FORMATION

OUVERTE ET

A

DISTANCE

LIVRET 52 BIS :

MATHEMATIQUES FINANCIERES II

LES ANNUITES

INTRODUCTION :

Exemple 1 : Une personne veut acquérir une maison pour 60000000 DH, pour cela, elle place annuellement au CIH une de 5000000 DH.

But : Constituer un capital
Versements : annuels et constants
Période : année

Exemple 2 : la personne a une dette de 6000000 DH. Pour rembourser cette dette, elle verse mensuellement une somme de 1500 DH.

But : Remboursement de dette
Versements : mensuels constants
Période : mois

Principe : On appelle annuités, des versements réguliers et constants effectués à des intervalles de temps constants. On distingue :

- Les annuités de capitalisation ou annuités de placement, dont l'objectif est de constituer un capital
- Les annuités de remboursement ou d'amortissement, dont l'objectif est de rembourser une dette

Les versements peuvent être effectués à la fin de période : c'est le cas des annuités de remboursement où le 1er remboursement intervient à la fin de la première période (on parle d'annuité de fin de période).

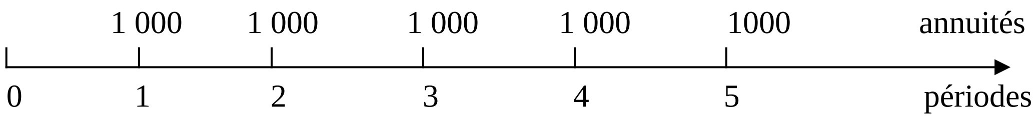
Comme elle peuvent être versés en début de période : c'est le cas généralement, pour les annuités de placement, dès la signature du contrat, un premier versement est effectué.

I - Les annuités de fin de période

A- La valeur acquise des annuités de fin de période

1° - Exemple : Une personne verse annuellement 1000 DH à la BMCE pendant 5 ans.
Quelle est la somme retirée au moment du dernier versement (taux 10%)

Schéma linéaire



Valeur acquise ?

$V_a = 100\ (1{,}1)^4 + 1000\ (1{,}1)^3 + 1000\ (1{,}1)^2 + 1000\ ({,}1) + 1000$

$V_a = 1000 + 1000\,(1,1) + 1000\,(1,1)^2 + 1000\,(1,1)^3 + 1000\,(1,1)^4$

Suite géométrique
raison ($q = 1 + t$) = 1,10
1er terme (a) = 1000 DH
nbre de termes = 5 termes

Somme des termes d'une suite géométrique

$$S = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S = 1000\,\frac{(1,10)^5 - 1}{1,10 - 1}$$

La valeur acquise après n période de versement s'exprimera par la formule :

$$V_a = a\,\frac{(1 + t)^n - 1}{t}$$

$\boldsymbol{\dfrac{(1+t)^2 - 1}{t}}$ est le résultat de l'intersection de la ligne de n et de la colonne de t qui figurent dans la table financière n° 3 d'après la T.T n° 3 on a

$V_a = 1000 \times 6,105100$

$V_a = 6105,10$

<u>Application :</u>

a - Recherche de l'annuité

Quel doit être le montant de chacune des 20 annuités qui permettraient de constituer au moment du dernier versement un capital de 100000 DH au taux de 11%

$V_a = 100000$ $t = 11\%$ $n = 20$ $a = ?$

$$V_a = a \frac{(1 + t)^n - 1}{t}$$

ou $$a = \frac{V_a \times t}{(1 + t)^n - 1}$$

d'après la T.F N° 3

$$100000 = a \times \frac{(1{,}11)^{20} - 1}{0{,}11}$$

$100\,000 = a \times 64{,}202832$

$$a = \frac{100\,000}{64{,}202832}$$

$a = 1557{,}563$

d'après la T.F. N° 5
Il est possible d'obtenir la valeur de

$$\frac{t}{(1+t)^n - 1}$$ en lisant dans la T.F. n° = 5

la valeur de $\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$ pour le temps est le taux

donnés et en retranchant (t) on obtient.

$$\frac{t}{1 - (1 + t)^{-n}} - t = \frac{t}{(1 + t)^n - 1}$$

$$a = 100\,000 \times \left(\frac{0{,}11}{1-(1{,}11)^{-20}} - 0{,}11\right)$$
$a = 100\,000 \times (0{,}1\,255756 - 0{,}11)$

$a = 100\,000 \times 0{,}0\,155756 = 1557{,}56$ dh

b) **Recherche de n**

Combien d'annuités constantes de 10 000 dh faut - il verser en fin de période, pour obtenir par capitalisation au taux de 7 % un capital de 150 000 dh ?

<u>Solution</u>

$V = 150\,000$ n ? $t = 7\,\%$ $a = 10\,000$

$$V = a \frac{(1 + t)^n - 1}{t}$$ $$150\,000 = 10\,000 \frac{(1{,}07)^n - 1}{0{,}07}$$

$$15 = \frac{(1{,}07) - 1}{0{,}07}$$

T.F. n° = 3 donne

$$\frac{(1{,}07)^{10} - 1}{0{,}07} = 13{,}816448$$

$$\frac{(1{,}07)^{11} - 1}{0{,}07} = 15{,}783593$$

Le nombre théorique d'annuités est compris entre dix et onze, sous le forme posée, le problème ne comporte pas de solution, n'étant obligatoirement entier.
Il faut envisager soit de verser 10 annuités supérieurs à 10 000 dh, soit de verser onze annuités inférieurs à 10 000 dh.

c) recherche du taux

Sachant que 10 annuités constantes de 10 000 dh chacune permettant de constituer un capital de 151929,29 dh. Calculer le taux d'intérêt correspondant à ce placement.

$$V = a \frac{(1 + t) - 1}{t}$$

$$151929{,}29 = 10\,000 \frac{(1+t)^{10} - 1}{t}$$

$$\frac{(1 + t)^{10} - 1}{t} = \frac{151929{,}29}{10\,000} = 15{,}192929$$

à l'aide de la T.F n° = 3 t = 9 %

B) <u>Valeur actuelle des annuités de fin de période</u>

1° <u>Principe</u>

Connaissant la valeur acquise des annuités de fin de période, déterminer leur valeur actuelle un an avant le 1er versement.

	1	2	3		n	périodes
0	a	a	a	a	a	annuités

(V actuelle) $V_0 = V_{a_n} (1 + t)^{-n}$

$$V_0 = a \frac{(1 + t) - 1}{t} (1 + t)^{-n}$$

$$V = a \frac{1 - (1 + t)^{-n}}{T} \qquad \text{avec } \frac{1 - (1 + t)^{-n}}{T} \text{ dans } \mathbf{TFn°4}$$

2°) Application

a- **recherche de a**

$$V_0 = a \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \qquad a = V \times \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

T.F. n° = 5

Exemple : Un fond de commerce est acheté à 300 000 dh payable par 12 annuités constantes de fin d'année au taux de 10 %
Quel doit être le montant de chaque annuité ?

$$a = 300\,000 \times \frac{0{,}10}{1-(1{,}10)^{-12}}$$

$$= 300\,000 \times 0{,}146763$$
$$a = 44028{,}9$$

b) recherche du taux

Une dette de 450 000 dh doit être remboursée par cinq versement annuel de 125 000 dh chacun. Le 1er versement ayant lieu dans un an. Calculer le taux d'intérêts.

$$Vo = a \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

$$450\,000 = 125\,000 \frac{1-(1+t)^{-5}}{t}$$
$$3{,}6 = \frac{1-(1+t)^{-5}}{t}$$

d'après la T.F. n° 4 on a

Interpolation linéaire

$$3{,}5\,82562 < 3{,}6 < 3{,}6047762$$
$$12{,}25 < t < 12$$
$$t = 12{,}05$$

c) **recherche du nombre d'annuités (n)**

Combien faut - il verser d'annuités de 18500 dh pour obtenir un an avant le 1er versement la valeur de 98000 dh au taux de 10 %

$$980\,000 = a \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

$$980\,000 = 18500 \ \underline{1-(1{,}10)^{-n}}$$

0,10

$$5,2972973 = \frac{1 - (1,10)^{-n}}{0,10}$$

d'après la T.F. n° 4

$$4,868419 < 5,2972973 < 5,334926$$
$$7 < n < 8$$

on a 2 solutions :

Solution n°1 : le nombre d'annuité est 7
versement complémentaire

980 000 - (18500 x 4,868419)
980 000 - 90065,75150 - 7934,2485

Solution n° 2 : changement de l'annuité

<u>n = 7</u>

980 000 = a x 4,868419
<u>a = 201297,3821</u>

<u>n = 8</u>

980 000 = a x 5,334926
a = 18369,5144 dh

II <u>Les annuités de début de période</u>

A - Valeur acquise des annuités de début de période (Va')

<u>1° exemple</u> :

Soit une suite de 5 annuités de début de période de 10 000 dh chacune. Calculer sa valeur, une période après le dernier versement taux 12 % l'an.

0	1	2	3	4	5	périodes
10000	10000	1 0000	10000	1 0000	va	annuités

$$V_{a'} = 10000\ (1 + t)^5 + 10000\ (1 + t)^4 + 10000\ (1 + t)^3 + 10000\ (1 + t)^2 + 10000\ (1 + t)^1$$
$$V_{a'} = 10000\ (1 + t)^1 + 10000\ (1 + t)^2 + 10000\ (1 + t)^3 + 10000\ (1 + t)^4 + 10000\ (1 + t)^5$$

prog géométrique

1^{er} terme = 10000 (1 + t)
n = 5
raison (1 + t)

$$S = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1} = 10000\,(1 + t)\,\frac{(1 + t)^5 - 1}{t}$$

la valeur acquise ($V_{a'}$)des annuités de début de période s'exprimera par la formule.

$$Va' = a\,(1 + t)\,\frac{(1 + t)^n - 1}{t}$$

T.F n° 3

$$Va' = 10000\,(1,12)\,\frac{(1,12)^5 - 1}{0,12} = 71151,89 \text{ dh}$$

2° Application

Application n° 1 : Combien faut-il verser d'annuités annuelles de 9531,69 dh chacune, pour constituer un an après le dernier versement, en capital de 157737,41 dh taux 12 % l'an.

$$Va' = a\,(1 + t)\,\frac{(1 + t)^n - 1}{t} = 9531,69(1,12)\,\frac{(1,12)^1 - 1}{0,12} = 157737,41$$

$$\frac{(1,12)^n - 1}{0,12} = 14,77565607 \quad \text{d'après la T.F. n° 3}$$

n = 9

Application n°2

15 versements annuel sont effectués le 1^{er} janvier de chaque année, pendant 15 ans, au taux de 11 % l'an. Le capital constitué, un an après le dernier versement est de 248234,67 dh. Calculer le montant de chaque versement.

$$Va' = a\,(1 + t)\,\frac{(1 + t)^n - 1}{t}$$

$$248234,67 = a\,(1,11)\,\frac{(1,11)^{15} - 1}{0,11}$$

d'après la T.F. n° 3 $\quad \frac{(1,11)^{15} - 1}{0,11} = 34,405359$

$$a = \frac{7215}{1,11} = 6500$$

Application n°3

Le versement de 10 annuités annuelles constantes de début de période de 10000 dh chacune, a permis de constituer , à la fin de la $10^{ème}$ année, un capital de 170 000 dh. Quel est le taux de capitalisation utilisé ?

$$170\,000 = 10\,000\,(1+t)\,\frac{(1+t)^{10} - 1}{t}$$

$$17 = (1+t)\,\frac{(1+t)^{10} - 1}{t} = \frac{(1+t)^{11} - (1+t)}{t} = \frac{(1+t)^{11} - 1}{t} - \frac{t}{t}$$

$$17 = \frac{(1+t)^{11} - 1}{t} - 1 \qquad 17 + 1 = \frac{(1+t)^{11} - 1}{t} = 18$$

la T.F. n° 3 donne $9{,}25 < t < 9{,}50$

$t = 9{,}46$ soit $9{,}46\ \%$

B - Valeur actuelle des annuités de début de période Vo'

1° Principe :

Connaissant la valeur acquise (Va’) de n annuités de début de période, placées au taux t, calculer leur valeur $V_{0'}$ au moment du 1er versement.

$$Va' = a\,(1+t)\,\frac{(1+t)^{n} - 1}{t}$$

$$V_{o'} = Va'\,(1+t)^{-n} = a\,(1+t)\,\frac{(1+t)^{n} - 1}{t} \times (1+t)^{-n}$$

$$V_{o'} = Va'\,(1+t)^{-n} = a\,(1+t)\,\frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}$$

$$V_{o'} = a\,(1+t)\,\frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}$$

2° exemple :

Combien faut - il verser d’annuités annuelles constantes de 5000 dh chacune, pour avoir une valeur de 20 186, 74 dh au moment du 1er versement, au taux de 12 % l’an.

$$V_{0'} = a\,(1+t)\,\frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}$$

$$20\,186{,}74 \text{ dh} = 5000\,(1{,}12) \times \frac{1 - (1{,}12)^{-n}}{0{,}12}$$

$$20186{,}74 = 5600\,\frac{1 - (1{,}12)^{-n}}{0{,}12}$$

$$3{,}604775 = \frac{1 - (1{,}12)^{-n}}{0{,}12}$$

D'après la table financière n° 4 on a n = 5 soit 5 versements.

<u>3° Application</u>

Calculer à la date du 01-01-93 la valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de 3000 dh chacune. La 1ere étant versée le 01 - 01 - 93, la dernière le 01-01-97 taux d'actualisation 12 % l'an.

$$V_{0'} = 3000\,(1{,}12) \times \frac{1 - (1{,}12)^{-5}}{0{,}12}$$

$$V_{0'} = 3000 \ \times 4{,}037349346626$$
$$= 12112 \text{ DH}$$

Exercices d'application

Exercice 1

Calculer, dans chacun des cas suivants, la valeure acquise par une suite de versement périodiques et constantes, immédiatement après le dernier versement:

- 18 annuités égales chacune à 12 500, taux annuel de capitalisation : 9,60%
- 12 semestrialités égales chacune à 4500 dh. Taux semestriel :4%
- 16 trimestrialités égales chacune à 2800 dh .

Exercice 2

Déterminer la valeur acquise par une suite de 10 annuités constantes de 3800 dh chacune au taux annuel de 10,40 %

a) au moment du dernier versement ;
b) 2 ans après le dernier versement ;
c) 3 ans et 6 mois après le dernier versement ;
d) 1 an et 125 j après le dernier versement (année comptée pour 365 j)

Exercice 3 :

Déterminer, dans chacun des cas suivants, la valeur actuelle d'une suite de versements constants une période avant le 1er versement :

- 8 annuités égales chacune à 6920 dh, taux annuel 9,25 %
- 14 semestrialités égales chacune à 3780 dh, taux annuel 6,50 %
- 12 trimestrialités égales chacune à 8100 dh ; taux semestriel 6 %

Corrigé :

Ex (1) : valeur acquise, au moment du dernier versement par :

- 18 annuités de 12500 dh taux annuel : 3,60

$$V_{18} = 12500 \times \frac{(1,096)^{18} - 1}{0,096} = 12500 \times 43,82321611 = 547790,20 \text{ dh}$$

- 12 semestrialités de 4500 dh taux semestriel 4 %

$$V_{12} = 4500 \times \frac{(1,04)^{12} - 1}{0,04} = 4500 \times 15,0258 = 67616,10 \text{ dh}$$

- 16 trimestrialités de 2800 dh taux trimestriel 2,25 %

$$V_{16} = 2800 \times \frac{(1,0225)^{16} - 1}{0,0225} = 2800 \times 19,005398 = 53215,11 \text{ dh}$$

- 36 mensualités de 1200 dh taux annuel 12 %

taux mensuel équivalent $(1,12)^{1/12} - 1 = 0,009488793$

$$V_{36} = 1200 \times \frac{(1,009488793)^{36} - 1}{0,009488793} = 1200 \times 42,67434277 = 51209,21 \text{ dh}$$

Ex (2)

$$V_{10} = 3800 \, \frac{(1,104)^{10} - 1}{0,104} = 3800 \times 16,24633476 = 61736 \text{ dh}$$

V_{13} (2 ans après le dernier versement : $61736 \times (1,104)^2 = 61736 \times 1,218816 = 75244,82$ dh

$V_{13\ 1/2}$ (trois ans et 6 mois après le dernier versement) :

$V_{10} \times (1 + i)^{3,5} = 61736 \times (1,104)^{3,5} = 61736 \times 1,4138123 = 87283,11$ dh

$V_{11} + \frac{125}{365}$ (1 an et 125 j après le dernier versement) :

$$\begin{aligned} V_{10} \times (1 + i)^{1 + \frac{125}{365}} &= 61736 \times (1,104)^{1 + 125/365} \\ &= 61736 \times (1,104)^{490/365} \\ &= 61736 \times 1,1420483 \\ &= 70505,49 \text{ dh} \end{aligned}$$

Ex (3) :

Valeur actuelle, une période avant le premier versement, de :

- 8 annuités de 6920 dh taux annuel 9,25 %

$$V_0 = 6920 \times \frac{1 - (1{,}0925)^{-8}}{0{,}0925} = 6920 \times 5{,}4837616 = 37947{,}63 \text{ dh}$$

- 14 semestrialités égales de 3780 dh taux annuel 6,50 %

taux semestriel équivalent : $(1{,}065)^{1/2} - 1 = 0{,}031988372$

$$V_0 = 3780 \times \frac{1 - (1{,}031988372)^{-14}}{0{,}031988372} = 3780 \times 11{,}14448 = 42126{,}13$$

- 12 trimestrialités égales chacune à 8100 dh ; taux semestriel 6 %

taux trimestriel équivalent $(1{,}06) \quad - 1 = 0{,}029563$

$$V_0 = 8100 \times \frac{1 - (1{,}029563)^{-12}}{0{,}029563} = 8100 \times 9{,}980020431 = 80838{,}16 \text{ dh}$$

DEVOIR

Exercice 1 :

L'achat d'un immeuble d'un montant de 5000000 est réglé comme suit :
2000.000 comptant
3000.000 payable au moyen de 10 échéances annuelles constantes, la première intervenant un après l'achat.
Taux 8,5 %

Immédiatement après paiement de la troisième de ces annuités l'acquéreur demande à se libérer au moyen de quatre annuités constantes, la première intervenant dans un an
Taux d'intérêt restant 8,5 %

- Calculez le montant de chacune de ces annuités

Exercice 2 :

Une société contracte un emprunt de 2000.000 remboursables au moyen de 20 annuités constantes.
Taux d'intérêt 10%.

Lors du paiement de la 13ème annuités le prêteur consent une réduction de 10% sur le montant des intérêts compris dans cette $13^{ème}$ annuité (réduction limitée aux seuls intérêts de cette seule $13^{ème}$ annuité).

- Calculez le montant de la $13^{ème}$ annuité après réduction.

Exercice 3 :

Un emprunt de 1000.000 est contracté le 15 novembre 92, il est remboursable au moyen de trimestrialités constants de chacune 8376,66 la première versée le 15 février 93.
Dans le tableau d'amortissement dressé à cette occasion l'amortissement afférent à la dernière triméstrialité s'élève à 8132,68

- Déterminez la date de paiement de dernière triméstrialité.

CORRIGE :

EX 1:

Cette résiduelle après paiement de 3 annuités :

$$3000\,000 \times \frac{1{,}085^{10} - 1.085^{3}}{1{,}085^{10} - 1} = 2340302{,}7$$

Montant de chacune des annuités nouvelles :

$$2340302{,}7 \text{ X } \frac{0{,}085}{1-0{,}085^{-4}} = 714466{,}3$$

EX 2 :

Annuité constante : $2\,000\,000 \times \frac{0{,}10}{1-1{,}10^{-20}} = 234920$

Ier amrt : 234920 - (2 000 000 x 0,10) = 34920

Amrt contenu dans la 13 ème annuité :

$34920 \times 1{,}10^{12} = 109593{,}90$

Intérêt contenu dans la 13 ème annuité :

234920 – 109 593,90 = 125 326,10

Montant de la 13 ème annuité, après réduction

234920 – 125326,10 x 10/100 = 222 387 ,39

EX 3:

Désignons par (i) le taux trimestriel cherché :

$1+i = \frac{a}{} = \frac{8376{,}66}{8132{,}68} = 1{,}03$ d'ou i = 0,03

Si n est le nombre de trimestrialités

$$8376{,}66 = 100\,000 \frac{0{,}03}{1-1{,}03^{-n}} \longrightarrow \frac{0{,}03}{1-1{,}03^{-n}} = 0{,}837666$$

La lecture de la table financière 5, colonne 3% , montre que n = 15

Date de paiement de la 15 éme et dernière trimestrialité ; 15 août 1996 .

L'EMPRUNT INDIVIS

I) DEFINITION

L'emprunt indivis ou ordinaire se caractérise par le fait que l'emprunteur (un particulier ou une entreprise) s'adresse à un seul créancier.

L'emprunt indivis s'oppose donc à l'emprunt obligatoire par lequel l'emprunteur (une grande entreprise ou l'Etat) recourt à une multitude de créanciers.

II) LES FORMULES DE REMBOURSEMENT

A- Les emprunts remboursables par amortissements constants

Selon cette formule, le montant de l'emprunt indivis est divisé en parts égales (les amortissements) en fonction du nombre de période de remboursement. A la fin de chaque période, l'emprunteur verse au prêteur une partie de la dette (amortissement) et un intérêt calculé au taux prévu sur le montant encore dû (non remboursé au prêteur).
La somme de ces 2 éléments (amortissement-intérêt) forme « l'annuité de remboursement »

1) Exemple :

Une entreprise importatrice emprunte la somme de 1000 000 dh à la B.M.C.E. en vue de faire face aux surcoûts apparus sur les marchés d'approvisionnements.
Cet emprunt est remboursable en quatre fractions égales, payables à la fin de chacune de quatre années : taux de l'emprunt 12 % l'an.

Tableau d'amortissement de l'emprunt

Périodes	capital en début de période1	Intérêt de la période 2	Amortissement 3	Annuité 4	Capital en fin de période 5
1	1000 000	120 000	250 000	370 000	750 000
2	750 000	90 000	250 000	340 000	500 000
3	500 000	60 000	250 000	310 000	250 000
4	250 000	30 000	250 000	280 000	0
		300 000	1000 000	1300 000	

4 = 2 + 3 **5 = 1 - 3**

2) Généralisation

Soit :
a = annuité
D = amortissement
I = intérêt
k = rang

$$a_n = D_n + D_n \times i$$

$$\boxed{a_n = D_n\ (1 + i)}$$

La somme des amortissements est égale au montant du capital emprunté

$$V_0 = D_1 + D_2 + ...D_n$$

La somme des annuités est égale à la somme des amortissements augmentée de la somme des intérêts.

$$\Sigma_a = \Sigma D + \Sigma I$$

$$\boxed{a_{k+1} = a_k - \frac{V_0 I}{r}\ \text{(intérêt}}$$

Les annuités successives forment une progression arithmétique décroissante de raison $- \frac{V_0 I}{r}$

Vérification $a_3 = a_2$ - Amortissement x i
310 000 = 340 000 - 250 000 x 12 %

B- Les emprunts remboursables par annuités constantes

Selon cette formule de remboursement, ce sont les annuités (intérêts + amortissements) qui sont constantes.
C'est la formule la plus répondue au Maroc

1° Exemple :
Gardons l'exemple précédent en supposant que les remboursements se font par annuités constantes.

Tableau d'amortissement de l'emprunt

Périodes	capital en début de période1	Intérêt de la période 2	Amortissement 3	Annuité 4	Capital en fin de période 5
1	1000 000	120 000	209 234,44	329 234,44	790 765,56
2	790 765,56	94 891,87	234 342,57	329 234,44	556 422,99
3	556 422,99	66 770,77	262 463,67	329 234,44	293 959,32
4	293 959,32	35 275,12	293 959,32	329 234,44	0,00
		316 937,76	1000 000	1 316 937,76	

4 l'annuité est calculée à l'aide de la formule :

$$a = V_0 \frac{i}{1 - (1+i)\text{-}n}$$

$$a = 1000\,000 \times \frac{0{,}12}{1\text{-}\ (1{,}12)\text{-}4} \quad \_\_ \quad \text{T.F n° = 5}$$

$a = 1000\,000 \times 0{,}3292\,344$
$a = 329\,234{,}44$

3 les amortissements sont en progression géométrique de raison (1 + i)

$$V_0 = D_1 \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

1^{er} terme $D_1\ (1 + i)°$

Dernier terme = $D_1\ (1 + i)^n$

Pour construire le tableau d'amortissement on peut procéder de 2 manières différents :

1) on calcule d'abord a (annuité constante). Pour la $1^{ère}$ ligne, on commence par calculer l'intérêt, par soustraction (a - I_1)on obtient le 1^{er} amortissement.

En multipliant à chaque fois par (1 + i) on obtient la colonne des amortissements.

C- <u>Les emprunts remboursables en une seule fois</u>

Selon cette formule, l'emprunteur peut verser uniquement les intérêts à la fin de chaque période et payer la totalité et la somme empruntée à la fin de la dernière période. De même, il peut ne rien payer pendant toute la durée de l'emprunt et verser la totalité des intérêts et le montant de la somme empruntée à la fin de la durée de l'emprunt.

Ce système présente l'inconvénient d'obliger l'emprunteur à verser une somme très importante à la fin des n périodes. Généralement, l'emprunteur est amené à effectuer le placement à la fin de chaque période, dans une banque ou une société de capitalisation, d'annuités constantes (ou variables) à un taux t presque toujours différent du taux d'emprunt i

1° Exemple :

Soit un emprunt de 1000 000 dh, remboursable en une seule fois au bout de 5 ans taux 12 %

Hypothèse 1 : l'emprunteur paie les intérêts au taux de 12 % à la fin de chaque année.

	1	2	3	4	5	périodes
0	a_1 = Voi 120000	a_2= Voi 120 000	a_3= Voi 120000	a_4= Voi 120 000	a_5=Vo+ Vo x i 100000 +120000	

Hypothèse 2 :
même modalités de paiement que dans l'hypothèse 1, mais l'emprunteur prend la précaution de déposer, à la fin de chaque année, en banque, une somme S telle que, compte tenu d'une capitalisation au taux de 12 %, il puisse rembourser le capital emprunté. Déterminer S
Remboursement

	1	2	3	4	5 Période
0	a_1= Voi (100 000 x 0,12) 120.000	a_2=Voi 120 000	a_3=Voi 120 000	a_4=Voi 120 000	Voi+Voi 100 000+120 000 1 120 000

Placements

	1	2	3	4	5
0	S	S	S	S	S

$$V_O = S\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$1000\,000 = S\,\frac{(1{,}12)^5 - 1}{0{,}12}$$

$$1000\,000 = S \text{ X } 6{,}352847$$

$$S = 157409{,}73 \text{ dh}$$

La capitalisation des sommes S constantes doit procurer la somme empruntée.

Hypothèse 3

même question si le taux de rémunération des dépôts est de 13,75 %, c'est -à-dire supérieur au taux d'intérêt à payer.

Placements

$$V_0 = S \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

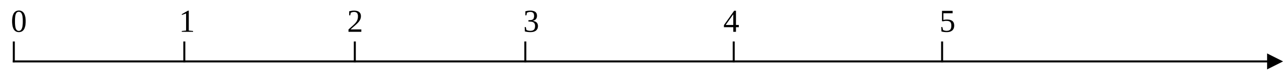
$$1000\,000 = S \frac{(1{,}1375)^5 - 1}{0{,}1375}$$

S = 152 035,34 dh

Hypothèse 4 :

L'emprunteur ne paie la totalité des intérêts qu'en fin de contrat et n'effectue qu'un seul versement à la fin de la 5ème année.
Il place néanmoins, à la fin de chaque année, une somme S au taux de 12 %. Déterminer S permettant de faire face à ce remboursement unique.

Remboursements



$a_1=0$ $a_2=0$ $a_3=0$ $a_4=0$ $a_5=V_o(1+i)^n$

$a_5=100\,000 \times (1{,}12)^5$

$a_5=1762341{,}68$dh

Placements

$$V_0 (1+i)^n = S \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$S = V_0 (1+i)^n \frac{i}{(1+i) - 1}$$

$$S = 1762341{,}68 \frac{0{,}12}{(1{,}12)^5 - 1}$$

S = 277409,73 dh

Hypothèse 5 :
même question que dans l'hypothèse 4, si le taux de placement est de 13,75 %

$$V_o (1+i) = S \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$1762341{,}68 = S \frac{(1{,}1375)^5 - 1}{0{,}1375}$$

S = 267938,22 dh

Application 1 :

Dresser le tableau d'amortissement d'un emprunt ordinaire de 420 000 dh souscrit le 20-06-97 et remboursable par 6 amortissements annuels constants. Le taux d'intérêt est de 11 % le premier remboursement aura eu lieu le 19/06/98 .

Solution :

$D_1 = D_2 = D_3 = ...D_6 = \frac{420\,000}{6} = 70\,000$

Périodes	capital en début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité	Capital en fin de période
19-06-98	420 000	46 200	70 000	116 200	350 000
19-06-99	350 000	38 500	70 000	108 500	280 000
19-06-2000	280 000	30 800	70 000	100 800	210 000
19-06-2001	210 000	23 100	70 000	93 100	140 000
19-06-2002	140 000	15 400	70 000	85 400	70 000
19-06-2003	70 000	7 700	70 000	77 700	0
		161 700	420 000	581 700	

Application 2 :

Le fonctionnaire a emprunté 120 000 DH au CIH, remboursables en 120 mensualités au taux annuel de 15 %. Cet emprunt a été souscrit le 28/09/97 avec effet au 01-10-97. Le premier remboursement commencera fin octobre 97.

1° calculer le montant de la mensualité constante
2° Décomposer la 1ère mensualité en intérêt et en amortissement.
3° Après 60 mois de remboursement, le fonctionnaire, qui espère bénéficier d'un rappel, souhaiterait rembourser la somme restant dûe en un seul versement, le contrat lui permettant de le faire. Quelle somme totale devra-t-il verser après avoir payé le 60° mensualité.
4° Ayant constaté que la somme restant due est encore importante, le fonctionnaire continue à acquitter ses mensualités pendant une année. Déterminer combien il lui restera à payer après cette année supplémentaire de remboursement en présentant le tableau d'amortissement concernant ces 12 mensualités. Que constatez-vous ?

Solution :

Puisque le taux d'intérêt est annuel et le remboursement est mensuel, il est nécessaire de calculer le taux équivalent au taux annuel de 15 %

$i_m = (1,15)^{1/12} - 1$ $\qquad i_m = 12 \sqrt{1,15} - 1$ $\qquad i_m = 0,011714916$

1) Calcul de mensualité constante (m)

$$m = V_0 \frac{i_m}{1 - (1+i\ )^{-n}}$$

$$m = 120\,000 \frac{0,011714916}{1 - (1,011714916)^{-120}}$$

m = 1867,38 dh

2) Décomposition de la 1ère mensualité

$I_1 = 120\,000 \times 0,011714916 = 1405,79$ dh

$D_1 = m_1 - I_1$

$= 1867,38 - 1405,79 = 461,59$ dh

ou bien à partir de la formule générale des amortissements

$$D_1 = V_0 \frac{i_m}{(1 + i_m)^n - 1}$$

$$= 120\,000 \frac{0,011714316}{(1,011714916)^{120} - 1}$$

$D_1 = 461,59$ dh

3) Calcul du montant de l'emprunt restant dû après le paiement de la 60° mensualité (V_{60})
Cette somme est égale à la valeur actuelle des mensualités restantes. Soit

$$V_{60} = m \frac{1 - (1 + i\ )^{-60}}{i_m}$$

$$V_{60} = 1867,38 \frac{1 - (1,011714916)^{-60}}{0,011714916}$$

$V_{60} = 80150,99$ dh

Vérification à partir du 1er amortissement :

$V_{60} = V_0$ - capital remboursé à la fin de la 60° = mensualité

$$V_{60} = V_0 - D_1 \times \frac{(1 + i_m)^{60} - 1}{i_m}$$

$V_{60} = 120\,000 - [461,59 \times \underline{(1,011714916)^{60} - 1]}$

0,011714916

= 120 000 - 39849,39 = 80150,99

Périodes	**capital en début de période**	**Intérêt de la période**	**Amortissement**	**Annuité**	**Capital en fin de période**
Fin oc 2002	80150,99	938,96	928,42	1867,38	79222,57
Fin nov. 2002	79222,57	928,09	939,29	"	78283,28
Fin D 2002	78283,28	917,08	950,3	"	77332,98
Fin Jan. 2003	77332,98	905,95	961,43	"	76371,55
F.Fév. 2003	76371,55	894,69	972,69	"	75398,86
F. M.2003	75398,86	883,29	984,09	"	74414,77
F.Av. 2003	74414,77	871,76	995,62	"	73419,15
F.Mai. 2003	73419,15	860,10	1007,28	"	72411,87
F.Juin. 2003	72411,87	848,30	1019,08	"	71392,79
F.Juillet. 2003	71392,79	836,36	1031,02	"	70361,77
F.Août. 2003	70361,77	824,28	1043,10	"	69318,67
F.Sep. 2003	69318,67	812,06	1055,32	"	68263,35

Le tableau a été construit en appliquant le taux mensuel à la somme restant dûe au début de chaque période, l'amortissement de chaque période a été calculé par différence entre la mensualité et l'intérêt, le restant dû final par différence entre le restant dû initial et l'amortissement.

On constate que le fonctionnaire aura surtout à payer des intérêts pendant les 5 premières années (60/12 = 5 ans) puisque le remboursement principal moyen annuel sera de :

$$\frac{120\,000 - 80151}{5} = 7969{,}8 \text{ dh}$$

Soit approximativement 8000 dh alors que , pendant le sixième année, il aura remboursé

$$80150{,}99 - 68263{,}35 = 11887{,}64 \text{ dh}$$

Remarquons que, la toute 1ère année n'ont été remboursés que

$$461{,}59 \times \frac{(1{,}011714916)^{12} - 1}{0{,}011714916} = 5910 \text{ dh du principal}$$

Application n° 3

Une entreprise emprunte à une banque le 01-04-1997 la somme de 750 000 dh à rembourser en une seule fois dans 4 ans au taux de 10 %. Le contrat d'emprunt stipule : « l'emprunteur aura l'obligation de payer les seuls intérêts à termes échus dont le 1er est au 01-04-98. Pour préparer le remboursement, cette Entreprise a décidé de placer une somme constante le 01-04 de chaque année de 1998 à 2001 au taux de 10,70 %

1-Calculer le montant de placement annuel.

Solution :

$$S = V_0 \frac{i}{(1+i)^n - 1} = 750\,000 \frac{0{,}107}{(1{,}107)^n - 1}$$

$$S = 159948{,}10 \text{ dh}$$

Exercices d'application

EXERCICES ET CORRIGES

Exercice 1 :

A quel taux d'intérêt est consenti chacun des prêts suivants ?

a. Prêt de 39 000 DH remboursable par 6 annuités constantes (de fin d'année) de 8 949,44 DH
b. Prêt de 26 500 DH remboursable par 8 semestrialités constantes de 3 839 DH
c. Prêt de 48 150 DH remboursable par 10 trimestrialités constantes de 5 530 DH
d. Prêt de 2 775 DH remboursable par 14 mensualités constantes de 216,20 DH

Exercice 2 :

Afin de moderniser une partie de ses magasins, l'entreprise SOCAB décidé de procéder à un investissement de 1,5 million de dh.
Le financement de ce projet sera réalisé de la manière suivante :

- autofinancement à raison d'un tiers ;
- le reste par emprunt auprès d'un établissement financier qui propose les deux formules suivantes :

I. Emprunt formule A :
- annuités constantes ;
- taux annuel : 15 %
- capital restant dû après le versement de la cinquième annuité : 667 923,82 DH
- la première annuité vient à échéance un an après le versement des fonds.

a. **Calculer la durée de remboursement de l'emprunt**
b. **Présenter la cinquième ligne du tableau d'amortissement de l'emprunt.**

II Emprunt formule B :
- semestrialités constantes ;
- taux annuel : 15 %
- différence entre le dernier et le premier amortissement semestriel : 65 554,93 DH ;
- la première semestrialité vient à échéance un semestre après le versement des fonds

a. **Calculer le montant de la semestrialité**
b. **Déterminer la durée de remboursement de l'emprunt.**

Exercice 3 :

Une personne emprunte une certaine somme qu'elles s'engage à rembourser par soixante mensualités, calculées au taux mensuel de 0,80 %
Sachant qu'immédiatement après le paiement de la quarante-huitième mensualité, le capital restant dû s'élève à 9 117,98 DH déterminer le montant de la mensualité assurant le service de l'emprunt, puis le montant de l'emprunt.

CORRIGES :

Exercice 1 :

Calcul du taux d'intérêt
a) prêt de 39000 DH ; 6 annuités de 8949,44 DH ; taux annuel : x par dirhams

$$39000 = 8949{,}44 \times \frac{1-(1+x)^{-6}}{x} \qquad \frac{1-(1+x)^{-6}}{x} = \frac{39000}{8949{,}44} = 4{,}3578145$$

On ne peut calculer x que par approximations successives (et éventuellement une interpolation par parties proportionnelles).

$$0{,}01 \left\{ \begin{array}{ll} 0{,}09 & 4{,}4859185 \\ x & 4{,}3578145 \\ 0{,}10 & 4{,}3552606 \end{array} \right\} 0{,}128104 \quad \Big\} \; 0{,}1306579$$

$$x = 0{,}09 + 0{,}01 \times \left[\frac{0{,}128104}{0{,}01306579} \right] = 0{,}09948 \text{ soit } 9{,}98\ \%$$

Taux annuel d'intérêt : 9,98 %

$$\text{Vérification : } 8949{,}44 \times \frac{1-(1{,}0998)^{-6}}{0{,}0998} = 39\ 000$$

b) prêt de 26500 DH ; 8 semestrialités de 3839 DH ; taux semestriel : x par dirhams

$$26500 = 3839 \times \frac{1-(1+x)^{-8}}{x} \qquad \frac{1-(1+\ )^{-8}}{x} = \frac{26500}{3839} = 6{,}902839$$

$$0{,}005 \left\{ \begin{array}{ll} 0{,}03 & 7{,}019692 \\ x & 6{,}902839 \\ 0{,}035 & 6{,}873955 \end{array} \right. \quad 0{,}116853 \quad \Big\} \; 0{,}145737$$

$$x = 0{,}03 + 0{,}005 \times \frac{0{,}116853}{0{,}145737} = 0{,}034 \text{ soit } 3{,}4\ \%$$

$$\text{Vérification : } 3839 \times \frac{1 - (1{,}034)^{-8}}{0{,}034} = 26500$$

Taux semestriel : 3,4 %
Taux annuel proportionnel : 6,8 %
Taux annuel équivalent : $(1{,}034)^2 - 1 = 0{,}069156$ soit 6,91 %

c) prêt de 48150 DH ; 10 trimestrialités de 5530 DH ; taux trimestriel : x par dirhams

$$48150 = 5530 \times \frac{1 - (1 + x)^{-10}}{x} \qquad \frac{1 - (1 + x)^{-10}}{x} = \frac{48150}{5530} = 8{,}7070$$

$$0{,}005 \left\{ \begin{array}{ll} 0{,}025 & 8{,}752063 \\ x & 8{,}707052 \\ 0{,}03 & 8{,}530202 \end{array} \right. \qquad 0{,}045011 \qquad 0{,}221861$$

$$x = 0{,}025 + \left(0{,}005 \times \frac{0{,}045011}{0{,}221861}\right) = 0{,}026 \text{ soit } 2{,}60\ \%$$

$$\text{Vérification : } 5530 \times \frac{1 - (1{,}026)^{-10}}{0{,}026} = 48150$$

Taux trimestriel : 2,60 %
Taux annuel proportionnel : 10,40 %
Taux annuel équivalent : $(1{,}026)^4 - 1 = 0{,}108126$ soit 10,81

d) prêt de 2775 DH ; 14 mensualités de 216,20 DH taux mensuel : x par dirhams.

$$2775 = 216{,}20 \times \frac{1 - (1 + x)^{-14}}{x} \qquad \frac{1 - (1 + x)^{-14}}{x} = \frac{2775}{216{,}20} = 12{,}835337$$

$$0{,}005 \left\{ \begin{array}{ll} 0{,}01 & 13{,}003702 \\ x & 12{,}835337 \\ 0{,}015 & 12{,}543381 \end{array} \right. \qquad 0{,}168365 \qquad 0{,}460321$$

$$x = 0{,}01 + \left(0{,}005 \times \frac{0{,}168365}{0{,}460321}\right) = 0{,}0118 \text{ soit } 1{,}18\ \%$$

$$\text{Vérification : } 216,20 \times \frac{1 - (1,0118)^{-14}}{0,0118} = 2774,97 \text{ arrondis à } 2775 \text{ DH}$$

Taux mensuel : 1,18 %
Taux annuel proportionnel : 0,0118 x 12 = 0,1416 soit 14,16 %
Taux annuel équivalent : $(1,0118)^{12} - 1 = 0,15116$ soit 15,11 %

Corrigé exercice : II

Entreprise SOCAB

- Autofinancement : 500000 DH
- Capital emprunté : 1000000 DH

I - Emprunt formule A
a - Capital restant du après le versement de la cinquième annuité : 667923,82 DH
- Capital remboursé après le versement de la cinquième annuité :
1000000 - 667923,82 = 332076,18 DH

Les annuités étant constantes, les amortissements forment une progression géométrique de raison (1,15) et de premier terme D_1 .
Capital remboursé au bout de 5 ans = $D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5$ (somme des cinq premiers amortissements).

$$D_1 \times \frac{(1,15)^5 - 1}{0,15} = 332076,18$$

$$D_1 = \frac{332076,18}{674238125} = 49252,06$$

Le capital emprunté (1000000) est la somme de n amortissements. D'où :

$$V_0 = D_1 \times \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$1000000 = 49252,06 \times \frac{(1,15)^n - 1}{0,15}$$

$$\frac{(1,15) - 1}{0,15} = \frac{1000000}{49252,06} = 20,30371928 \text{ soit } n = 10$$

Durée de remboursement de l'emprunt : 10

2. La cinquième ligne du tableau d'amortissement comprend le cinquième amortissement

$D_5 = D_1 \times (1 + i)^4 = 49252,06 \times (1,15)^4$
$= 49252,06 \times 1,74900625 = 86142,16$ DH

Capital restant dû au début de la cinquième année :

667923,82 + 86142,16 = 754065,98 DH
Intérêts : 754065,98 x 0,15 = 113109,90 DH

Année	**Capital restant dû**	**Intérêt**	**Amortissement**	**Annuité**
5	754065,98	113109,90	86142,16	199252,06

Vérification : $V_0 = a \times \dfrac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$

$$199252,06 \times \frac{1 - (1,15)^{-10}}{0,15} = 199252,06 \times 5,018768626 = 999999,99 \text{ soit } 1000000 \text{ DH}$$

II - Emprunt formule B
1. Taux semestriel équivalent au taux annuel 15 %

$(1 + s)^2 = 1,15$ d'où $s = (1,15)^{1/2} - 1 = 0,072380529$

Soit S_1 la première semestrialité
Le premier amortissement D_1 est égal à :
$D_1 = S_1 - l_1 = S_1 - 1000000 \times 1,072380529 = S_1 - 72380,529$

La dernière semestrialité est égale à :

$S_n = D_n + D_n\ s = D_n \times (1,072380529)$

d'où $D_1 = \dfrac{S_n}{1,072380529}$

La différence entre le dernier amortissement (D_n) et le premier amortissement (D_1) est égale à :

$D_n - D_1 = \dfrac{S_n}{\quad} - (S_1 - 72380,529) = 65.554,93$

1,072380529

Les semestrialités étant constantes ($S_n = S_1 = S$)

$S \times [1 - (1{,}072380529)^{-1}] = 72380{,}529 - 65554{,}93 = 6825{,}599$

$$S = \frac{6825{,}599}{1 - 0{,}932504809} = 101127{,}19$$

Montant de la semestrialité : 101127,19 DH

2. $V_0 = S \times \dfrac{1 - (+ s)^{-n}}{s}$ soit $\dfrac{1 - (1{,}072380529)^{-n}}{0{,}072380529} = \dfrac{1000000}{101127{,}19} = 9{,}888537395$ d'où n = 18

Durée de remboursement de l'emprunt : 18 semestres, soit 9 ans.

Vérification :

Premier amortissement : 101127,19 - 72380,529 = 28746,66 DH

Dernier amortissement : $28746{,}66 \times (1{,}072380529)^{17} = 94301{,}59$ DH

La différence est bien de 65554,93 DH.

Exercice 3 :

$V_{48} = ax \times \dfrac{1 - (1+ m)^{-12}}{m}$ valeur actuelle des douze mensualités non échues

$a = 9117{,}98 \times \dfrac{0{,}008}{1-(1{,}008)^{-12}} = 799{,}92$

$V_0 = a \times \dfrac{1 - (1 + m)^{-n}}{m} = 799{,}92 \times \dfrac{1 - (1{,}008)^{-60}}{0.008} = 37\,999{,}57$ arrondis à 38 000 DH

DEVOIR

Exercice 1:

Un emprunt de 100000dh a été contracté. Durée de l'amortissement 16 ans, taux : 9% .
Les 15 premières annuités sont égales chacune à 12000 dh, la 16 éme annuité est de montant différent, (l'emprunt n'est donc pas remboursable par annuité constante.

TAF :

a) Calculez le montant de la 16 éme annuité
b) Présentez les deux premières et la dernière ligne du tableau d'amortissement.
c) Calculez par deux procédés différents le montant de la dette encore vivante après paiement de la 11 éme annuité.

Exercice 2:

Un emprunt d'un montant de 600000 est remboursable au moyen de 2 versements annuels à échéance respectives de 1 et 2 ans et dont les montants sont dans l'ordre : 300000 et 393453,75.
Présentez le tableau d'amortissement de cet emprunt.

Exercice 3 :

Un emprunt indivis d'un montant initial de 800000 amortissable au moyen de 12 annuité constantes, taux d'intérêt 9%.

1) Calculez par quatre procédés la dette résiduelle après paiement de 7 échéances.
2) Présentez la 8 éme ligne du tableau d'amortissement de cet emprunt.

Exercice 4:

Un emprunt est remboursable au moyen de 5 annuité, comprenant chacune intérêt et amortissement, dont les montants et les échéances sont les suivantes :

Montants : $a_1 = 4200 \longrightarrow$ échéance : 1 an après le prêt
$a_2 = 4200 \longrightarrow$ échéance : 2 an après le prêt
$a_3 = 4500 \longrightarrow$ échéance : 3 an après le prêt
$a_4 = 5000 \longrightarrow$ échéance : 4 an après le prêt
$a_5 = 5500 \longrightarrow$ échéance : 5 an après le prêt

L'amortissement contenu dans la dernière annuité s'élève à 5000.

T.A.F : Calculez le montant initial de l'emprunt**.**

CORRIGE :

EX 1 :

- Désignons par a_{16} la 16 ème annuité.
- Appliquons la règle 2 . Egalité entre le montant de la dette et valeur actuelle des annuités.

$$100000 = 12000\ \frac{1-1{,}09^{-15}}{0{,}09} + a_{16}\ 1.09^{-16}$$

$$100000 = (12000 \times 8{,}060688) + 0{,}25187\ a_{16}$$

On en tire $a_{16} = 12989{,}81$

Echéance	Dette	Intérêt	Amortissement	Annuité
1	100000	9000	3000	12000
2	97000	8730	3270	12000
16	11917,26	1072,55	11917,26	12989,81

Le dernier amortissement (et la dernière dette) ont été calculés en effectuant le quotient : 12989,81/1,09

- **Premier procédé :Règle fondamentale n°3**

$$D_{11} = 100000 \times 1{,}09^{11} - 12000 \times \frac{1{,}09^{11} - 1}{0.09}$$

$$= (100000 \times 2{,}580426) + (12000 \times 17{,}560298)$$

$$= 47319{,}09$$

- **Second procédé : Règle fondamentale n° 4**

$$\mathbf{D_{11} = 12000 \times \frac{1-1{,}09^{-4}}{0{,}09} + (12989{,}81 \times 1{,}09^{-5})}$$

$$D_{11} = (12000 \times 3{,}23972) + (12989{,}81 \times 0{,}649931)$$

$$= 47319{,}09$$

EX 2 :

Désignons par i le taux d'emprunt.

Nous pourrons écrire **: (règle fondamentale n°1)**

* $600\,000\,(1+i)^2 = 300\,000\,(1+i)+393453,75$

Posant (1+i) = x.. On obtient alors, après simplification et transformation :

* $2x^2 - x - 1,3115125 = 0$

équation du second degré dont on ne retient que la racine positive :
. * x = 1,0975 = 1 + i soit = 0,0975.

Tableau d'amortissement

Echéance	Dette	Intérêt	Amortissement	Annuité
1	600 000	54500	241500	300 000
2	358500	34953,75	358000	393453,75

EX 3 :

Annuité constante : $800\,000 \times \dfrac{0,09}{1-1,09^{-12}} = 111720,80$

Ier amortissement : 111720,80,-,(800000 x 0,09) = 39720,8

1) Les procédés

- I er procédé : D_7 : Dette initiale moins dette amortie après 7 échéances :

$$= 800\,000 - 39720,80 \times \frac{1,09^7 - 1}{0,09}$$
$$= 434551,37$$

- Deuxième procédé **: (règle fondamentale 3) :**

$$D_7 = 800\,000 \times 1,09^7 - 111720,80 \times \frac{1,09^7 - 1}{0,07}$$
$$= 1462431,20 - 1027879,90$$
$$= 434551,30$$

- Troisième procédé :

$$D_7 = 111720,80 \times \frac{1 - 1{,}09^{-8}}{0{,}09} = 434551{,}30$$

- Quatrième procédé :

$$D_7 = 800000 \times \frac{1{,}09^{12} - 1{,}09^{7}}{1{,}09^{12}} = 434553{,}98$$

2) **tableau d'amortissement**

Echéance	Dette	Intérêt	Amortissement	Annuité
8	434551,3	39109,62	72611,18	111720,8

Le 8 ème amortissement a été calculé par différence entre l'annuité constante et le 8 ème intérêt. On aurait pu aussi multiplier par le 1er amortissement déjà calculé par $1{,}09.^{7}$

EX 4 :

Nous savons que la dernière annuité et le dernier amortissement sont, en matière d'emprunt, liés par la relations :

$$\mathbf{a_n = mn\ (1 + i\ )}$$

On peut donc écrire $1 + i = \frac{5500}{5000} = 1{,}10$ soit 0,10 ou 10%

Montant initial de l'emprunt **(application de la règle fondamentale n° 2) :**

$(4200 \times 1{,}10^{-1}) + (4200 \times 1{,}10^{-2}) + (4500 \times 1{,}10^{-3})+ (5000 \times 1{,}10^{-4}) + (55000 \times 1{,}10^{-5})$

= 17500