Déterminer l'équivalent certain de la loterie
2. En déduire la prime de risque de la loterie.

Solution

1/ Soit  $C$  l'équivalent certain de la loterie. Par définition,  $E[u(W)] = u(C)$ .

Par ailleurs, la probabilité d'obtenir pile est de  $\frac{1}{2}$ . Il en est de même pour face. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 E[u(W)] &= 0,5u(36) + 0,5u(100) \\
 &= 0,5[5\log(36) + 1996] + 0,5[5\log(100) + 1996] \\
 &= 0,5(5 \times 3,583518938 + 1996) + 0,5(5 \times 4,605170186 + 1996) \\
 &= 2016,47
 \end{aligned}$$

Ainsi, on doit avoir  $C$  tel que :

$$\begin{aligned}
 u(C) &= 2016,47 \Leftrightarrow 5\log C + 1996 = 2016,47 \\
 \Leftrightarrow \log C &= \frac{2016,47 - 1996}{5} = 4,094 \\
 \Rightarrow C &= e^{4,094} = 59,979
 \end{aligned}$$

L'équivalent certain de cette loterie est gal à 59,979. Le joueur est donc indifférent entre recevoir le gain certain de 59,979 et participer à la loterie.

2/ L'espérance de gain est donnée par :

$$E(W) = 0,5 \times 36 + 0,5 \times 100 = 68$$

Si  $p$  désigne la prime de risque, on a par définition :  $p = E(W) - C$ ,

$$\text{Soit } p = 68 - 59,979 = 8,021$$

La prime de risque étant positive, l'on peut dire que l'individu est averse au risque.

### 3-2- La variance comme mesure du risque

La variance (ou écart-type) est une mesure courante de la dispersion d'une distribution de probabilité. Le critère retenu étant celui de la maximisation de l'utilité, l'écart-type est une bonne mesure du risque si son augmentation entraîne une réduction de l'utilité dans le cas d'individus averses au risque. Ainsi donc, la dispersion étant une caractéristique indésirable pour un individu qui a de l'aversion au risque, une fonction d'utilité adéquate doit par conséquent posséder les deux caractéristiques suivantes :

$$u(W) = f[E(W), \sigma^2(W)], \text{ avec } f'_{E(W)} > 0 \text{ et } f'_{\sigma^2} < 0$$

Cette fonction d'utilité peut se réécrire dans le plan Espérance-Variance :

$$u(W) = f[E(W), \sigma(W)] \Rightarrow E(W) = g[\bar{u}, \sigma(W)]$$

Avec  $\bar{u}$  un niveau donné de  $u$ . Adopter une telle fonction d'utilité c'est admettre que les choix de l'investisseur obéissent au critère d'espérance-variance. Cela n'est vrai que dans deux cas :

Lorsque les distributions de probabilité des rendements des projets suivent une loi normale celle-ci étant entièrement définie par ses deux premiers moments, l'espérance et la variance.

Lorsque les fonctions d'utilité sont quadratiques :  $u = aW^2 + bW + c$ .

### Figure 1.4 : carte d'indifférence dans le plan E-V

### 3-3- Les mesures de risque d'ARROW-PRATT

Ces mesures permettent de dire que tel individu aime plus le risque que tel autre. Il en existe deux sortes :

Il est clair qu'un individu ne jouera jamais à une loterie non biaisée (une loterie qui offre une probabilité de 50% de gagner un franc ou une probabilité de 50% de perdre un franc (gain espéré = 0)).

Combien cet individu serait - prêt à payer pour ne pas participer à cette loterie de gain égal à plus ou moins  $h$  ? Cette question peut être abordée dans le domaine des assurances. Le montant qu'il est prêt à payer  $p$  est la prime d'assurance. Si l'individu, disposant de richesse égale à  $W$ , est indifférent on a :

$$u(W - p) = \frac{1}{2}u(W + h) + \frac{1}{2}u(W - h)$$

Ou encore

$$u(W - p) = E[u(W + h)] \quad (1)$$

En utilisant le développement de TAYLOR, le membre de gauche de l'équation (1) s'écrit :

$$u(W - p) \approx u(W) - pu'(W) \quad (2)$$

Comme  $p$  est petit comparé à la richesse  $W$  nous pouvons ignorer le second ordre et plus. Le membre de gauche de (1) donne :

$$\begin{aligned} E[u(W + h)] &\approx u(W) + E[h]u'(W) + \frac{1}{2}E[h^2]u''(W) \\ &\approx u(W) + E[h]u'(W) + \frac{1}{2}\text{Var}[h]u''(W) \end{aligned} \quad (3)$$

En égalisant (2) et (3), il vient :

$$u(W) - pu'(W) = u(W) + \frac{1}{2}\text{Var}[h]u''(W) ; \text{ puis que } E[h] = 0$$

$$\text{D'où : } p = \frac{1}{2}\text{Var}[h] \left[ -\frac{u''(W)}{u'(W)} \right]$$

En d'autres termes,

$$\text{Prime de risque} = \frac{1}{2} \times \text{Variance du gain} \times \text{ARA}$$



Cette prime peut être considérée comme le prix du risque.

Le coefficient d'aversion absolue vis-à-vis du risque ARA (*Absolute Risk Aversion*) est défini comme :

$$ARA = \left[ -\frac{u''(W)}{u'(W)} \right]$$

On suppose que l'ARA décroît lorsque la fortune s'accroît : un pari de 50 000 FCFA peut paraître sans importance pour un richissime mais lourd de conséquences pour le commun des mortels.

On préfère souvent le coefficient d'aversion relative vis-à-vis du risque, RRA (*Relative Risk Aversion*) défini comme :

$$RRA = \left[ -W \frac{u''(W)}{u'(W)} \right]$$

On constate que RRA est constant : l'individu présentera un même degré d'aversion au risque pour des pertes de même proportion par rapport à la fortune initiale même si la perte est croissante en termes absolus.

### 3-3- La dominance stochastique

Comment classer deux projets X et Y aux conséquences aléatoires ?

Nous avons vu que pour un investisseur donné, X sera préféré à Y si l'espérance d'utilité  $E[u(X)]$  est plus grande que  $E[u(Y)]$ . Cependant, comment faire ce classement si l'utilité n'est pas connue ou observable ? La théorie de la dominance stochastique a pour objet de répondre précisément à cette question.

Cette approche détermine des critères de comparaison entre actifs financiers à partir d'hypothèses minimales sur la fonction d'utilité des agents.

L'objectif de la dominance stochastique est de rechercher les caractéristiques statistiques des actifs qui permettent de les classer connaissant des propriétés générales de la fonction d'utilité des agents. On distingue trois types de dominances.

### **a) Dominance du premier ordre**

La dominance stochastique du premier ordre fait l'hypothèse, très peu restrictive, que les agents préfèrent être riches que pauvres. La démarche consiste à comparer les fonctions de répartition.

Soit  $u(X)$  l'utilité de  $X$  et deux fonctions de répartition  $F$  et  $G$ .

$F$  domine  $G$  au premier ordre si :

$u'(X) > 0$ , ce qui signifie que la satisfaction est croissante avec la richesse ;

$F(X) \leq G(X)$  pour tout  $X$ , avec une inégalité stricte pour au moins un  $X$ .

La courbe de répartition de  $F$  est toujours sous la courbe de répartition de  $G$ .

### **b) Dominance de second ordre**

Il faut ajouter à l'hypothèse précédente celle d'aversion au risque des investisseurs.  $F$  domine  $G$  au second ordre si :

$u'(X) > 0$ , ce qui signifie que la satisfaction est croissante avec la richesse ;

$u''(X) < 0$ , l'agent est averse au risque ;

$\int_{-\infty}^x [G(t) - F(t)] dt \geq 0$  pour tout  $X$ , avec une inégalité stricte pour au moins un  $X$ .

### **c) Dominance du troisième**

$F$  domine  $G$  au troisième si :

$u'(X) > 0$ , ce qui signifie que la satisfaction est croissante avec la richesse ;

$u''(X) < 0$ , l'agent est averse au risque ;

$u'''(X) > 0$  ; l'aversion absolue est décroissante ;

$\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^v [G(t) - F(t)] dt dv \geq 0$  pour tout  $X$ , avec une inégalité stricte pour au moins un  $X$ .

## **Chapitre 2 : Le choix de portefeuilles**

Le portefeuille choisi aujourd'hui génère demain une richesse qui est aléatoire. De ce fait, choisir la composition d'un portefeuille est de même nature que choisir une loterie dans le cadre de la théorie de Von Neumann et Morgenstern.

La théorie des choix de portefeuille que nous allons exposer, mise en lumière pour la première fois par Harry Markowitz (1952), reprend à son compte tous les axiomes de Von Neumann et Morgenstern. Le théorème de l'espérance de l'utilité permet alors d'affirmer que **l'investisseur constitue son portefeuille de façon à maximiser l'espérance d'utilité de la richesse future qui résultera de ce portefeuille.**

Le modèle de Markowitz, qui fonde la gestion de portefeuille (moyenne-variance), fait l'hypothèse que les agents sont rationnels, ont de l'aversion pour le risque et adopte le critère *espérance-variance*. Pour comparer et sélectionner les titres, ils mettent en balance l'intérêt que ces titres procurent avec le risque qu'ils font subir. L'intérêt des titres est exprimé par l'espérance de ses rendements et le risque par la variance. L'agent essaie d'obtenir un rendement maximum pour un risque minimum.

L'objectif principal de ce chapitre est de déterminer les combinaisons optimales de titres dans un portefeuille. La procédure est décomposée en deux étapes.

**Dans la première étape**, il s'agit de déterminer les meilleurs portefeuilles possibles sans tenir compte du point de vue d'un investisseur. Ces portefeuilles sont ceux qui, pour une espérance donnée, offrent le moins de risque. L'ensemble de ces portefeuilles constitue **la frontière efficiente**.

**Dans la seconde étape**, l'investisseur choisit parmi tous les portefeuilles efficients celui qui maximise sa satisfaction. Son choix est essentiellement fonction de son **degré d'aversion pour le risque**.

Plus techniquement, il s'agit de calculer les proportions de la richesse de l'agent à investir dans chaque titre, connaissant les espérances et l'ensemble des variances et des covariances entre les titres.

Pour cela, les thèmes suivants seront abordés : les paramètres statistiques utilisés, la diversification, les hypothèses du modèle de Markowitz, le cas deux actifs risqués, le cas d'un actif sans risque, cas d'un nombre quelconque d'actifs, les modèles de calcul de la frontière efficiente, les critères alternatifs de choix d'actifs, la gestion des risques et le VaR.

## 2-1- Les paramètres statistiques utilisés

Ces paramètres sont constitués des indicateurs de tendance centrale et les indicateurs de dispersion :

- La moyenne<sup>3</sup>
- La variance<sup>4</sup>
- La covariance<sup>5</sup>
- Le coefficient de corrélation<sup>6</sup>

## 2-2- La diversification

La diversification permet la réduction du niveau de risque d'un portefeuille. Cette réduction est assurée par le fait que les titres risqués ne connaissent pas des évolutions de cours parfaitement et positivement corrélées.

La *diversification naïve* est le fait d'accroître le nombre d'actifs entrant dans le portefeuille, par exemple en le choisissant au hasard. Les caractéristiques des titres n'interviennent pas dans leur inclusion.

### 2-2-1- Diversification et taille du portefeuille

---

<sup>3</sup> Caractéristique de tendance centrale.

<sup>4</sup> Mesure la dispersion : c'est la moyenne des écarts par rapport à la moyenne.

<sup>5</sup> C'est une mesure de la variation simultanée de deux variables aléatoires. C'est à dire elle devient positive pour chaque couple de valeurs qui diffèrent de leur moyenne dans le même sens, et plus négative pour chaque couple de valeurs qui diffèrent de leur moyenne dans le sens opposé.

<sup>6</sup> C'est un coefficient statistique qui permet de mettre en évidence une liaison entre deux variables aléatoires. Compris entre -1 et 1, il donne l'ampleur et le sens de cette liaison, mais ne donne aucune information sur la liaison de cause à effet.

Comment évolue la valeur de la variance du taux de rentabilité d'un portefeuille lorsque le nombre de titres en portefeuille augmente indéfiniment ?

Considérons un portefeuille équipondéré composé de  $N$  titres (chaque part est égale à  $\frac{1}{N}$ ). La formule de la variance devient :

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij}$$

En distinguant les variances et les covariances, il vient :

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_{ii} + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sigma_{ij}$$

Soit  $V = \max_i \sigma_{ii}$ , la plus grande des variances, la majoration suivante est vraie :

$$\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_{ii} \leq \frac{VN}{N^2} = \frac{V}{N}$$

Le rapport  $\frac{V}{N}$  tend vers 0 quand le nombre de titres dans le portefeuille tend vers l'infini.

Soit  $\bar{\sigma}_{ij}$  la covariance moyenne entre les actifs, la somme pondérée des covariances devient :

$$\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sigma_{ij} = \frac{N^2 - 1}{N^2} \bar{\sigma}_{ij} = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \bar{\sigma}_{ij}$$

La somme pondérée des covariances tend vers la covariance moyenne quand le nombre de titre dans le portefeuille s'accroît.

***Au total, le risque du portefeuille diminue quand le nombre de titres augmente, il tend asymptotiquement vers la covariance moyenne.***

Ce résultat a peu d'utilité pour le gestionnaire de portefeuille qui se pose des questions plus concrètes :

- Une diversification permet d'éliminer quel pourcentage de la variance d'un portefeuille constitué d'un titre isolé ?
- Avec combien de titres élimine-t-on par exemple 90% du risque qu'il est possible d'éliminer par la diversification ?

La controverse demeure sur le nombre effectif de titres nécessaires à une bonne diversification.

Si les corrélations entre les évolutions boursières d'un pays à l'autre sont inférieures à l'unité, l'inclusion des titres cotés sur différents pays doit permettre une réduction plus efficace du risque par l'effet de la diversification internationale.

#### 2-2-2- Contribution d'un titre au risque global du portefeuille

La rentabilité espérée et la variance d'un portefeuille peuvent se décomposer comme suit :

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(R_i) \quad (2.1)$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \left[ \sum_{j=1}^N \alpha_j \sigma_{ij} \right] \quad (2.2)$$

Selon l'équation (2.1), la contribution du titre  $i$  à la rentabilité espérée du portefeuille est :

$$\alpha_i E(R_i)$$

La rentabilité peut être considérée comme une moyenne pondérée des rentabilités des titres individuels, les poids étant les parts de ces titres dans le portefeuille.

D'après l'équation (2.2), la variance de la rentabilité du portefeuille est la somme des  $N$  termes :

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \left[ \sum_{j=1}^N \alpha_j \sigma_{ij} \right] \quad i = 1, \dots, N \quad (2.3)$$

Chacun de ces  $N$  termes représente la contribution du titre  $i$  à la variance, et donc au risque du portefeuille. Toutefois, il est habituel de représenter la contribution du titre  $i$  au risque du portefeuille par le terme entre crochets de l'équation (2.3) :

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \sigma_{ij} \quad i = 1, \dots, N \quad (2.4)$$

La contribution de chaque actif  $i$  au risque du portefeuille dépend de la covariance des taux de rentabilité des différents titres. Le risque global du portefeuille est donc la somme pondérée des contributions au risque de chaque actif. La contribution au risque global d'un actif n'est pas seulement due à sa variance, mais est une fonction de toutes les covariances de cet actif avec les titres du portefeuille et aussi de la structure de ce portefeuille (les parts d'actifs).

## 2-3- Les hypothèses du modèle de Markowitz (1952)

**H1** : Tout investissement est une décision prise dans une situation de risque.

**H2** : Le comportement de tous les investisseurs est caractérisé par un degré plus ou moins prononcé d'aversion au risque. Le risque est mesuré par l'écart-type des taux de rentabilité des actifs.

**H3** : Les investisseurs sont rationnels : ils opèrent des choix transitifs bien que leur fonction d'utilité soit purement subjective.

**H4** : Le marché est parfait ou efficient (atomisation des agents, information libre et gratuite, divisibilité des titres).

## 2-4- Gestion de portefeuille dans le cas de deux actifs risqués

Considérons le problème d'investissement suivant. Un individu veut consacrer la totalité de sa richesse à l'achat de deux actions (actifs risqués par excellence)  $A$  et  $B$ . Appelons  $R_A$  le taux de rentabilité de l'action  $A$  et  $R_B$  le taux de rentabilité de l'action  $B$ .

Le taux de rentabilité  $R_t$  à la période  $t$  est défini par :

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1} + Y_t}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 + \frac{Y_t}{P_{t-1}}$$

Où  $Y$  étant le revenu tiré de la détention pendant  $t$  de l'actif et  $P$  son prix (exemple de l'arbre et de ses fruits). Le taux de rentabilité étant une grandeur sans unité, il permet de comparer directement des investissements de différente nature.

La quantité  $\frac{P_t}{P_{t-1}}$  représente la plus-value relative et la quantité  $\frac{Y_t}{P_{t-1}}$  le taux de rendement.

$R_A$  et  $R_B$  peuvent être considérés comme des variables aléatoires puisqu'ils ne sont réalisés qu'à l'horizon de l'investissement. Nous supposons en outre qu'ils suivent une loi normale. Nous avons les deux premiers moments des distributions des taux de rentabilité :

$$\begin{aligned}\mu_A &= E(R_A) \quad , \quad \sigma_A^2 = Var(R_A) \\ \mu_B &= E(R_B) \quad , \quad \sigma_B^2 = Var(R_B) \\ \sigma_{AB} &= Cov(R_A, R_B) = E[(R_A - \mu_A)(R_B - \mu_B)]\end{aligned}$$

Nous supposons que ces variables sont données (exogènes). On pourrait bien sûr se demander comment elles sont obtenues. Une possibilité est de les estimer à partir des observations des taux de rentabilité. On peut également supposer que ce sont des estimations subjectives. Puisque l'investissement est aléatoire, la réalisation des taux de rentabilité peut différer des valeurs que nous aurons anticipées. La



variance mesure cette incertitude. Comme l'avons vu, on peut considérer que c'est une mesure de risque associé à l'investissement.

La covariance  $\sigma_{AB}$  mesure la direction de la liaison linéaire entre  $R_A$  et  $R_B$ .

Le coefficient de corrélation  $\rho_{AB} = \frac{Cov(R_A, R_B)}{\sigma_A \sigma_B}$  mesure *la direction et la force de la liaison linéaire* entre  $R_A$  et  $R_B$ .

Soient  $\alpha_A$  et  $\alpha_B$  les parts consacrées respectivement à l'actif  $A$  et à l'actif  $B$ . Comme toute la richesse est consacrée à l'achat de ces deux actifs, nous avons :

$$\alpha_A + \alpha_B = 1$$

L'investissement de l'individu dans les deux actifs forme ce qu'on appelle un portefeuille,  $\alpha_A$  et  $\alpha_B$  sont appelés les parts dans le portefeuille d'actifs  $A$  et  $B$ . toutefois, on appelle portefeuille simplement le vecteur  $(\alpha_A, \alpha_B)$ .

Le taux de rentabilité du portefeuille est également une variable aléatoire :

$$R_p = \alpha_A \times R_A + \alpha_B \times R_B$$

D'où :

$$\mu_p = E(R_p) = E(\alpha_A \times R_A + \alpha_B \times R_B) = \alpha_A E(R_A) + \alpha_B E(R_B) = \alpha_A \mu_A + \alpha_B \mu_B$$

De même,

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= Var(R_p) = Var(\alpha_A \times R_A + \alpha_B \times R_B) \\ &= E[(\alpha_A R_A + \alpha_B R_B) - E(\alpha_A R_A + \alpha_B R_B)]^2 \\ &= E[\alpha_A (R_A - \mu_A) + \alpha_B (R_B - \mu_B)]^2 \\ &= E[\alpha_A^2 (R_A - \mu_A)^2 + \alpha_B^2 (R_B - \mu_B)^2 + 2\alpha_A \alpha_B (R_A - \mu_A)(R_B - \mu_B)] \\ &= \alpha_A^2 E[(R_A - \mu_A)^2] + \alpha_B^2 E[(R_B - \mu_B)^2] + 2\alpha_A \alpha_B E[(R_A - \mu_A)(R_B - \mu_B)] \\ &= \alpha_A^2 \sigma_A^2 + \alpha_B^2 \sigma_B^2 + 2\alpha_A \alpha_B \sigma_{AB} \end{aligned}$$

Si l'on utilise plutôt le coefficient de corrélation, on a :

$$\sigma_p^2 = \alpha_A^2 \sigma_A^2 + \alpha_B^2 \sigma_B^2 + 2\alpha_A \alpha_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}$$

Comme il y a deux actifs, on a :

$$\alpha_A + \alpha_B = 1 \Rightarrow \alpha_B = 1 - \alpha_A$$

D'où :

$$\mu_p = \alpha_A \mu_A + (1 - \alpha_A) \mu_B = \alpha_A (\mu_A - \mu_B) + \mu_B$$

$$\sigma_p^2 = \alpha_A^2 \sigma_A^2 + (1 - \alpha_A)^2 \sigma_B^2 + 2\alpha_A (1 - \alpha_A) \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}$$

Ou encore :

$$\sigma_p^2 = \alpha_A^2 \sigma_A^2 + (1 - \alpha_A)^2 \sigma_B^2 + 2\alpha_A (1 - \alpha_A) \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}$$

2-4-1- Portefeuille de variance minimale

De l'expression :  $\mu_p = \alpha_A (\mu_A - \mu_B) + \mu_B$ , on peut tirer  $\alpha_A$  :

$$\alpha_A = \frac{\mu_p - \mu_B}{\mu_A - \mu_B}$$

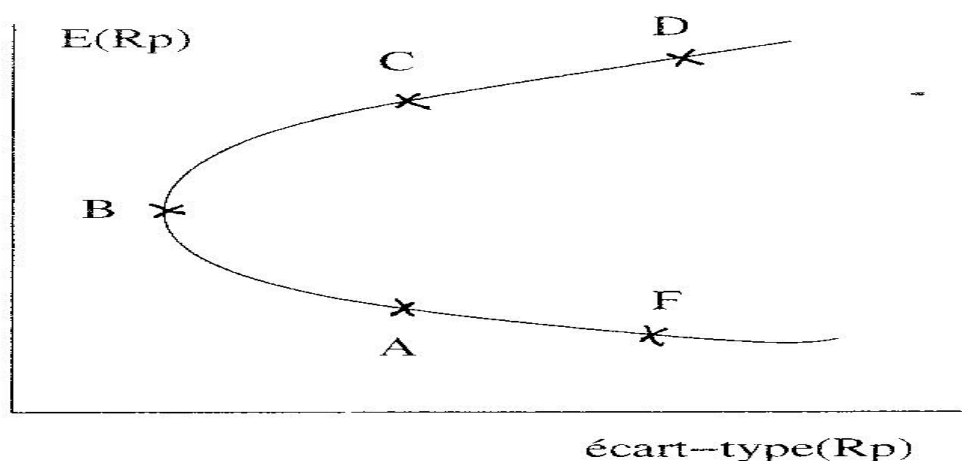
D'autre part :

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \alpha_A^2 \sigma_A^2 + (1 - \alpha_A)^2 \sigma_B^2 + 2\alpha_A (1 - \alpha_A) \sigma_A \sigma_B \rho_{AB} \\ &= \alpha_A^2 \sigma_A^2 + (1 - 2\alpha_A + \alpha_A^2) \sigma_B^2 + 2\alpha_A \sigma_A \sigma_B \rho_{AB} - 2\alpha_A^2 \sigma_A \sigma_B \rho_{AB} \\ &= \alpha_A^2 (\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{AB}) + 2\alpha_A (\sigma_A \sigma_B \rho_{AB} - \sigma_B^2) + \sigma_B^2 \end{aligned}$$

En reportant l'expression de  $\alpha_A$  ci-dessus dans celle de  $\sigma_p^2$ , il vient :

$$\sigma_p^2 = \left( \frac{\mu_p - \mu_B}{\mu_A - \mu_B} \right)^2 (\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}) + 2 \left( \frac{\mu_p - \mu_B}{\mu_A - \mu_B} \right) (\sigma_A\sigma_B\rho_{AB} - \sigma_B^2) + \sigma_B^2$$

Cette relation qui lie la variance (ou l'écart-type) du portefeuille  $\sigma_p^2$  et le rendement espéré du portefeuille  $\mu_p$  constitue la **frontière (ou enveloppe) de l'ensemble des portefeuilles possibles**. L'on peut en faire une représentation graphique, dans le plan  $(\mu_p, \sigma_p)$ .



**Graphique 2.1. Frontière de l'ensemble des portefeuilles possibles.**

On peut remarquer que le portefeuille  $B$  est, de tous les portefeuilles possibles, celui qui présente l'écart-type (et donc le risque) le plus faible. Ce portefeuille est appelé **portefeuille de variance minimale (PVM)**. Il est déterminé algébriquement en résolvant le programme d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \text{Min}_{\alpha_A, \alpha_B} & \sigma_p^2 = \alpha_A^2 \sigma_A^2 + \alpha_B^2 \sigma_B^2 + 2\alpha_A \alpha_B \sigma_{AB} \\ \text{s.c.} & \alpha_A + \alpha_B = 1 \end{cases}$$

En intégrant le fait que  $\alpha_A + \alpha_B = 1 \Rightarrow \alpha_B = 1 - \alpha_A$ , alors le programme devient :

$$\underset{\alpha_A}{Min} \quad \sigma_p^2 = \alpha_A^2 \sigma_A^2 + (1 - \alpha_A)^2 \sigma_B^2 + 2\alpha_A(1 - \alpha_A)\sigma_{AB}$$

La condition de premier ordre :

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial \alpha_A} = 0 \Leftrightarrow 2\alpha_A^* \sigma_A^2 - 2(1 - \alpha_A^*) \sigma_B^2 + 2\sigma_{AB}(1 - 2\alpha_A^*) = 0$$

D'où :

$$\begin{cases} \alpha_A^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{AB}} \\ \alpha_B^* = 1 - \alpha_A^* \end{cases}$$

#### 2-4-2- Portefeuille efficient

Hypothèse du comportement du modèle de Markowitz : l'investisseur souhaite bénéficier d'une espérance de rentabilité la plus élevée pour un niveau de risque donné, ou à l'inverse, un niveau de risque le plus faible pour une espérance de rentabilité donnée.

Considérons à nouveau la courbe du graphique ci-dessous ; les portefeuilles  $A$  et  $F$  ont même espérance de rendement, mais  $A$  a un risque plus faible : le portefeuille  $A$  sera préféré à  $F$ . Le portefeuille  $C$  offre pour le même niveau de risque que  $A$  un rendement attendu plus élevé :  $C$  sera préféré à  $A$ .

Ainsi donc, seule la partie supérieure ( $BCD$ ) de la courbe sera choisie. Cette portion supérieure est appelée **frontière efficiente**.

C'est le lieu des portefeuilles qui maximisent le rendement espéré pour chaque niveau de risque (ou le lieu de portefeuille qui minimisent le risque pour chaque niveau de rendement). De tels portefeuilles sont qualifiés de **portefeuilles efficients**.

La frontière efficiente permet de savoir quels sont les meilleurs gains que l'investisseur peut attendre compte tenu du niveau de risque qu'il a choisi.

Le portefeuille efficient est déterminé algébriquement par la résolution du programme de l'investisseur suivant :

$$\begin{cases} \underset{\alpha_A, \alpha_B}{Min} & \sigma_p^2 \\ s.c. & \begin{cases} \bar{\mu}_p = \alpha_A \mu_A + \alpha_B \mu_B \\ \alpha_A + \alpha_B = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Où  $\bar{\mu}_p$  est la valeur cible de  $\mu_p$ .

De façon équivalente, nous avons le programme suivant :

$$\begin{cases} \underset{\alpha_A, \alpha_B}{Max} & \mu_p = \alpha_A \mu_A + \alpha_B \mu_B \\ s.c. & \begin{cases} \bar{\sigma}_p^2 = \sigma_p^2 \\ \alpha_A + \alpha_B = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Où  $\bar{\sigma}_p^2$  est la valeur cible de  $\sigma_p^2$ .

En général, c'est le 1<sup>er</sup> programme qui est naturellement envisagé : l'investisseur se fixe un rendement à atteindre et détermine le programme qui minimise le risque.

Nous pouvons à présent énoncer le théorème de séparation de **Black**, qui repose sur une propriété fondamentale de la frontière efficiente de Markowitz :

**Théorème 2.4.1 :** Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux portefeuilles efficients de rendement  $\mu_1$  et  $\mu_2$  avec  $\mu_1 \neq \mu_2$ .

- 1- Toute combinaison linéaire convexe de portefeuilles efficients, par exemple  $P_1$  et  $P_2$ , est également un portefeuille efficient :  $\alpha P_1 + (1-\alpha) P_2$  ;  $\alpha \in R$  ;
- 2- Tous les portefeuilles efficients peuvent s'écrire sous la forme de combinaison linéaire de deux portefeuilles efficients choisis arbitrairement.

*En d'autres termes, ayant deux portefeuilles efficaces, il suffit de faire varier  $\alpha$  pour connaître toute la frontière efficiente.*

La frontière efficiente ne décrit pas le choix ultime de l'investisseur. Tout au plus, représente-t-elle une contrainte pour lui. De tous les portefeuilles efficaces possibles, l'investisseur choisira celui qui sera en accord avec sa fonction d'utilité, c'est-à-dire son degré d'aversion pour le risque. L'investisseur choisira le portefeuille situé au point de tangence entre sa courbe d'utilité et la frontière efficiente.

### **Exemple 2.4.2**

On considère un marché sur lequel existe deux titres risqués  $A$  et  $B$ . Les anticipations concernant ces deux titres sont les suivantes :

$$E(R_A) = 20\% \quad ; \quad \sigma(R_A) = 14,15\%$$

$$E(R_B) = 30\% \quad ; \quad \sigma(R_B) = 24,50\%$$

$$Cov(R_A, R_B) = 0,01$$

1. Déterminer le portefeuille  $P$  de risque minimum que l'on peut obtenir en combinant  $A$  et  $B$  ;
2. Déterminer le rendement espéré et le risque de portefeuille ainsi constitué ;
3. Déterminer l'équation de la frontière efficiente ;
4. Construire la courbe enveloppe.

### **Solution :**

1/ Soient  $\alpha_A$  et  $\alpha_B$  les parts des titres  $A$  et  $B$  dans le portefeuille.

$$R_p = \alpha_A R_A + \alpha_B R_B = \alpha_A R_A + (1 - \alpha_A) R_B$$

$$\begin{aligned} \mu_p = E(R_p) &= \alpha_A E(R_A) + (1 - \alpha_A) E(R_B) \\ &= \alpha_A [E(R_A) - E(R_B)] + E(R_B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= \sigma^2(R_p) = \alpha_A^2 \sigma^2(R_A) + (1 - \alpha_A)^2 \sigma^2(R_B) + 2\alpha_A(1 - \alpha_A) \text{Cov}(R_A, R_B) \\ &= \alpha_A^2 [\sigma^2(R_A) + \sigma^2(R_B) - 2\text{Cov}(R_A, R_B)] + 2\alpha_A \text{Cov}(R_A, R_B) - \sigma^2(R_B) + \sigma^2(R_B)\end{aligned}$$

Le portefeuille de variance minimum est obtenu en résolvant le programme suivant :

$$\underset{\alpha_A}{\text{Min}} \quad \sigma_p^2 = \alpha_A^2 [\sigma^2(R_A) + \sigma^2(R_B) - 2\text{Cov}(R_A, R_B)] + 2\alpha_A [\text{Cov}(R_A, R_B) - \sigma^2(R_B)] + \sigma^2(R_B)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial \alpha_A} = 0 &\Leftrightarrow 2\alpha_A [\sigma^2(R_A) + \sigma^2(R_B) - 2\text{Cov}(R_A, R_B)] + 2[\text{Cov}(R_A, R_B) - \sigma^2(R_B)] = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_A^* = \frac{\sigma^2(R_B) - \text{Cov}(R_A, R_B)}{\sigma^2(R_A) + \sigma^2(R_B) - 2\text{Cov}(R_A, R_B)} \\ \alpha_B^* = 1 - \alpha_A^* \end{cases}\end{aligned}$$

Application numérique :

$$\begin{cases} \alpha_A^* = \frac{0,06 - 0,01}{0,02 + 0,06 - 2 \times 0,01} = \frac{5}{6} \\ \alpha_B^* = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

2/ Soient  $\mu_p$  et  $\sigma_p^2$  respectivement le rendement espéré et la variance du portefeuille de risque minimum. Leurs valeurs sont données par :

$$\mu_p = E(R_p) = \frac{5}{6} \times 0,2 + \frac{1}{6} \times 0,3 = 0,217 = 21,7\%$$

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 [0,02 + 0,06 - 2 \times 0,01] + 2 \times \frac{5}{6} [0,01 - 0,06] + 0,06 = 0,01833$$

3/ L'équation de la frontière efficiente est donnée par :

$$\sigma_p^2 = \left( \frac{\mu_p - \mu_B}{\mu_A - \mu_B} \right)^2 (\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{AB}) + 2 \left( \frac{\mu_p - \mu_B}{\mu_A - \mu_B} \right) (\sigma_A \sigma_B \rho_{AB} - \sigma_B^2) + \sigma_B^2$$

L'on peut la réécrire en utilisant la covariance en lieu et place de la corrélation, soit :

$$\sigma_p^2 = \left( \frac{\mu_p - \mu_B}{\mu_A - \mu_B} \right)^2 (\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{AB}) + 2 \left( \frac{\mu_p - \mu_B}{\mu_A - \mu_B} \right) (\sigma_{AB} - \sigma_B^2) + \sigma_B^2$$

Application numérique :

$$\sigma_p^2 = \left( \frac{\mu_p - 0,3}{0,2 - 0,3} \right)^2 (0,02 + 0,06 - 2 \times 0,01) + 2 \left( \frac{\mu_p - 0,3}{0,2 - 0,3} \right) (0,01 - 0,06) + 0,06$$

$$\Leftrightarrow \sigma_p^2 = \left( \frac{\mu_p - 0,3}{-0,1} \right)^2 (0,06) + 2 \left( \frac{\mu_p - 0,3}{-0,1} \right) (-0,05) + 0,06$$

$$\Leftrightarrow \sigma_p^2 = \frac{\mu_p^2 - 0,6\mu_p + 0,09}{0,01} \times 0,06 - 2 \times \frac{0,05\mu_p - 0,015}{-0,1} + 0,06$$

$$\Leftrightarrow \sigma_p^2 = \frac{0,06\mu_p^2 - 0,036\mu_p + 0,0054}{0,01} + \frac{0,1\mu_p - 0,03}{0,1} + 0,06$$

$$\Leftrightarrow \sigma_p^2 = 6\mu_p^2 - 3,6\mu_p + 0,54 + \mu_p - 0,3 + 0,06$$

$$\Leftrightarrow \sigma_p^2 = 6\mu_p^2 - 2,6\mu_p + 0,3$$

Elle peut être réécrite dans la forme suivante :

$$\sigma_p = \sqrt{6\mu_p^2 - 2,6\mu_p + 0,3}$$



4/ Construction de la courbe enveloppe.

La représentation graphique, dans le plan  $(\mu_p, \sigma_p)$ . Pour cela les données suivantes sont nécessaires :

$$\mu_p = 0,2\alpha_A + 0,3(1 - \alpha_A)$$

$$\sigma_p = \sqrt{6\mu_p^2 - 2,6\mu_p + 0,3}$$

En faisant varier  $\alpha_A$  de 0 à 1, par pas de 5% par exemple, on obtient divers couples  $(\mu_p, \sigma_p)$  qu'on peut représenter graphiquement. Le graphique ainsi obtenu est la courbe enveloppe.

## 2-5- Gestion de portefeuille avec un actif sans risque

Un actif sans risque est un titre dont le rendement sur la période est connu avec certitude. Son taux de rentabilité est alors le taux d'intérêt sans risque. Ici, l'actif sans risque est équivalent à une obligation sans défaut de paiement dont la maturité coïncide avec l'horizon de l'investissement. Le taux d'intérêt sans risque est alors le taux de rentabilité de l'obligation, en l'absence d'inflation.

Par exemple, si l'horizon de notre investissement est d'un mois, alors l'actif sans risque peut être un bon du Trésor à 30 jours et le taux d'intérêt sans risque le taux de rentabilité nominale de ce bon.

Nous supposons que si notre détention de l'actif sans risque est *positive*, alors nous prêtons de l'argent au taux d'intérêt sans risque et si la détention est *négative*, nous empruntons de l'argent à ce même taux.

### 2-5-1- Le cas d'un actif risqué et d'un actif sans risque

Soit  $R_f$  le taux d'intérêt sans risque et  $R$  le taux de rentabilité de l'actif risqué. Nous avons :

$$\begin{aligned}
E(R_F) &= R_F, & E(R) &= \mu_R \\
\text{Var}(R_F) &= 0, & \text{Var}(R) &= \sigma_R^2 \\
\text{Cov}(R, R_F) &= \sigma_{RF} = 0
\end{aligned}$$

Si  $\alpha$  désigne la part de l'actif risqué, le taux de rentabilité anticipé d'un portefeuille  $P$  composé d'un actif risqué et d'un actif sans risque est :

$$R_p = \alpha R + (1 - \alpha) R_F$$

D'où :

$$E(R_p) = \mu_p = \alpha(\mu_R - R_F) + R_F$$

La variance anticipée est égale à :

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= (1 - \alpha)^2 \sigma(R_F) + \alpha^2 \sigma_R^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \sigma(R_F) \sigma(R) \text{Corr}(R, R_F) \\
&= (1 - \alpha)^2 \sigma_{R_F}^2 + \alpha^2 \sigma_R^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \sigma_{R_F} \sigma_R \rho_{RR_F}
\end{aligned}$$

Comme par hypothèse  $\sigma(R_F) = \sigma_{R_F} = 0$ , alors l'expression ci-dessus se simplifie :

$$\sigma_p^2 = \alpha^2 \sigma_R^2$$

Ce qui permet d'écrire :

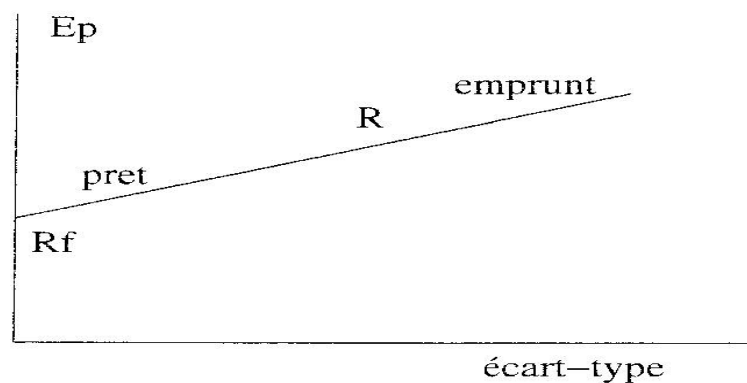
$$\alpha = \frac{\sigma_p}{\sigma_R}$$

En remplaçant  $\alpha$  par son expression dans l'équation définissant la rentabilité espérée du portefeuille, il vient :

$$\mu_p = R_F + (\mu_R - R_F) \frac{\sigma_p}{\sigma_R}$$

Cette relation linéaire entre  $\mu_p$  et  $\sigma_p$  définit l'équation de la frontière efficiente dans le cas d'un actif risqué et d'un actif sans risque.

La figure 2.4.2 en donne une représentation graphique.



**Graphique 2.2. Frontière efficiente avec actif sans risque.**

En  $R_F$ , le portefeuille est composé uniquement de l'actif sans risque (donc des obligations). Supposons qu'au point  $R$  il n'y a que des actifs risqués dans le portefeuille. Entre  $R_F$  et  $R$ , l'agent dispose de deux types d'actifs ; dans cette zone, l'investisseur prête donc de l'argent puisqu'il achète des obligations. Au-delà du point  $R$ , l'investisseur doit emprunter de l'argent pour acheter plus que ne le permet sa richesse initiale.

La quantité  $(\mu_R - R_F)$  est appelée l'**excès de rendement anticipé ou prime de risque** sur l'actif risqué. De même, la prime de risque attaché au portefeuille est déterminée de la manière suivante :

$$\mu_p = \alpha(\mu_R - R_F) + R_F \Rightarrow \mu_p - R_F = \alpha(\mu_R - R_F)$$

Plus on investit dans l'actif risqué (plus  $\alpha$  est élevé), plus la prime de risque sur le portefeuille est importante.

La pente de la frontière efficiente à savoir  $\frac{\mu_R - R_F}{\sigma_R}$  est appelé le **ratio de Sharpe** et mesure la prime de risque par unité de risque (tel que mesuré par l'écart-type de l'actif risqué). C'est une mesure de la performance du gestionnaire.

*De deux portefeuilles, il est rationnel de choisir celui qui offre le ratio de Sharpe le plus élevé (c'est-à-dire rémunère mieux le risque pris).*

### Exemple :

Soient deux actifs risqués  $A$  et  $B$ , et un actif sans risque.

$$\mu_A = 0,175 \quad , \quad \mu_B = 0,055$$

$$\sigma_A = 0,258 \quad , \quad \sigma_B = 0,115$$

$$R_F = 0,03$$

On constitue deux portefeuilles :

1.  $A$  + actif sans risque

$$Sharpe = \frac{\mu_A - R_F}{\sigma_A} = \frac{0,175 - 0,03}{0,258} = 0,562$$

2.  $B$  + actif sans risque

$$Sharpe = \frac{\mu_B - R_F}{\sigma_B} = \frac{0,055 - 0,03}{0,115} = 0,217$$

Le portefeuille ( $A$  + actif sans risque) dont le ratio de Sharpe est le plus élevé est efficient par rapport au second. Il est donc à préférer.

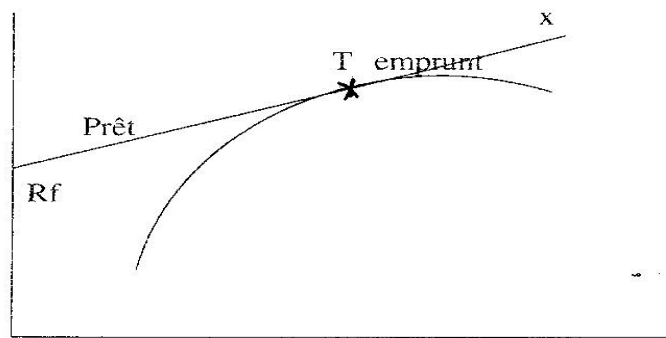
2-5-2- Le cas de deux actifs risqués et d'un actif sans risque

Considérons le cas d'un portefeuille composé de deux actifs risqués  $A$  et  $B$  et d'un actif sans risque.

La détermination de la frontière efficiente s'appuie sur un théorème très important en finance : **le théorème de séparation de Tobin**.

Le résultat de ce théorème permet de construire la frontière efficiente en deux étapes :

- Dans un 1<sup>er</sup> temps, on détermine la frontière efficiente des portefeuilles composés uniquement d'actifs risqués ;
- Puis, dans un second temps, on combine l'actif sans risque avec le portefeuille obtenu à la 1<sup>ère</sup> étape, de façon à obtenir une frontière efficiente la plus élevée possible afin de maximiser la rentabilité espérée pour un risque donné (voir graphique).



**Graphique 2.3. Droite des marchés de capitaux.**

La position la plus haute possible est obtenue au point  $T$ , point de tangence entre la frontière efficiente des seuls actifs risqués et la courbe (ou droite) efficiente obtenue en combinant actif risqué et actif sans risque.

La droite  $R_f - T - X$  est la nouvelle frontière efficiente. Tous les portefeuilles composés uniquement d'actifs risqués (ceux qui se trouvent sur la branche supérieure de l'hyperbole) sont dominés, à l'exception du portefeuille  $T$ . Ce dernier est appelé **portefeuille tangent**. Tous les investisseurs choisiront ce portefeuille tangent.

Ce choix est donc indépendant des préférences des agents. Par contre, les investisseurs choisiront la quantité d'actif sans risque à associer aux actifs risqués en fonction de leur degré d'aversion au risque. Ce principe est connu sous le nom de théorème de séparation de Tobin.

De l'équation de la frontière efficiente précédente, en remplaçant  $\mu_R$  et  $\sigma_R$  par  $\mu_T$  et  $\sigma_T$ , on obtient l'équation de la nouvelle frontière efficiente passant par  $R_F$  et  $T$  :

$$\mu_p = R_F + \frac{\mu_T - R_F}{\sigma_T} \sigma_p$$

Cette frontière efficiente est appelée ***Droite des Marchés de Capitaux (Capital Market Line)***.

Algébriquement, le portefeuille tangent  $T$  est obtenu en supposant que l'investisseur cherche à maximiser le ratio de Sharpe de son portefeuille. Il doit donc résoudre le programme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{\alpha_A, \alpha_B}{Max} \quad \frac{\mu_T - R_F}{\sigma_T} \\ s.c. \left\{ \begin{array}{l} \mu_T = \alpha_A \mu_A + \alpha_B \mu_B \\ \sigma_T^2 = \alpha_A^2 \sigma_A^2 + \alpha_B^2 \sigma_B^2 + 2\alpha_A \alpha_B \sigma_{AB} \\ \alpha_A + \alpha_B = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

En se servant des contraintes et après substitution, la solution du problème est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_A^T = \frac{(\mu_A - R_F) \sigma_B^2 - (\mu_B - R_F) \sigma_{AB}}{(\mu_A - R_F) \sigma_B^2 + (\mu_B - R_F) \sigma_A^2 - (\mu_A + \mu_B - 2R_F) \sigma_{AB}} \\ \alpha_B^T = 1 - \alpha_A^T \end{array} \right.$$

Le choix de l'investisseur dépendra au final de son degré d'aversion au risque ; s'il est très risquophobe, son portefeuille comportera une grande proportion d'actif sans risque (par exemple des obligations ou des actifs monétaires) et une petite proportion de portefeuille tangent ou d'actifs risqués (par exemple des actions).

## **Chapitre 3 : Le modèle d'évaluation d'actifs financiers (MEDAF)**

Le modèle dévaluation d'actifs financiers (MEDAF) ou en anglais *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) a été développé essentiellement par William Sharpe en 1964 (Prix Nobel d'économie 1990), mais aussi par Litner (1965) et Mossin (1966).

Il permet de déterminer le taux de rendement exigé par le marché pour un titre ou un portefeuille de titres en fonction de son risque systématique. Il se fonde sur les théories de portefeuilles et en déduit des relations numériques entre les taux de rentabilité des actifs risqués. En faisant l'hypothèse que les prix des actifs s'ajustent pour que l'offre soit égale à la demande (prix d'équilibre), le MEDAF est important pour plusieurs raisons :

Premièrement, il fournit une explication théorique au fait que beaucoup de personnes pratiquent une gestion passive sous la forme de portefeuilles indexés. Ces portefeuilles sont des portefeuilles diversifiés où les actifs sont détenus dans la même proportion que dans les indices de marché comme le CAC 40 en France.

A l'heure actuelle, les fonds de pension et d'investissement, ainsi que d'autres institutions financières gèrent de cette manière passive des fonds, en les investissant dans les portefeuilles indexés ou indiciels. Une telle stratégie de gestion passive permet de mesurer la performance des stratégies d'investissement d'actifs.

Deuxièmement, le MEDAF permet d'estimer les taux d'actualisation qui peuvent faire l'objet de nombreuses applications dans le domaine de la finance. Par exemple pour évaluer les actions, on doit actualiser les cash flows futurs à un taux ajusté au risque c'est-à-dire à un taux qui reflète les exigences de rentabilité des investisseurs.

Par ailleurs, les décideurs utilisent ce type de modèle pour procéder au choix de leur investissement.

Troisièmement, le MEDAF permet aussi d'établir les taux de rentabilité normatifs par secteur pour les entreprises publiques ou pour des entreprises sujettes ou soumises à la réglementation des prix.

## **1- Bref aperçu sur le MEDAF**

Le MEDAF est une théorie de l'équilibre développée à partir des théories de portefeuilles. Il constitue une réponse à la question de savoir quelles seraient les primes de risque sur les titres à l'équilibre si tous les individus avaient les mêmes anticipations des rentabilités et des risques futurs, si tous construisaient leurs portefeuilles efficients de manière optimale en utilisant les principes de la diversification.

L'idée fondamentale du MEDAF est qu'à l'équilibre, le marché rémunère des personnes qui prennent les risques. Etant donné que les individus ont généralement une aversion au risque, il doit y avoir une prime de risque positive pour la détention d'actifs risqués pour amener les individus à investir dans tous les actifs existants.

Mais le marché ne rémunère pas les individus qui détiennent les portefeuilles inefficients, c'est-à-dire les personnes qui s'exposent aux risques qu'elles pourraient éliminer par une diversification optimale.

La prime de risque d'un titre donné n'est donc pas liée au risque du titre en lui-même, mais plutôt à sa contribution au risque global d'un portefeuille diversifié de manière efficiente.

## **2- Les hypothèses de ce modèle sont les suivantes**

1. Les investisseurs sont averses au risque et maximisent leur espérance d'utilité.

2. Les investisseurs ont des anticipations homogènes sur les rendements des actifs, qui suivent des lois normales. Ils sont d'accord sur la moyenne et la variance qui définissent les lois normales.

3. Les quantités d'actifs offerts sont fixées, les actifs sont parfaitement divisibles.

4. Les marchés sont sans friction, l'information est gratuite et parfaitement disponible pour tous les investisseurs. Il n'y a pas d'impôt ni de réglementation sur les ventes à découvert.



5. Le modèle est monopériodique : il donne le rendement des titres que les investisseurs peuvent espérer pour la période à venir. Techniquement, cela veut dire que les moyennes et les variances des actifs sont supposées constantes.

6. Il existe un actif sans risque que l'on peut prêter et emprunter sans limite.

Il faut souligner tout d'abord que tout titre (ou portefeuille) comporte en général un risque systématique ou risque de marché et un risque spécifique.

Le **risque systématique** est le risque inhérent à la liaison des titres avec le marché dans la mesure où, les événements macroéconomiques ou mondiaux (une guerre) imprévus influencent systématiquement l'ensemble des valeurs. Il ne peut être éliminé (non diversifiable) en augmentant le nombre d'actifs. Une mesure répandue consiste à évaluer le bêta du titre ou du portefeuille. Le bêta est le coefficient de sensibilité du titre aux fluctuations du marché, il est mesuré par :

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(R_i, R_M)}{\text{var}(R_M)}$$

Plus la liaison est forte avec le marché (covariance des rentabilités du titre et du marché), plus le bêta est élevé. Contraint de supporter ce risque, les investisseurs exigeront en contrepartie une rémunération (prime de risque).

Le **risque spécifique** est propre à une action. Il est dû à l'influence des facteurs spécifiques à l'entreprise (changement du dirigeant, grève, ...) sur le taux de rentabilité. L'investisseur combine des titres pour réduire voire éliminer ce risque. En ce sens, il est qualifié de risque diversifiable.

### 3- L'équilibre du marché

L'établissement d'un modèle d'équilibre, susceptible de donner des indications sur la détermination des prix, comporte deux préalables. Le premier suppose la prise en compte des préférences de l'ensemble des investisseurs et non pas d'un seul. Le second implique la compréhension du mécanisme de confrontation entre l'offre et la demande de titres.

La notion d'équilibre de marché suppose que, par définition, le prix se fixe de telle manière que l'offre et la demande soient équilibrées. Par définition, lorsqu'un

prix s'affiche, les quantités offertes et demandées qui font l'objet d'un échange sont identiques. Lorsque l'équilibre est atteint, tous les titres sont en portefeuille. Tous les investisseurs détiennent le portefeuille qu'ils désirent détenir. Nous avons montré précédemment qu'en présence d'un actif sans risque, l'on peut définir la frontière efficiente (**voir graphique 2.3**).

Maintenant, à l'équilibre de marché, puisque tous les titres ont trouvé preneurs, tous les investisseurs auront la même frontière efficiente puisque les anticipations sont homogènes. Ils auront tendance à détenir deux types d'actifs : l'actif sans risque et  $T$ . Pour que la situation qui prévaut sur le marché soit une situation d'équilibre, il faut que le portefeuille  $T$  dans lequel investissent tous les individus regroupe l'ensemble des titres risqués du marché : ce portefeuille est appelé **portefeuille de marché**.

Un **portefeuille de marché** est un portefeuille qui a la même composition en valeur que le marché dans son ensemble.

La **capitalisation d'un marché** est le nombre total des titres en circulation multiplié par le prix de chaque titre.

De même, la **capitalisation d'un titre** est le nombre de ce titre multiplié par le prix de ce titre.

En remplaçant  $T$  sur le graphique 2.3 précédent par le portefeuille de marché  $M$ , on obtient le graphique 3.1.

### **Graphique 3.1 : Droite de marché des capitaux (MEDAF)**

## **4- La dérivation du modèle**

D'après les hypothèses précédentes, nous pouvons exprimer l'espérance mathématique de la rentabilité  $R_i$  d'un portefeuille ou d'un actif risqué  $i$  en fonction de celle d'un actif sans risque  $R_f$  et de celle du portefeuille du marché  $R_M$ , qui est celui que tous les investisseurs possèdent.

$$E(R_i) = R_f + \beta_i [E(R_M) - R_f] \text{ avec } \beta_i = \frac{\text{cov}(R_i, R_M)}{\text{var}(R_M)}$$

Nous n'entrerons pas dans la démonstration de ce modèle pour des raisons pédagogiques.

Le coefficient  $\beta_i$  qu'on appelle tout simplement le bêta, mesure la sensibilité d'un titre à un portefeuille de référence. C'est une mesure de la contribution d'un titre au risque d'un portefeuille. Ce ratio est obtenu par régression par les moindres carrés ordinaires des taux de rentabilité du titre  $i$  sur les taux de rentabilité du portefeuille du marché.

L'on peut réécrire cette équation de la manière suivante :

$$E(R_i) - R_F = \beta_i [E(R_M) - R_F]$$

Ainsi, le taux de rentabilité attendu d'un titre quelconque est donc égal au taux de rentabilité de l'actif sans risque auquel s'ajoute une prime de risque. Cette prime se décompose en :

- Prix du risque qui est l'écart entre la rentabilité moyenne du marché et le taux sans risque  $E(R_i) - R_F$  ;
- Et la quantité de risque propre à l'actif, le bêta de l'actif.

Par conséquent, plus les investisseurs seront exposés au portefeuille de marché, plus ils prendront de risque et plus leur rémunération consécutive potentielle sera théoriquement élevée.

Ce modèle explique donc la prime de risque d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs par sa sensibilité  $\beta_i$  par rapport au portefeuille de marché. Cette dernière dénote du caractère plus ou moins agressif d'un actif relativement au portefeuille de marché. Ainsi, si  $\beta_i > 1$ , l'actif est dit offensif ; si  $\beta_i < 1$ , il est dit défensif relativement au marché considéré. La situation  $\beta_i = 1$  correspond à une prise de risque similaire à celle prise par le portefeuille de marché.

## 5- Utilisations du MEDAF

On peut en distinguer 5 :

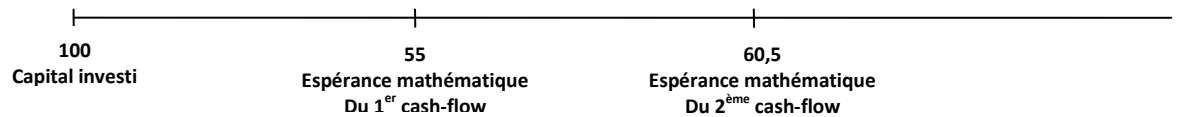
Donner une valeur aux titres, donc repérer les titres sur ou sous cotés ;

Sélectionner des projets d'investissement (pour qu'un projet d'investissement soit accepté, son TIR devrait au moins être égal au taux requis par le marché) ;

Evaluer les taux d'actualisation des entreprises ;  
Mesurer la performance des gestionnaires ;

### Exemple

Soit le projet d'investissement donné par le schéma suivant :



On a estimé le  $\beta$  de cet investissement à 1,75 et l'espérance mathématique de la rentabilité du marché à 8%, le taux sans risque est de 4%.

Question : Le projet est-il acceptable ?

Solution :

Par définition, on :  $E(R_i) = R_F + \beta_i [E(R_M) - R_F]$  ;

$$E(R_i) = 4\% + 1,75[8\% - 4\%] = 11\%$$

Calcul du TIR du projet :

$$100 = 55(1+k)^{-1} + 60,5(1+k)^{-2} \Rightarrow k = 10\%$$

Conclusion : La rentabilité du projet est inférieure à la rentabilité requise, le projet n'est pas acceptable.

## 6- Les limites du MEDAF

Outre les hypothèses restrictives du modèle d'équilibre, il possède aussi quelques limites de mise en œuvre empiriques.

Tout d'abord, il est difficile de déterminer précisément le portefeuille de marché. Souvent, il est réduit à l'indice phare de la place financière dans laquelle est évalué l'actif ou le portefeuille. Seulement, ces indices n'intègrent pas tous les actifs risqués de l'univers d'investissement, comme le voudrait la théorie, puisqu'il se restreint aux actions.

Les poids alloués aux actions dans ces indices varient suivant les places financières. Ils peuvent être relatifs :

- à la valeur des titres : c'est le cas du plus vieux indice fondé en 1884, le *Dow Jones Industrial Average* composé de 30 entreprises américaines importantes,
- aux capitalisations boursières,
- et au flottant, défini comme la part de la capitalisation que l'on peut échanger sur les marchés (inférieur le plus souvent à la capitalisation boursière totale), traduisant donc la liquidité du titre. La pondération par le flottant est le cas de la plupart des indices aujourd'hui.

Les créances bancaires, l'immobilier, le capital humain manquent donc dans la composition de ces indices et sont difficiles à mesurer précisément.

En outre, la seconde limite concerne l'estimation des  $\beta$ . Le modèle de régression sous-jacent au MEDAF s'écrit :

$$r_i = R_i - R_F = \alpha_i + \beta_i (R_M - R_F) + \varepsilon_i$$

Le premier problème qui apparaît est l'instabilité des  $\beta_i$  suivant les périodes d'estimation. En effet, ils peuvent évoluer très fortement. Quelles méthodes d'estimation utiliser alors pour éviter l'instabilité des  $\beta$  ? Quelle période considérer ? L'une des solutions la plus intéressante est l'utilisation du filtre de Kalman (dont l'étude dépasse le cadre de ce cours) permettant de calibrer des  $\beta$  très réactifs : cette technique permet de s'exonérer de l'inertie propre au Moindres Carrés Ordinaires.

Le second problème est la significativité possible de  $\alpha_i$ . Théoriquement, le MEDAF implique l'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA) entre les actifs, c'est-à-dire qu'en théorie l'équation du MEDAF est toujours vérifiée. Si cela n'est pas le cas, l'actif est mal évalué et selon l'hypothèse d'efficience des marchés, l'anomalie sera résorbée rapidement par les arbitrages et ne devrait pas perdurer. Néanmoins, dans la réalité, des  $\alpha_i$  significativement non nul perdurent plus longtemps que prévu par l'hypothèse d'efficience des marchés.