PROBABILITES – EXERCICES CORRIGES

Vocabulaire des probabilités

Exercice n°1.

Dans chacune de situations décrites ci-dessous, énoncer l'événement contraire de l'événement donné.

1) Dans une classe, on choisit deux élèves au hasard. A : « Les deux élèves sont des filles ».
2) Dans un groupe de suisses et de belges, on discute avec une personne. B : « La personne est un homme belge ».
3) Au restaurant, Luc prend un plat et un dessert. C : « Luc prend une viande et une glace ».
4) A une loterie, Elise achète 3 billets.

D : « L'un des billets au moins est gagnant » , E : « Deux billets au maximum sont gagnants.

Exercice n°2.

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. On tire une boule de l'urne. On note :

A : « Tirer une boule blanche ».

B : « Tirer une boule ni blanche ni rouge ».

C : Tirer une boule noire ou une boule rouge ».

1) A et B sont-ils incompatibles ?
2) B et C sont-ils incompatibles ?
3) Traduire par une phrase ne comportant pas de négation $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exercice n°3.

Lors d'un jet de deux dés cubiques, on s'intéresse aux événements suivants :

A : « La somme obtenue est au moins égale à 5 ».

B : « La somme obtenue est au plus égale à 5 ».

C : « La somme obtenue est strictement inférieure à 3 ».

1) A et B sont-ils contraires ?
2) $\overline{B}$ et C sont-ils incompatibles ?
3) Traduire par une phrase $\overline{C}$.

4) A et $\overline{C}$ sont-ils incompatibles ?

Dénombrements simples et probabilités - équiprobabilité

Exercice n°4.

On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On note :

A l'événement : "La carte choisie est un pique".

B l'événement : "La carte choisie est rouge (cœur ou carreau)".

C l'événement : "La carte choisie est une figure (valet, dame, roi)".

1) Présenter un modèle mathématique décrivant l'expérience aléatoire.
2) Déterminer les probabilités des évènements $A, B, C, A\cap B, B\cap C, A\cup B, A\cup C$.
3) Déterminer la probabilité de l'événement D "La carte choisie n'est ni un pique ni une figure".

Exercice n°5.

On jette une pièce de monnaie 3 fois de suite.

1) Donner la liste de tous les résultats possibles en notant P pour Pile et F pour Face (exemple : PPF).

2) Donner la probabilité des événements suivants :

A « le tirage ne comporte que des Piles ».

B « le tirage comporte au moins une fois Face ».

Exercice n°6.

Dans une assemblée de 250 personnes, on ne remarque que les hommes portant la cravate ou ayant les yeux bleus. Il y a 120 hommes qui portent la cravate, 85 hommes qui ont les yeux bleus, dont 50 portent la cravate.

On discute avec une personne choisie au hasard dans cette assemblée.

1) Quelle est la probabilité que ce soit un homme portant la cravate.
2) Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus et portant la cravate.
3) Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus ou portant la cravate.
4) Quelle est la probabilité de discuter avec une personne qui n'est ni un homme aux yeux bleus, ni un homme portant la cravate ?

Exercice n°7.

Lors d'un référendum, deux questions étaient posées.
65 % des personnes ont répondu « oui » à la première question, 51 % ont répondu « oui » à la seconde question, et 46 % ont répondu « oui » aux deux questions.

1) Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondu « oui » à l'une ou l'autre des questions ?
2) Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondu « non » aux deux questions ?

Autres situations

Exercice n°8.

On lance un dé à 6 faces. On note p_i la probabilité de sortie de la face marquée i. Ce dé est truqué de telle sorte que les probabilités de sortie des faces sont : $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}3$; $p_4 = 0{,}1$; $p_5 = 0{,}15$.
Quelle est la probabilité de sortie de la face marquée 6 ?
Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

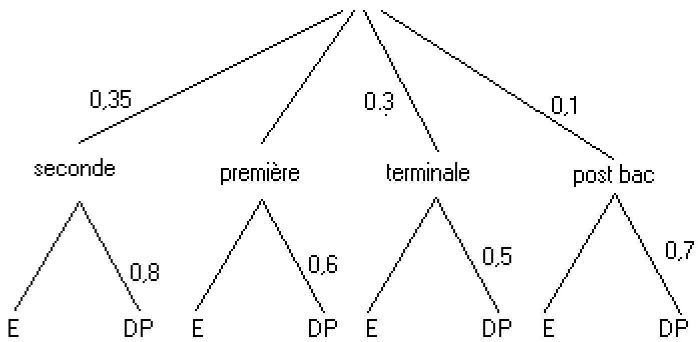
Exercice n°9.

On lance un dé à 6 faces. On suppose que la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro inscrit sur elle.
Calculer la probabilité d'apparition de chaque face.
Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Arbre pondéré

Exercice n°10.

Dans un lycée, quel que soit le niveau, un élève peut être externe ou demi-pensionnaire.
L'arbre ci-contre indique la répartition selon le niveau et la qualité de l'élève (E: externe ; DP: demi-pensionnaire)



1) Recopier et compléter cet arbre.

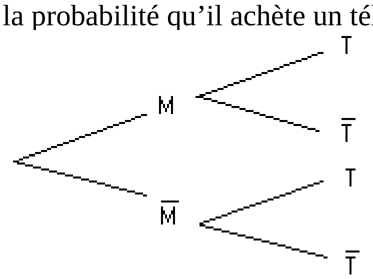
2) a) Déterminer le pourcentage d'élèves externes dans ce lycée.
b) Déterminer la part des Terminales parmi les externes.

Probabilité conditionnelles.

Exercice n°11.

Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'un acheteur potentiel d'un téléviseur et d'un magnétoscope. La probabilité pour qu'il achète un téléviseur est de 0,6.
La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est de 0,4.
La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté de téléviseur est de 0,2.

1) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un téléviseur et un magnétoscope ?
2) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un magnétoscope ?
3) Le client achète un magnétoscope. Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ?
4) Compléter l'arbre de probabilité suivant :



Exercice n°12.

On dispose de deux urnes u_1 et u_2. L'urne u_1 contient trois boules blanches et une boule noire . L'urne u_2 contient une boule blanche et deux boules noires. On lance un dé non truqué. Si le dé donne un numéro d inférieur ou égal à 2, on tire une boule dans l'urne u_1. Sinon on tire une boule dans l'urne u_2. (On suppose que les boules sont indiscernables au toucher)

1) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
2) On a tiré une boule blanche. Calculer le probabilité qu'elle provienne de l'urne u_1.

Exercice n°13.

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

a) Démontrer que la probabilité de tomber malade est égale à $\frac{5}{48}$

b) Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné ?

c) Le vaccin est-il efficace ?

Variable aléatoire

Exercice n°14.

Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule
Si elle est rouge, il gagne 10 € , si elle est jaune, il perd 5 €, si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir replacé la première boule tirée. Si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 €, sinon il perd 4 €.

1) Construire un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de ce jeu.

2) Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur (une perte est comptée négativement).

a) Etablir la loi de probabilité de la variable X

b) Calculer l'espérance de X

3) Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de X soit nulle.

Exercice n°15.

On considère un dé rouge et un dé vert, cubiques, équilibrés.

Le dé rouge comporte : deux faces numérotées -1 ; deux faces numérotées 0 ; -deux faces numérotées 1.

Le dé vert comporte : une face numérotée 0;trois faces numérotées 1;deux faces numérotées 2.

On lance simultanément les deux dés. On note X la somme des points obtenus.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Définir F, fonction de répartition de X et construire sa représentation graphique

Evénements indépendants

Exercice n°16.

Le tableau suivant donne la répartition de 150 stagiaires en fonction de la langue choisie et de l'activité sportive choisie.
On choisit un élève au hasard.

Tennis		Equitation	Voile
Anglais 45 18 27			
Allemand 33 9 18			

1) Les événements « étudier l'allemand » et « pratiquer le tennis » sont-ils indépendants ?

2) Les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer la voile » sont-ils indépendants ?

Loi Binomiale

Exercice n°17.

Dans une académie, les élèves candidats au baccalauréat série ES se répartissent en 2003 selon les trois enseignements de spécialité : mathématiques, sciences économiques et sociales et langue vivante. Nous savons de plus que : 37% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité mathématiques.

25% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité langue vivante.

21% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité mathématiques et ont obtenu le baccalauréat.

32,5% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité SES et ont obtenu le baccalauréat. De plus, parmi les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité langue vivante, 72,5% ont obtenu le baccalauréat. On interroge un candidat pris au hasard. On note :

M l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité mathématiques » ;

S l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité sciences économiques et sociales » ;

L l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité langue vivante » ;

R l'événement « le candidat a obtenu le baccalauréat ».

On pourra faire un arbre pour faciliter la réponse aux questions. Les résultats seront arrondis au millième.

1) Traduire en termes de probabilités les informations numériques données ci-dessus.

2) a) Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de SES.

b) Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de spécialité langue vivante et ait réussi aux épreuves du baccalauréat.

3) Quelle est la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de spécialité langue vivante et ait échoué au baccalauréat ?
4) Ce candidat a choisi l'enseignement de spécialité mathématiques. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas obtenu le baccalauréat ?
5) Montrer que le pourcentage de réussite au baccalauréat pour les candidats de ES dans cette académie est 71,6%.
6) On interroge successivement au hasard et de façon indépendante trois candidats.
a) Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux soit reçu ?
b) Quelle est la probabilité que deux candidats sur trois exactement soient reçus ?

Exercice n°18.
On utilise deux pièces de monnaie : l'une pipée, de sorte que lorsqu'on la lance, la probabilité d'obtenir pile soit $1/4$; l'autre normale dont la probabilité d'obtenir pile est $1/2$ à chaque lancer.
1) On prend une pièce au hasard (chacune des deux pièces a une probabilité $1/2$ d'être prise)
a) Quelle est la probabilité d'obtenir pile ?
b) On a obtenu pile : quelle est la probabilité d'avoir utilisé la pièce pipée.
c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile en faisant trois lancers avec la pièce choisie ?
2) Trois fois on choisit l'une des pièces au hasard qu'on lance (chacune des deux pièces a donc à chaque fois une probabilité $1/2$ d'être lancée) : déterminer la probabilité d'obtenir au moins une fois pile
3) On lance les deux pièces ensembles : quelle est la probabilité d'obtenir le même résultat pour les deux pièces ?

Exercice n°19.
On sélectionne les candidats à un jeu télévisé en les faisant répondre à dix questions. Ils devront choisir, pour chacune des questions, parmi quatre affirmations, celle qui est exacte. Un candidat se présente et répond à toutes les questions *au hasard*. On appelle X la variable aléatoire désignant le nombre de réponses exactes données par ce candidat à l'issue du questionnaire.
1) Quelle est la loi de probabilité de X ?
2) Calculer la probabilité pour qu'il fournisse au moins 8 bonnes réponses, et soit ainsi sélectionné.

Exercice n°20.
Une urne contient 3 pièces équilibrées. Deux d'entre elles sont normales : elles possèdent un côté « Pile » et un côté « Face ». La troisième est truquée et possède deux côtés « Face ».
On prend une pièce au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de cette pièce. On considère les évènements suivants:
B : la pièce prise est normale. $\overline{B}$: la pièce prise est truquée.
P : on obtient « Pile » au premier lancer. F_n : on obtient « Face » pour les n premiers lancers.
1) a) Quelle est la probabilité de l'évènement B ?
b) Quelle est la probabilité de l'évènement P sachant que B est réalisé ?
2) Calculer la probabilité de l'événement $P \cap B$, puis de l'évènement $P \cap \overline{B}$.
En déduire la probabilité de l'évènement P.
3) Calculer la probabilité de l'évènement $F_n \cap B$ puis de l'évènement $F_n \cap \overline{B}$.
En déduire la probabilité de l'évènement F_n.

Exercice n°21.
Un sondage est effectué dans un conservatoire de musique.
60 % des élèves pratiquent un instrument à cordes (C) . 45 % des élèves pratiquent un instrument à vent (V)
10 % des élèves pratiquent un instrument à cordes et vent.
1) On choisit un élève au hasard dans le conservatoire.
a) Quelle est la probabilité de l'événement « Cet élève pratique au moins un des instruments considérés »
b) Quelle est la probabilité de l'événement « Cet élève pratique un et un seul des instruments considérés »
2) On choisit au hasard un élève pratiquant un instrument C. Quelle est la probabilité pour que cet élève pratique un instrument V ?
3) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On choisit au hasard n élèves. On suppose que le nombre d'élèves du conservatoire est suffisamment grand pour que la probabilité de rencontrer un instrumentiste du type donné soit constante au cours du sondage.
a) Quelle est la probabilité p_n qu'au moins un des élèves choisis pratique un instrument C ?
b) Déterminer le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0,999$

Exercice n°22.

Une urne contient 10 bulletins indiscernables au toucher, de 3 sortes : 4 sont marqués « oui », 3 sont marqués « non » et 3 sont marqués « blanc ».
Un joueur tire simultanément deux bulletins de l'urne. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un tirage de deux bulletins de sortes différentes.

Exercice n°23.

Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).
1) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer les probabilités :
a) De ne tirer que 3 jetons verts ;
b) De ne tirer aucun jeton vert
c) De tirer au plus 2 jetons verts ;
d) De tirer exactement 1 jeton vert.
2) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac. Reprendre alors les questions a), b), c) et d).

Graphes probabilistes

Exercice n°24.

Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils nomment respectivement Aurore et Boréale.
Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité.
L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires.
Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.
Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale. Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10% des personnes préférant Aurore et 15 % des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre.
La semaine du début de la campagne est notée semaine 0.
Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n \;\; b_n)$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n la probabilité que cette personne préfère Boréale la semaine n.

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, A pour Aurore et B pour Boréale.
3. a. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
b. Montrer que la matrice ligne P_1 est égale à $(0{,}3 \;\; 0{,}7)$.
4. a. Exprimer, pour tout entier naturel n, P_n en fonction de P_0 et de n.
b. En déduire la matrice ligne P_3. Interpréter ce résultat.
Dans la question suivante, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.
5. Soit $P = (a \;\; b)$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.
a. Déterminer a et b.
b. Le parfum Aurore finira-t-il par être préféré au parfum Boréale ? Justifier.

PROBABILITES – CORRECTION

Exercice n°1

1) L'événement $\overline{A}$ est « au moins un des deux élèves est un garçon ».

2) L'événement $\overline{B}$ est « La personne est soit une femme, soit un suisse ».

3) L'événement $\overline{C}$ est « Luc ne prend pas de viande ou ne prend pas de glace ».

4) L'événement $\overline{D}$ est « aucun billet n'est gagnant ».

5) L'événement $\overline{E}$ est « les trois billets sont gagnants ».

Exercice n°2

1) A et B sont incompatibles car une boule ne peut être simultanément blanche et non blanche.
2) B et C ne sont pas incompatibles car le tirage d'une boule noire les réalise simultanément.

3) L'événement $\overline{A}$ est « tirer une boule noire ou rouge ».

4) L'événement $\overline{B}$ est « tirer une boule blanche ou rouge ».

Exercice n°3

1) A et B ne sont pas contraires car une somme égale à 5 les réalise simultanément.

2) $\overline{B}$ et C sont incompatibles car la somme ne peut être simultanément strictement supérieure à 5 (événement $\overline{B}$) et strictement inférieure à 3 (événement C).

3) L'événement $\overline{C}$ est « La somme est supérieure ou égale à 3 ».

4) A et $\overline{C}$ ne sont pas incompatibles car ils sont simultanément réalisés par une somme supérieure ou égale à 5.

Exercice n°4

1) On note Ω l'univers des possibles, ensemble des 32 cartes du jeu. Ainsi $Card(\Omega)=32$.

Il y a équiprobabilité des tirages de cartes. Ainsi

2) $p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$, $p(B)=\frac{Card(B)}{Card(\Omega)}=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$, $p(C)=\frac{Card(C)}{Card(\Omega)}=\frac{3\times 4}{32}=\frac{3}{8}$,

$p(A\cap B)=0$ car une carte ne peut être simultanément rouge et pique,

$p(B\cap C)=\frac{Card(B\cap C)}{Card(\Omega)}=\frac{6}{32}=\frac{3}{16}$.

$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-0=\frac{3}{4}$.

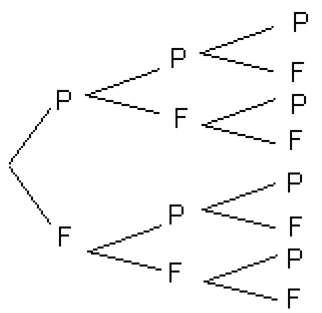
$p(A\cup C)=p(A)+p(C)-p(A\cap C)=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}-\frac{3}{32}=\frac{17}{32}$.

3) On cherche $p(\overline{A\cup C})=1-p(A\cup C)=1-\frac{17}{32}=\frac{15}{32}$.

Remarque : on a $p(\overline{A\cup C})=p(\overline{A}\cap\overline{C})$.

Exercice n°5

1) A l'aide d'un arbre comme ci-contre,



On peut lister $\Omega=\{PPP;PPF;PFP;PFF;FPP;FPF;FFP;FFF\}$.

D'où $Card(\Omega)=8$.

2) Les tirages étant équiprobables, on a $p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{1}{8}$ (seul le tirage PPP convient).

Enfin, on remarque que $B=\overline{A}$ donc $p(B)=1-p(A)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

Exercice n°6

Le tableau suivant permet de dénombrer les différentes catégories :

Cravate	(événement C)	Pas de Cravate (événement $\overline{C}$)	Total
Yeux Bleus (événement B)	50 35 85		
Yeux non bleus (événement $\overline{B}$)	70 95 165		
Total 120 130 250			

On note Ω l'univers des possibles, ensemble des 250 personnes. Ainsi $Card(\Omega) = 250$.

Il y a équiprobabilité des choix de personnes. Ainsi

1) $p(C) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{120}{250} = \frac{12}{25}$, 2) $p(B\cap C) = \frac{Card(B\cap C)}{Card(\Omega)} = \frac{50}{250} = \frac{1}{5}$

3) $p(B\cup C) = p(B)+p(C)-p(B\cap C) = \frac{85}{250}+\frac{120}{250}-\frac{50}{250} = \frac{155}{250} = \frac{31}{50}$ (on pouvait aussi directement écrire $p(B\cup C) = \frac{Card(B\cup C)}{Card(\Omega)} = \frac{50+70+35}{250} = \frac{155}{250} = \frac{31}{50}$).

3) $p(\overline{B}\cap\overline{C}) = p(\overline{B\cup C}) = 1-p(B\cup C) = 1-\frac{31}{50} = \frac{19}{50}$.

Exercice n°7

Si on note A l'événement « la personne a répondu oui à la première question » et B l'événement « la personne a répondu oui à la deuxième question », l'énoncé nous fournit $p(A)=0,65$, $p(B)=0,51$ et $p(A\cap B)=0,46$.

1) On calcule $p(A\cup B) = p(A)+p(B)-p(A\cap B) = 0,65+0,51-0,46 = 0,7$.

2) On calcule $p(\overline{A}\cap\overline{B}) = p(\overline{A\cup B}) = 1-p(A\cup B) = 1-0,7 = 0,3$.

Exercice n°8

Si on note p_6 la probabilité d'apparition du chiffre 6, la somme des probabilités des événements élémentaires valant 1, on a $p_6 = 1-(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5) = 1-0,85 = 0,15$.

L'événement A « obtenir un nombre pair » étant $A=\{2;4;6\}$, on a $p(A) = p_2+p_4+p_6 = 0,2+0,1+0,15 = 0,45$.

Il ne fallait surtout pas écrire $p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ car il n'y a pas équiprobabilité des faces de dés.

Exercice n°9

Si on note p la probabilité d'apparition du chiffre 1, les probabilités d'apparition des autres faces sont respectivement égales à $2p, 3p, 4p, 5p, 6p$, puisque proportionnelles au numéro de chaque face.

Puisque la somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1, on a $p+2p+3p+4p+5p+6p=1$, donc $21p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{21}$. On en déduit donc :

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

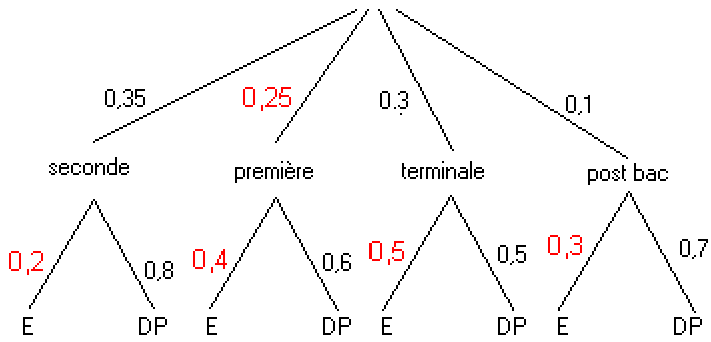
Et ainsi , l'événement A « obtenir un nombre pair » étant $A=\{2;4;6\}$, on a $p(A) = \frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21} = \frac{12}{21}$.

Il ne fallait surtout pas écrire $p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ car il n'y a pas équiprobabilité des faces de dés.

Exercice n°10

L'arbre nous renseigne sur le fait que « 35 % des élèves du lycée sont en seconde, et parmi ces élèves de seconde, 80 % sont demi-pensionnaires, etc… ».

1) La somme des poids figurant sur les arêtes au départ de chaque « nœud » doit être égale à 1 (coefficients multiplicateurs traduisant des pourcentages). On obtient ainsi l'arbre :

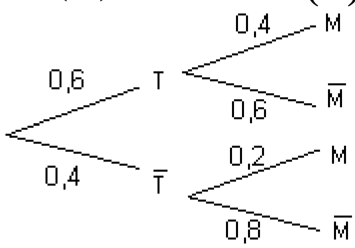


2) Les élèves de seconde externes représentent une fraction de l'effectif total égale à $0{,}35\times0{,}2=0{,}07$, soit 7 %.
Les externes représentent donc une fraction égale à $0{,}35\times0{,}2+0{,}25\times0{,}4+0{,}3\times0{,}5+0{,}1\times0{,}3=0{,}35$, soit 35 %.

3) Sur 1000 élèves, 350 sont donc externes. Les élèves de terminale externes représentent $1000\times0{,}3\times0{,}5=150$ élèves, soit une part égale à $\frac{150}{350}\times100\approx43\%$ à 1% près..

Exercice n°11

On note T l'événement « le client achète un téléviseur » et M l'événement « le client achète un magnétoscope ».
L'énoncé fournit $p(T)=0{,}6$ (donc $p(\overline{T})=1-0{,}6=0{,}4$), $p_T(M)=0{,}4$ (donc $p_T(\overline{M})=1-0{,}4=0{,}6$), et $p_{\overline{T}}(M)=0{,}2$ (donc $p_{\overline{T}}(\overline{M})=1-0{,}2=0{,}8$)
ce que l'on peut traduire par l'arbre de probabilités



1) En appliquant la formule de définition d'une probabilité conditionnelle, dans sa « version multiplicative »,

$$p_T(M)=\frac{p(T\cap M)}{p(T)}\Leftrightarrow p(T\cap M)=p(T)\times p_T(M)=0{,}6\times0{,}4=0{,}24$$

2) En appliquant la formule des probabilités totales,

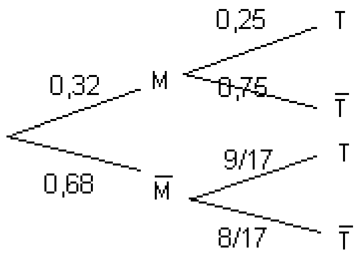
$$p(M)=p(T\cap M)+p(\overline{T}\cap M)$$
$$=p(T)\times p_T(M)+p(\overline{T})\times p_{\overline{T}}(M)$$
$$=0{,}6\times0{,}4+0{,}4\times0{,}2=0{,}32$$

3) On demande $p_M(T)=\frac{p(M\cap T)}{p(M)}=\frac{0{,}6\times0{,}4}{0{,}32}=0{,}75$

4) Puisque $p(M)=0{,}32$, on a $p(\overline{M})=1-0{,}32=0{,}68$. Puisque $p_M(T)=0{,}75$, on a $p_M(\overline{T})=1-0{,}75=0{,}25$

On calcule de la même manière qu'à la question 3), $p_{\overline{M}}(T)=\frac{p(\overline{M}\cap T)}{p(\overline{M})}=\frac{0{,}6\times0{,}6}{0{,}68}=\frac{0{,}36}{0{,}68}=\frac{9}{17}$, donc

$p_{\overline{M}}(\overline{T})=1-\frac{9}{17}=\frac{8}{17}$. On peut donc « inverser » l'arbre de probabilité :



Exercice n°12

Notons Ω l'ensemble des résultats possibles du jet de dé. On a donc $Card(\Omega)=6$.

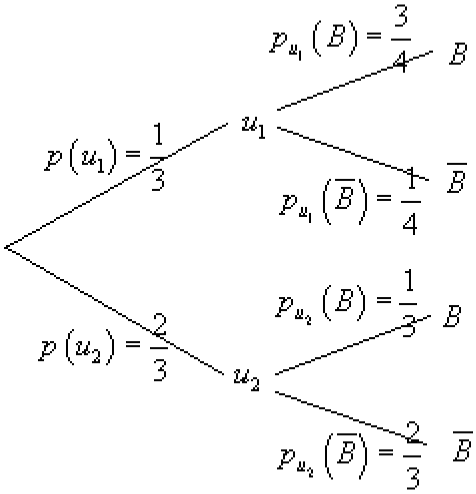
Notons u_1 l'événement « Le tirage s'effectue dans l'urne u_1 » et u_2 l'événement « Le tirage s'effectue dans l'urne u_2 ».

Notons B l'événement « obtenir une boule blanche »

La répartition des boules blanches et noires données dans l'énoncé nous fournit les probabilités : $p_{u_1}(B)=\frac{3}{4}$ donc $p_{u_1}(\overline{B})=\frac{1}{4}$, ainsi que $p_{u_2}(B)=\frac{1}{3}$ et $p_{u_2}(\overline{B})=\frac{2}{3}$

Enfin, puisqu'il y a équiprobabilité dans les résultats du lancer de dé, $p(u_1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ et $p(u_2)=\frac{2}{3}$.

On peut résumer cette situation par l'arbre de probabilités suivant :



1) En appliquant la formule des probabilités totales,

$$p(B)=p(B\cap u_1)+p(B\cap u_2)$$
$$=p(u_1)\times p_{u_1}(B)+p(u_2)\times p_{u_2}(B)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{2}{9}=\frac{17}{36}$$

2) On demande $p_B(u_1)$. Puisque $p(B)\neq 0$, on peut appliquer la formule de définition de la probabilité conditionnelle de l'événement u_1 conditionné par B : $p_B(u_1)=\frac{p(B\cap u_1)}{p(B)}=\frac{p(u_1)\times p_{u_1}(B)}{p(B)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}{\frac{17}{36}}=\frac{1}{4}\times\frac{36}{17}=\frac{9}{17}$

Exercice n°13

Notons V l'événement « être vacciné » et M l'évémement « être malade »

L'énoncé fournit $p(V)=\frac{1}{4}$ donc $p(\overline{V})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. De plus $p_M(\overline{V})=4\times p_M(V)$. Puisque $p_M(V)+p_M(\overline{V})=1$, on déduit $p_M(V)=\frac{1}{5}$ et $p_M(\overline{V})=\frac{4}{5}$. Enfin l'énoncé indique que $p_V(M)=\frac{1}{12}$ donc $p_V(\overline{M})=\frac{11}{12}$.

a) La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{V,\overline{V}\}$ permet de calculer :

$$p(M)=p(M\cap V)+p(M\cap\overline{V})=p(V)\,p_V(M)+p(\overline{V})\,p_{\overline{V}}(M)$$

Puisque $p_{\overline{V}}(M)=\frac{p(M\cap\overline{V})}{p(\overline{V})}=\frac{p(M)\times p_M(\overline{V})}{\frac{3}{4}}=\frac{p(M)\times\frac{4}{5}}{\frac{3}{4}}=\frac{16}{15}p(M)$, on se retrouve avec l'équation $p(M)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{12}+\frac{3}{4}\times\frac{16}{15}p(M)\Leftrightarrow p(M)-\frac{12}{15}p(M)=\frac{1}{48}\Leftrightarrow p(M)\left(1-\frac{12}{15}\right)=\frac{1}{48}$ d'où l'on tire :

$$\boxed{p(M)=\frac{1}{48}\times\frac{15}{3}=\frac{5}{48}}$$

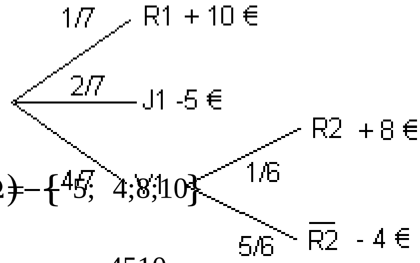
b) Du coup, on calcule $\boxed{p_{\overline{V}}(M)=\frac{16}{15}p(M)=\frac{16}{15}\times\frac{5}{48}=\frac{1}{9}}$

c) D'après les calculs précédents, en moyenne, 1 individu sur 9 non vaccinés tombe malade, contre 1 individu sur 12 vaccinés….

Exercice n°14

On désigne par R_1 l'événement « la boule tirée au 1er tirage est rouge », R_2 l'événement « la boule tirée au 2 ème tirage est rouge », et ainsi de suite avec les autres couleurs. Par équiprobabilité , on a $p(R_1)=\frac{1}{7}$, $p(J_1)=\frac{2}{7}$ et $p(V_1)=\frac{4}{7}$ En cas de deuxième tirage, l'urne ne contient plus que 6 boules, dont une rouge, deux jaunes et trois vertes, ce qui permet d'affirmer que $p_{V_1}(R_2)=\frac{1}{6}$ donc $p_{V_1}\left(\overline{R_2}\right)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

1) L'arbre de probabilités (et les gains qui sont associés au différents événements) est donc



2) a) X peut prendre quatre valeurs distinctes : -5 , -4 , +8 , 10 (on note $X(\Omega)=\{-5;-4;8;10\}$)

On détermine les probabilités :

$p(X=-5)=p(J_1)=\frac{2}{7}$ $p(X=-4)=p\left(V_1\cap\overline{R_2}\right)=p(V_1)\times p_{V_1}\left(\overline{R_2}\right)=\frac{4}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{10}{21}$

$p(X=+8)=p(V_1\cap R_2)=p(V_1)\times p_{V_1}(R_2)=\frac{4}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{21}$ $p(X=+10)=p(R_1)=\frac{1}{7}$

Les résultats présentés dans un tableau sont :

x_i	-5	-4	8	10
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$

b) Par définition, $E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i\,p(X=x_i)$

$=-5\times p(X=-5)+(-4)\times p(X=-4)+8\times p(X=8)+10\times p(X=10)$

$=-5\times\frac{2}{7}-4\times\frac{10}{21}+8\times\frac{2}{21}+10\times\frac{1}{7}=-\frac{24}{21}=-\frac{8}{7}$

3) Notons a le gain correspondant à l'événement $V_1\cap R_2$.

On a donc $E(X)=-5\times\frac{2}{7}-4\times\frac{10}{21}+a\times\frac{2}{21}+10\times\frac{1}{7}=\frac{2a-40}{21}$

Il suffit alors de résoudre l'équation : $E(X)=0\Leftrightarrow 2a-40=0\Leftrightarrow a=20$ €

Exercice n°15

On peut consigner les résultats dans le tableau suivant :

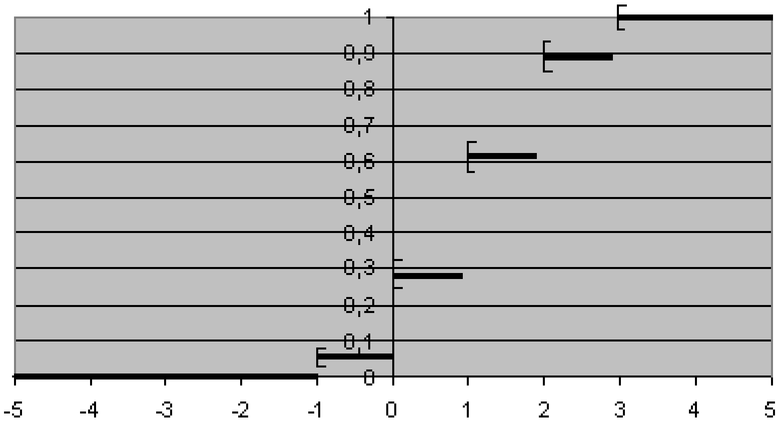
Dé vert / Dé Rouge	0	1	1	1	2	2
-1	-1	0	0	0	1	1
-1	-1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	2	2
0	0	1	1	1	2	2
1	1	2	2	2	3	3
1	1	2	2	2	3	3

1) Si on note X la somme des points obtenus, on a donc $X(\Omega)=\{-1;0;1;2;3\}$, avec

x_i	-1	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$	$\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$	$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$	$\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$	$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

2) On définit ainsi la fonction de répartition de X par : $F(x)=p(X\leq x)=$

$$\begin{cases}0 \text{ si } x<-1\\ \frac{1}{18} \text{ si } -1\leq x<0\\ \frac{1}{18}+\frac{2}{9}=\frac{5}{18} \text{ si } 0\leq x<1\\ \frac{1}{18}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=\frac{11}{18} \text{ si } 1\leq x<2\\ \frac{1}{18}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{5}{18}=\frac{8}{9} \text{ si } 2\leq x<3\\ \frac{1}{18}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{5}{18}+\frac{1}{9}=1 \text{ si } 3\leq x\end{cases}$$



Exercice n°16

Après avoir complété le tableau des effectifs :

	Tennis (T)	Equitation (E)	Voile (V)	Total
Anglais (A)	45	18	27	90
Allemand (D)	33	9	18	60
Total 78		27 45		150

On choisit un élève au hasard et on note On note Ω l'univers des possibles, ensemble des 150 élèves . Ainsi $Card(\Omega) = 32$. Il y a équiprobabilité dans le choix des élèves. Ainsi pour tout événement A, $p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

1) On calcule séparément :

$p(D\cap T) = p_T(D)\times p(T) = \frac{11}{26}\times\frac{78}{150} = \frac{11}{50}$ et $p(T)\times p(D) = \frac{78}{150}\times\frac{60}{150} = \frac{26}{50}\times\frac{20}{50} = \frac{13}{25}\times\frac{2}{5} = \frac{26}{125}$

Puisque $p(D\cap T) \neq p(T)\times p(D)$, on peut conclure que les événements « étudier l'allemand » et « pratiquer le tennis » ne sont pas indépendants

2) On calcule séparément :

$p(A\cap V) = p_V(A)\times p(V) = \frac{27}{45}\times\frac{45}{150} = \frac{27}{150} = \frac{9}{50}$ et $p(A)\times p(V) = \frac{90}{150}\times\frac{45}{150} = \frac{3}{5}\times\frac{3}{10} = \frac{9}{50}$

Puisque $p(A\cap V) = p(A)\times p(V)$, on peut conclure que les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer la voile » sont indépendants

Exercice n°17

Le début de l'exercice est l'archétype classique d'un exercice de probabilités conditionnelles.

1) En utilisant les notations de l'énoncé, nous avons $p(M) = 0{,}37$, $p(L) = 0{,}25$, $p(M\cap R) = 0{,}21$, $p(S\cap R) = 0{,}325$ et $p_L(R) = 0{,}725$

2) a) On calcule $p(S) = 1-(p(M)+p(L)) = 1-(0{,}37+0{,}25) = 1-0{,}62 = 0{,}38$

b) On calcule $p(L\cap R) = p(L)\times p_L(R) = 0{,}25\times 0{,}725 = 0{,}18125 \approx 0{,}181$ arrondi au millième

3) On calcule $p(L\cap\overline{R}) = p(L)\times p_L(\overline{R}) = 0{,}25\times(1-p_L(R)) = 0{,}25\times(1-0{,}725) = 0{,}06875 \approx 0{,}069$ arrondi au millième

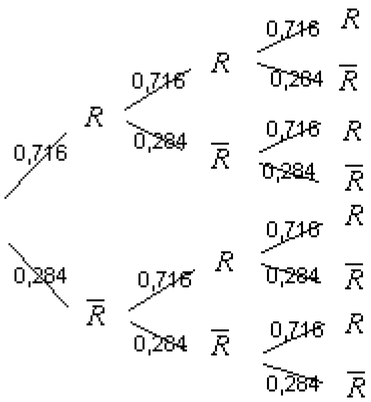
4) On calcule $p_M(\overline{R}) = \frac{p(M\cap\overline{R})}{p(M)} = \frac{p(M\cap\overline{R})}{0{,}37}$ arrondi au millième. Puisque $p(M) = 0{,}37$ et $p(M\cap R) = 0{,}21$, on calcule $p_M(R) = \frac{p(M\cap R)}{p(M)} = \frac{0{,}21}{0{,}37} = \frac{21}{37}$ et donc $p_M(\overline{R}) = 1-p_M(R) = 1-\frac{21}{37} = \frac{16}{37} \approx 0{,}432$ arrondi à 10^{-3}

5) En appliquant la formule des probabilités totales,

$p(R) = p(L\cap R)+p(S\cap R)+p(M\cap R) \approx 0{,}181+0{,}325+0{,}21 \approx 0{,}716$, d'où la réponse

6) On répète 3 fois successivement, et de manière indépendante, la même épreuve consistant à choisir un élève qui peut avoir été reçu (issue R que nous appellerons SUCCES, de probabilité 0,716) ou qui peut avoir échoué (issue $\overline{R}$ que nous appellerons ECHEC, de probabilité 1-0,716=0,284). Le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètre 3 et 0,716.

On peut matérialiser cette situation par un arbre :



a) L'événement contraire de l'événement « au moins un des trois candidats est reçu » est l'événement « les trois candidats ne sont pas reçus », de probabilité $0,284^3$. L'événement considéré a donc pour probabilité $1-0,284^3 \approx 0,977$ arrondi au millième

b) Pour calculer la probabilité que deux candidats sur trois exactement soient reçus, soit on compte le nombre de chemins répondant à cette situation sur l'arbre (on en compte trois : $RR\overline{R}$, $R\overline{R}R$ et $\overline{R}RR$, chacun d'eux représentant une probabilité égale à $0,716^2 \times 0,284$), soit on applique la formule donnant le nombre de succès dans une situation binomiale, pour aboutir au calcul :

$$\begin{array}{l}\text{nombre de répétitions} \\ \text{nombre de succès}\end{array}\binom{3}{2} \times \underbrace{0,716}_{\text{probabilité d'un succès}}^{\overset{\text{nombre de succès}}{2}} \times \underbrace{0,284}_{\text{probabilité d'un échec}}^{\overset{\text{nombre d'échec}}{1}} = 3 \times 0,716^2 \times 0,284 \approx 0,437 \text{ arrondi au millième}$$

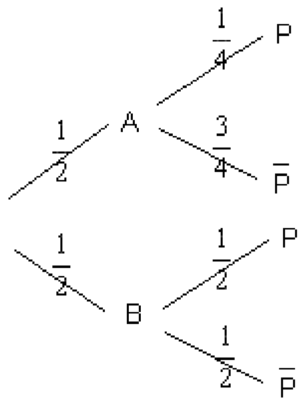
Exercice n°18

Notons A l'événement « le lancer s'effectue avec la pièce truquée » et B l'événement « le lancer s'effectue avec la pièce équilibrée ». L'énoncé nous fournit $p(A)=p(B)=\frac{1}{2}$.

1) (a) Notons P l'événement « obtenir Pile lors d'un lancer ». L'énoncé nous fournit

$p_A(P)=\frac{1}{4}$ donc $p_A\left(\overline{P}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$; et $p_B(P)=\frac{1}{2}$ donc $p_B\left(\overline{P}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Ceci peut se traduire par l'arbre de probabilités →

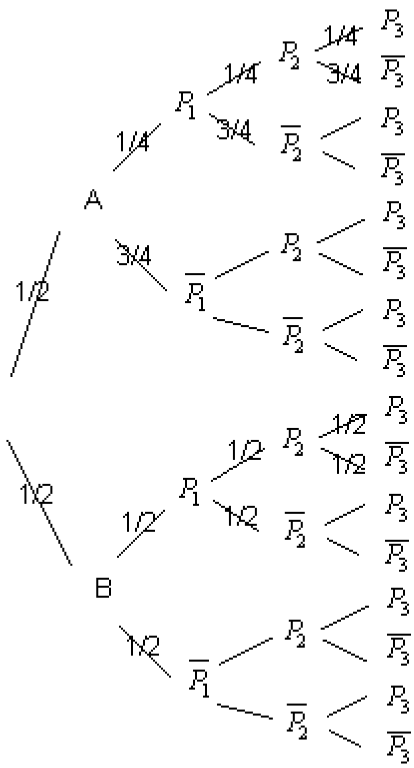


La formule des probabilités totales appliqué au système complet $\{A ; B\}$ fournit :

$$\boxed{p(P)=p(A)p_A(P)+p(B)p_B(P)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}}$$

(b) On demande $\boxed{p_P(A)=\frac{p(A\cap P)}{p(P)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{8}\times\frac{8}{3}=\frac{1}{3}}$

(c) Notons P_1, P_2, P_3 les probabilités d'obtenir Pile respectivement aux tirages n°1,2 et 3. On peut ainsi dresser l'arbre de probabilité :



Raisonnons avec l'événement contraire de « obtenir au moins une fois pile », qui est « obtenir trois fois face ». D'après la formule des probabilités totales, ce dernier événement a pour probabilité :

$$p(F_1F_2F_3)=p(A\cap F_1F_2F_3)+p(B\cap F_1F_2F_3)$$
$$=p(A)\times p_A(F_1F_2F_3)+p(B)\times p_B(F_1F_2F_3)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{27}{128}+\frac{1}{16}=\frac{35}{128}$$

La probabilité d'obtenir au moins une fois pile avec une pièce choisie est donc égale à $\boxed{1-\frac{35}{128}=\frac{93}{128}}$

2) La situation est cette fois ci différente de la question 1) (c) car on retire une pièce au hasard avant chaque lancer. On répète ainsi 3 fois consécutivement et

de manière indépendante, l'épreuve de Bernoulli décrite dans la question 1) (a), qui admet deux issues : $p(P)=\frac{3}{8}$ donc $p(\overline{P})=\frac{5}{8}$. Le nombre de succès (obtention de Pile) sur les trois répétitions suit donc une loi binomiale de paramètre $p(P)=\frac{3}{8}$ et $n=3$. On raisonne encore une fois avec l'événement contraire de « obtenir au moins une fois pile », qui est « obtenir trois fois face », de probabilité $\left(p(\overline{P})\right)^3=\left(\frac{5}{8}\right)^3=\frac{125}{512}$. La probabilité d'obtenir au moins une fois pile sur les trois lancers (et choix) est donc $\boxed{1-\frac{125}{512}=\frac{387}{512}}$

3) Les résultats des deux pièces sont indépendants l'un de l'autre. Si on note P_A l'événement « obtenir Pile à l'aide de la pièce truquée » et P_B l'événement « obtenir Pile à l'aide de la pièce équilibrée», l'événement cherché aura donc une probabilité égale à :

$$\boxed{p\left((P_A\cap F_B)\cup(F_A\cap P_B)\right)=p(P_A)\times p(F_B)+p(F_A)\times p(P_B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}}$$

Exercice n°19

1) On répète 10 fois successivement, et de manière indépendante, la même épreuve consistant à répondre à une question en choisissant au hasard et de manière équiprobable une réponse parmi les quatre proposées. Chaque épreuve a donc une probabilité de réussite égale à $p=0,25$ et une probabilité 'échec égale à $q=1-p=1-0,25=0,75$. Le nombre de succès X parmi les 10 répétitions suit donc une loi binomiale de paramètre 10 et 0,25.

2) On a ainsi :

$p(X=8)=\binom{10}{8}0,25^8\times0,75^2=\frac{10\times9}{2}\times0,25^8\times0,75^2$, $p(X=9)=\binom{10}{9}0,25^9\times0,75^1=10\times0,25^9\times0,75$ et enfin $p(X=10)=\binom{10}{10}0,25^{10}\times0,75^0=0,25^{10}$. L'événement considéré a donc pour probabilité la somme de ces trois derniers nombres.

Exercice n°20

1) a) Les choix de pièces dans l'urne étant équiprobables, $p(B)=\frac{Card(B)}{Card(\Omega)}=\frac{2}{3}$

b) Si l'événement B est réalisé, c'est-à-dire si une pièce « normale » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Pile » vaut $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $p_B(P)=\frac{1}{2}$

2) On calcule $p(P\cap B)=p(B)\times p_B(P)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

Puisque $p(B)=\frac{2}{3}$, alors $p(\overline{B})=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. Si l'événement $\overline{B}$ est réalisé, c'est-à-dire si une pièce « truquée » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Pile » est nulle, puisque la pièce truquée possède «deux « faces ». Ainsi $p_{\overline{B}}(P)=0$. On en déduit $p(P\cap\overline{B})=p(\overline{B})\times p_{\overline{B}}(P)=\frac{1}{3}\times0=0$.

En utilisant la formule des probabilités totales, pusique le système $(B,\overline{B})$ est un système complet d'événement, on obtient $p(P)=p(P\cap B)+p(P\cap\overline{B})=\frac{1}{3}$

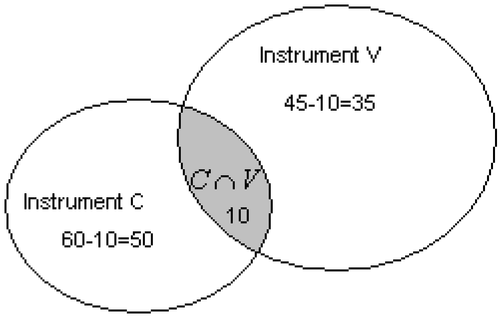
3) Si l'événement B est réalisé, c'est-à-dire si une pièce « normale » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Face » au cours des n premiers lancers suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$, donc $p_B(F_n)=\binom{n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^0=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, et ainsi

$p(F_n\cap B)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Si l'événement $\bar{B}$ est réalisé, c'est-à-dire si une pièce « truquée » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Face » vaut 1 à chaque lancer, donc la probabilité d'obtenir « Face » au cours des n premiers lancers vaut 1, c'est-à-dire $p_{\bar{B}}(F_n)=1$ et ainsi $p(F_n\cap\bar{B})=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$

En utilisant la formule des probabilités totales, puisque le système $(B,\bar{B})$ est un système complet d'événement, on obtient $p(F_n)=p(B)p_B(F_n)+p(\bar{B})p_{\bar{B}}(F_n)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}$

<u>Exercice n°21</u>



L'énoncé nous fournit $p(C)=0,6$, $p(V)=0,45$ et $p(C\cap V)=0,1$

1) On calcule $p(C\cup V)=p(C)+p(V)-p(C\cap V)=0,6+0,45-0,1=0,95$

(on aurait pu aussi raisonner avec les effectifs ramenés à 100 élèves, conformément au diagramme ci-contre)

2) a) On calcule $p(C\cup V)-p(C\cap V)=0,95-0,1=0,85$

(on aurait pu aussi raisonner avec les effectifs ramenés à 100 élèves, conformément au diagramme ci-dessus)

b) L'énoncé (ou le diagramme) fournit $p_C(V)=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$

3) On répète n fois successivement, et de manière indépendante, la même épreuve consistant à choisir un élève qui peut pratiquer un instrument C (SUCCES, de probabilité 0,6) ou ne pas pratiquer un instrument C (issue $\bar{C}$ que nous appellerons ECHEC, de probabilité 1-0,6=0,4). Le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètre n et 0,6.

a) L'événement contraire de l'événement « au moins un des élèves choisis pratique un instrument C » est l'événement « les n élèves choisis ne pratiquent pas un instrument C » de probabilité $0,4^n$. Ainsi $p_n=1-0,4^n$

b)

$p_n\geq 0,999\Leftrightarrow 1-0,4^n\geq 0,999\Leftrightarrow 0,4^n\leq 0,001$

$\Leftrightarrow \ln\left(0,4^n\right)\leq\ln 0,001$ car la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow n\ln(0,4)\leq\ln 0,001$

$\Leftrightarrow n\geq\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,4)}$ car $\ln(0,4)<0$

$\Leftrightarrow n\geq 7,53$ à 10^{-2} près

Puisque n est entier, on déduit donc $n\geq 8$

<u>Exercice n°22</u>

L'univers est constitué de l'ensemble des combinaisons de 2 éléments pris parmi 10, d'où $Card(\Omega)=\binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2\times 1}=45$.

Notons A l'événement « d'obtenir deux bulletins de sortes différentes ».

2 raisonnements s'offrent à nous :

- Ou bien on décide de déterminer $Card(A)$. Il y a trois possibilités (1 bulletin « oui » et 1 bulletin « non », 1 bulletin « oui » et 1 bulletin « blanc », ou 1 bulletin « non » et 1 bulletin « blanc ») donc

$Card(A)=\binom{4}{1}\binom{3}{1}+\binom{4}{1}\binom{3}{1}+\binom{3}{1}\binom{3}{1}=4\times 3+4\times 3+3\times 3=33$, et ainsi $p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{33}{45}=\frac{11}{15}$

- Ou bien on raisonne avec l'événement contraire $\bar{A}$ qui est « obtenir deux bulletins identiques ». Il y a trois possibilités (deux bulletins « oui », deux bulletins « non » , deux buleltins « blanc », donc

$Card(\bar{A})=\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{3}{2}=\frac{4\times 3}{2}+\frac{3\times 2}{2}+\frac{3\times 2}{2}=6+3+3=12$, d'où $p(\bar{A})=\frac{Card(\bar{A})}{Card(\Omega)}=\frac{12}{45}=\frac{4}{15}$ et donc

$p(A)=1-p(\bar{A})=1-\frac{4}{15}=\frac{11}{15}$

Les deux méthodes fournissent le même résultat !

Exercice n°23

1) Tirages successifs sans remise de 3 jetons parmi 9. Il y a $A_9^3=504$ possibilités

a) Notons A l'événement « Tirer 3 jetons verts ». On a $p(A)=\frac{A_5^3}{A_9^3}=\frac{5}{42}$

b) Notons B l'événement « Ne tirer aucun jeton vert ». On a $p(B)=\frac{A_4^3}{A_9^3}=\frac{1}{21}$

c) Notons C l'événement « Tirer au plus 2 jetons verts »

1ère méthode : $p(C)=p(\overline{A})=1-p(A)=1-\frac{5}{42}=\frac{37}{42}$

2ème méthode

$$p(C)=\frac{\underbrace{A_4^3}_{\text{Ne tirer aucun vert}}+\underbrace{3\times A_5^1\times A_4^2}_{\substack{\text{Tirer exactement 1 vert :}\\ \text{- choix de la place du jeton vert}\\ \text{- choix d'1 vert et de 2 rouges}}}+\underbrace{3\times A_5^2\times A_4^1}_{\text{Tirer exactement 2 verts}}}{A_9^3}=\frac{37}{42}$$

d) Soit D l'événement « Tirer exactement 1 jeton vert ». $p(D)=\frac{3\times A_5^1\times A_4^2}{A_9^3}=\frac{5}{14}$

2) Tirages simultanés de 3 jetons parmi 9. Il y a $C_9^3=84$ possibilités

a) Notons A l'événement « Tirer 3 jetons verts ». On a $p(A)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{5}{42}$

b) Notons B l'événement « Ne tirer aucun jeton vert ». On a $p(B)=\frac{C_4^3}{C_9^3}=\frac{1}{21}$

c) Notons C l'événement « Tirer au plus 2 jetons verts »

1ère méthode : $p(C)=p(\overline{A})=1-p(A)=1-\frac{5}{42}=\frac{37}{42}$

2ème méthode

$$p(C)=\frac{\underbrace{C_4^3}_{\text{Ne tirer aucun vert}}+\underbrace{C_5^1\times C_4^2}_{\substack{\text{Tirer exactement 1 vert :}\\ \text{- choix de la place du jeton vert}\\ \text{- choix d'1 vert et de 2 rouges}}}+\underbrace{C_5^2\times C_4^1}_{\text{Tirer exactement 2 verts}}}{C_9^3}=\frac{37}{42}$$

d) Soit D l'événement « Tirer exactement 1 jeton vert ». $p(D)=\frac{C_5^1\times C_4^2}{C_9^3}=\frac{5}{14}$

Commentaire sur l'exercice :

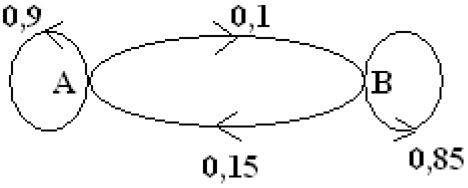
Selon toute logique, on doit retrouver les mêmes résultats dans les deux parties. En effet, tirer successivement sans remise 3 boules ou les tirer simultanément revient au même. Que l'on traite un tirage comme un arrangement ou comme un sous-ensemble, les questions a) et b) nous fournissent le même résultat si on a conservé l'ordre jusqu'au bout (numérateurs et dénominateurs des fractions) le même mode de comptage. En ce qui concerne la question c), si on travaille avec des arrangements, on induit ainsi un ordre. Il ne faut donc pas oublier de multiplier par 3, c'est à dire de choisir d'abord une place pour le jeton vert. Ce problème ne se pose pas avec des combinaisons. Conclusion : Il est plus facile de travailler avec des combinaisons.
Cette dernière remarque est valable car le type d'événements étudié ne fait pas intervenir d'ordre.

Exercice n°24

1. Puisqu'au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore, on aura $a_0=0{,}2$ donc $b_0=0{,}8$.

La matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial est donc $P_0=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$

2. Le graphe probabiliste sera constitué de deux sommets A et B origines et extrémités de deux arêtes orientées et pondérées. L'arête reliant A à B dans le sens A->B sera pondérée par la probabilité qu'une personne préférant Aurore une semaine donnée, ait changé pour Boréale la semaine suivante, soit 0,1.
On obtient ainsi :



3. a. La matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets est égale à :

$$M=\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\ 0,15 & 0,85\end{pmatrix}$$

b. On a :

$$P_1=P_0M=\begin{pmatrix}0,2 & 0,8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\ 0,15 & 0,85\end{pmatrix}$$

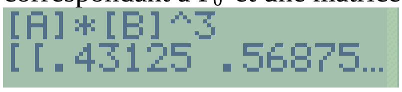
$$=\begin{pmatrix}0,2\times 0,9+0,8\times 0,15 & 0,2\times 0,1+0,8\times 0,85\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0,3 & 0,7\end{pmatrix}$$

4. a. Pour tout entier naturel n, $P_n=P_0M^n$

b. Ainsi, $P_3=P_0M^3=\begin{pmatrix}0,2 & 0,8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\ 0,15 & 0,85\end{pmatrix}^3$

A l'aide d'une calculatrice, après avoir défini dans le menu MATRICE, une matrice [A], de dimension 1×2 correspondant à P_0 et une matrice [B], de dimension 2×2 correspondant à M, on calcule :



Ainsi, $P_3=\begin{pmatrix}0,43125 & 0,56875\end{pmatrix}$

On peut estimer qu'au bout de la 3ème semaine de campagne, plus de 43% de la population sera favorable au parfum Aurore.

5. a. L'état stable $P=(a\ \ b)$ est solution de l'équation matricielle $P=PM \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\ 0,15 & 0,85\end{pmatrix}$.

De surcroît, on a $a+b=1 \Leftrightarrow b=1-a$

Les nombres a et b sont donc solutions du système $\begin{cases}a=0,9a+0,15b\\ a+b=1\Leftrightarrow b=1-a\end{cases}$ que l'on résout :

$$\begin{cases}a=0,9a+0,15b\\ a+b=1\Leftrightarrow b=1-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0,9a+0,15(1-a)\\ b=1-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-0,9a+0,15a=0,15\\ b=1-a\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0,25a=0,15\\ b=1-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{0,15}{0,25}=0,6\\ b=1-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0,6\\ b=1-0,6=0,4\end{cases}$$

L'état stable est donc $\boxed{P=(0,6\ \ 0,4)}$

b. On peut donc estimer qu'à terme, 60% de la population sera favorable au parfum Aurore, qui sera donc préféré au parfum Boréale