

Chapitre 1: Calcul des intérêts

Ce chapitre vise à familiariser le lecteur avec les notions suivantes :

- Intérêt
- Taux d'intérêt nominal
- Taux d'intérêt périodique
- Valeur acquise
- Valeur actuelle
- Capitalisation

Le lecteur apprendra à:

- Calculer la valeur acquise par un capital placé durant une période à un taux d'intérêt nominal donné;
- Calculer la valeur acquise par un capital placé à intérêts composés durant plusieurs périodes;

Ce chapitre se divise en 5 sections:

[Calcul des intérêts](#)

[Prêt sur une période d'intérêt](#)

[Notation des actuaires et notation mathématique](#)

[Valeur acquise et valeur actuelle à intérêt composé](#)

[Valeur acquise après un nombre non-entier de périodes](#)



Un fichier Excel est préparé pour faire des calculs relatifs aux problèmes.

[Cliquer ici pour aller chercher ce fichier.](#)

Accès à une série de [problèmes sur le chapitre 1](#).

[Retour au plan de cours](#)

Section 1.1 : Calcul des intérêts



Définitions :

- 1- Intérêt : coût de location de l'argent pour avoir le droit d'utiliser (jour de) l'argent pendant un temps donné.
- 2- Dates d'intérêt : dates où les intérêts sont versés.
- 3- Période d'intérêt : période entre 2 dates d'intérêt.



Ex. :

On emprunte 1000\$ le 1^{er} mars 2001

- 1- Si on rembourse 1100\$ le 1^{er} mars 2002
 - Intérêt = 100\$
 - Date d'intérêt = 1^{er} mars 2002
 - Période d'intérêt = 1an
- 2- Si on paye 50\$ le 1^{er} septembre 2001 pour pouvoir poursuivre l'emprunt et qu'on rembourse 1050\$ le 1^{er} mars 2002
 - Dates d'intérêt = 1^{er} septembre 2001 et 1^{er} mars 2002
 - 2 périodes de 6 mois

Un prêt qui s'étend sur plusieurs périodes peut-être vu comme une suite de prêts, chacun étant sur une seule période :



Ex. :

Emprunter 1000\$ le 1^{er} mars 2001, puis

- 1- Payer 50\$ le 1^{er} septembre 2001 et 1050\$ le 1^{er} mars 2002; ou rembourser 1050\$ puis emprunter 1000\$ au 1^{er} septembre 2001 et rembourser 1050\$ au 1^{er} mars 2002.
- 2- Rembourser 0\$ le 1^{er} septembre 2001 et 1102,50\$ le 1^{er} mars 2002.



Définition :

Le fait d'additionner les intérêts à la dette porte le nom de capitalisation des intérêts.

Section 1.2 : Prêts sur une période d'intérêt

Remarque :

On emprunte 100\$, sur lesquels on doit rembourser 0,04\$ par dollar emprunté tous les 6 mois

- 1- Après 6 mois, on doit 104\$ soit $100\$ + 100 * 0,04$
- 2- Après 12 mois, on doit 108,16\$ soit $104\$ + 104 * 0,04$ (si on ne paie pas le premier intérêt de 4\$)

Taux d'intérêt = 8% capitalisé 2 fois par an.

**Définitions :**

- 1- Taux d'intérêt nominal = c'est le taux d'intérêt annuel j nommé par une institution, lorsque ce taux ne tient pas compte de la capitalisation des intérêts. Dans l'exemple précédent, 8% est un taux nominal.
- 2- Taux d'intérêt périodique = le nombre i tel que i \$ soit le montant d'intérêt crédité à la fin d'une période pour un prêt (emprunt) de 1\$

effectué au début de la période, $i = \frac{j}{m}$ lorsqu'il y a m capitalisations par année. Dans l'exemple précédent, le taux périodique est de 4%.

On pourrait aussi avoir :

$$\text{Taux périodique} = \frac{\text{Taux nominal}}{\text{Nombre de périodes dans l'année}}$$

**Définitions :**

- 1- Capital = le montant d'argent prêté (ou emprunté)
- 2- Valeur acquise = capital + intérêts
- 3- Capitalisation = le fait d'additionner les intérêts au capital pour produire de l'intérêt.

On parlera de taux j capitalisé soit mensuellement, trimestriellement, semestriellement, etc.



Ex. :

(Voir plus haut)

Capital = 100\$

Valeur acquise en 1 an = 108,16\$

**Formule fondamentale des intérêts simples :**

Si 1\$ rapporte i \$ en intérêts en 1 période, la valeur acquise par un capital de M \$ en une période sera de $M*(1+i)$ ou $M*(1+dj)$ où d = longueur de la période en années et j = taux d'intérêt nominal.

NOTE : Si on emprunte (dépose) un montant A d'une (dans une) institution financière et si on rembourse (recueille) un montant B après n périodes de capitalisation de l'intérêt alors la différence $B - A$ est l'intérêt payé (gagné) pendant ces n périodes de capitalisation si aucun intérêt n'a été payé (prélevé) entre temps.



Ex. : Si le taux nominal est de 24% et qu'il y a 12 capitalisations par année, quel est l'intérêt payé pour un prêt de 1000\$ pendant un mois?

Solution :

S'il y a 12 capitalisations par an, le taux par mois est de $24\%/12 = 2\%$.

Chaque dollar emprunté occasionnera 0,02\$ d'intérêt par mois. Puisqu'il y a 1000\$ d'empruntés, il y aura un intérêt de 20\$ à payer à la fin du mois.

Section 1.3 : Notation des actuaires et notation mathématique

Pour calculer la longueur d de la période, il y a deux possibilités :

1- Utiliser les fonctions calendrier d'Excel

On peut entrer une date dans une cellule d'Excel. Il faut alors s'assurer que le format de la cellule correspond bien au format de date désiré. On peut pour cela utiliser la fonction DATE() d'Excel.

On peut faire des soustractions de dates dans Excel. Il faut alors s'assurer que le format de la cellule correspond bien à un format numérique.



(Voir [fichier Excel](#), p. Calcul de d)

2- Un mois = un douzième d'année

Tout au long de ce cours, nous conviendrons que chaque mois a une durée de $1/12$ d'année.

Notation :

On note par j_m ou (j, m) le taux nominal lorsqu'il y a m capitalisations de l'intérêt dans une année.

On peut dresser le tableau suivant des périodes les plus courantes :

Périodicité des intérêts	Durée d'une période (d)	Nombre de périodes en 1 an	Taux périodique
Mensuelle	$d = 1/12$	$m = 12$	$i = j/12$
Trimestrielle	$d = 1/4$	$m = 4$	$i = j/4$
Semestrielle	$d = 1/2$	$m = 2$	$i = j/2$
Annuelle	$d = 1$	$m = 1$	$i = j$



Ex. : Quel est le taux d'intérêt périodique si $j_4 = (j, 4) = 12\%$?

La durée d'une période est $\frac{1}{4}$ d'année.

Le taux d'intérêt périodique est donc $12\%/4 = 3\%$.

Quel est le taux d'intérêt nominal correspondant à un taux d'intérêt par mois de $1,75\%$

Il y a 12 périodes dans l'année. Donc $j_{12} = (j, 12) = 12 \times 1,75\% = 21\%$

Section 1.4 : Valeur acquise et valeur actuelle à intérêts composés

Lorsque les intérêts sont additionnés au capital pour la période suivante, on parle d'intérêts composés. Pour calculer la valeur acquise par un capital M pendant n périodes au taux i , il suffit de faire le calcul :

$$V = M * (1+i) * (1+i) * \dots * (1+i) = M * (1+i)^n$$

Après une période
Après deux périodes
Après n périodes

□ $V = M * (1+i)^n$

La notation couramment utilisée est la suivante :

FV = «*Future Value*» = Valeur acquise = VC (dans EXCEL)

PV = «*Present Value*» = Valeur actuelle = VA (dans EXCEL)

$FV = PV$

Ou

$VC = VA$



Ex. : Quelle est la valeur acquise par 100\$ en 4 ans au taux de 8% capitalisé semestriellement ?

Solution :

$$j_2 = 8\% \text{ d'où le taux d'intérêt périodique par semestre } i = \frac{8\%}{2} = 4\%$$

$$4 \text{ ans} = 8 \text{ semestres soit } 8 \text{ périodes}$$

$$FV = PV(1+i)^n = 100 * (1,04)^8 = 136,86\$$$



La fonction financière EXCEL VC (pour Valeur Cumulée) permet d'effectuer plus facilement ce calcul. Pour y accéder, on commence par cliquer avec le bouton gauche de la souris sur l'icône f_x dans la barre d'outils standard. Puis on sélectionne dans la catégorie de fonctions **Finances** la fonction **VC**.

Il y a 5 paramètres pour utiliser cette fonction. Les 3 premiers sont obligatoires et les 2 derniers sont facultatifs. Nous verrons leur utilisation dans des chapitres ultérieurs.

L'appel de la fonction VC se fait comme suit : VC(i, n, PMT, PV, Type) où

i	Taux périodique
n	Nombre de périodes
PMT	Mettre 0 ou laisser en blanc
PV	Valeur actuelle



Type	Facultatif (laisser en blanc ou mettre 0)
------	---

Ex. : Reprenons l'exemple précédent : Quelle est la valeur acquise par 100\$ en 4 ans au taux de 8% capitalisé semestriellement ?

Solution :

Il suffit d'utiliser la fonction VC(4%, 8, 0, 100, 0) et Excel donnera une valeur de -136,86\$. Le signe négatif s'explique par le fait que l'argent «voyagera» dans le sens opposé. Il faut déposer 100\$ pour pouvoir retirer 136,86\$.

(Voir [fichier Excel](#), p. *Calcul des intérêts et Intérêts composés*)

Avec la calculatrice TI BA II Plus, on peut obtenir le même résultat en faisant la séquence de touches suivante : 1.04 y^x 8 [=] x 100 [=] et le résultat apparaîtra à l'écran.

Ou encore, on peut utiliser la feuille de calcul TVM de la calculatrice :

Effacer la mémoire de la calculatrice : 2ND CLR TVM

Entrer le taux périodique d'intérêt : 4 I/Y

Entrer le nombre de périodes : 8 N

Entrer la valeur actuelle (en négatif pour avoir le résultat positif) : -100 PV

Enfin, calculer la valeur acquise : CPT FV qui apparaîtra en positif à l'écran.



Définition :

Le facteur $(1 + i)$ est appelé facteur de capitalisation.

Note : Dans la formule $VC = VA (1+i)^n$, il y a 4 variables soit VC, VA, i et n. La connaissance de 3 de ces variables, nous permet de déduire la 4^{ème}.

1.4.1 Calcul de la valeur actuelle d'un montant futur

- **Méthode de calcul**

**Définition :**

La valeur actuelle d'un capital est le montant qu'il faut placer aujourd'hui à un taux d'intérêt donné pour obtenir un montant voulu à un moment donné.

Le calcul se fait à l'aide de la formule: $FV = PV \cdot (1+i)^n$ ou encore $VC = VA (1+i)^n$

On cherche la valeur actuelle (PV) ou (VA) connaissant le montant voulu (FV) ou (VC), le taux périodique (i) et le nombre de périodes (n):

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n} = FV (1+i)^{-n}$$

**Définition :**

Le facteur $(1+i)^{-1}$ est appelé facteur d'actualisation



Ex. : On veut disposer d'un capital de 8000\$ dans 15 ans en déposant aujourd'hui une certaine somme d'argent dans une institution financière qui verse de l'intérêt au taux d'intérêt annuel de 10%. Quelle somme faut-il déposer?

Solution:

La période de capitalisation de l'intérêt est l'année, donc $n=15$.

Le taux d'intérêt périodique est le taux d'intérêt annuel, donc $i=10\%$.

Le montant désiré dans 15 ans est de 8000\$, donc $FV=8000\$$.

$$PV = \frac{8000}{(1,10)^{15}} = 1915,14$$



La fonction financière EXCEL VA permet d'effectuer plus facilement ce calcul. Pour y accéder, on commence par cliquer avec le bouton gauche de la souris sur l'icône f_x dans la barre d'outils standard. Puis on sélectionne dans la catégorie de fonctions **Finances** la fonction **VA**.

Il y a 5 paramètres pour utiliser cette fonction. Les 3 premiers sont obligatoires et les 2 derniers sont facultatifs. Nous verrons leur utilisation dans des chapitres ultérieurs. L'appel de la fonction VA se fait comme suit : $VA(i, n, PMT, FV, Type)$ où

i	Taux périodique
n	Nombre de périodes
PMT	Mettre 0 ou laisser en blanc
FV	Valeur acquise
Type	Facultatif (laisser en blanc ou mettre 0)



Ex. : Reprenons l'exemple précédent :

On veut disposer d'un capital de 8000\$ dans 15 ans en déposant aujourd'hui une certaine somme d'argent dans une institution financière qui verse de l'intérêt au taux d'intérêt annuel de 10%. Quelle somme faut-il déposer?

Solution : Il suffit d'utiliser la fonction Excel $VA(10\%, 15, 0, 8000, 0)$ et Excel donnera la valeur de $-1915,14$. Là encore la réponse est négative car l'argent voyage en sens inverse. Pour pouvoir retirer 8000\$ dans 15 ans, il faut commencer par déposer 1915,14\$ aujourd'hui.



Voir [fichier Excel](#), p. *Valeur actuelle*.

A l'aide de la calculatrice, on peut obtenir le même résultat avec la séquence de touches suivantes : $8000 \square (1.1 \ y^x \square 15 \) \square =$ et le résultat apparaîtra. Ou encore, on peut utiliser la feuille de calcul TVM de la calculatrice :

Effacer la mémoire de la calculatrice : $2^{ND} \square CLR \ TVM$

Entrer le taux périodique d'intérêt : $10 \square I/Y$

Entrer le nombre de périodes : $15 \square N$

Entrer la valeur acquise (en négatif pour avoir le résultat positif) $-8000 \square FV$

Calculer la valeur actuelle : $CPT \square PV$

Le résultat devrait apparaître à l'écran.

- [Application: Calcul de la valeur actuelle d'une dette payable dans le futur](#)

Lorsqu'une dette doit être remboursée par un versement unique qui aura lieu dans quelques périodes, la valeur de cette dette au moment présent est la valeur actuelle de ce versement au taux d'intérêt convenu du prêt.



Ex. Une dette porte intérêt au taux d'intérêt $j_2 = (j,2) = 12\%$ et doit être remboursée par un versement de 3000\$ dans un an et demi. S'il n'y a pas de pénalité pour payer un remboursement anticipé, combien faut-il verser aujourd'hui pour payer cette dette?

Solution:

La période est le semestre. Donc en un an et demi il y a 3 périodes.
Le taux d'intérêt périodique est $i=6\%$. Le versement est de $FV=3000\%$.

La valeur de PV est donc donnée par: $PV = \frac{3000}{(1,06)^3} = 2518,86$ ou par
VA(6%; 3; 0; -3000; 0)

- Application: Valeur actuelle d'un bénéfice à venir

Lorsqu'on doit évaluer aujourd'hui un projet qui rapportera un certain bénéfice dans l'avenir, l'évaluation doit correspondre à la valeur actuelle du bénéfice selon le taux d'actualisation convenu.



Ex. :On suggère un placement qui demanderait d'investir 10 000\$ tout de suite et qui rapporterait 13 000\$ dans 3 ans. Doit-on accepter, sachant qu'il est possible d'obtenir un taux d'intérêt de 10% par année pour des prêts qui garantissent la disponibilité à tout instant du capital?

Solution:

On cherche le montant qu'il faut placer à la banque aujourd'hui à 10% par année pour avoir 13 000\$ dans 3 ans.

La période est l'année donc $n=3$ et $i=10\%$.

La valeur de FV est de 13 000\$:

$$PV = \frac{13000}{(1,10)^3} = 9767,09$$

On aura ce montant en déposant aujourd'hui

Ce projet, s'il était accepté, ferait donc perdre 232,91\$ à l'investisseur lorsque la location de l'argent est faite à 10% par année.

1.4.2 Calcul du taux d'intérêt périodique

Lorsqu'on cherche à déterminer à quel taux d'intérêt on doit placer un montant PV pour qu'il soit de valeur FV après n périodes, on utilise la formule

$$FV = PV(1+i)^n \quad (1+i)^n = \frac{FV}{PV} \quad i = \left(\frac{FV}{PV}\right)^{1/n} - 1$$



La fonction financière EXCEL **TAUX** permet d'effectuer plus facilement ce calcul. Pour y accéder, on commence par cliquer avec le bouton gauche de la souris sur l'icône f_x dans la barre d'outils standard. Puis on sélectionne dans la catégorie de fonctions **Finances** la fonction **TAUX**.

Il y a 5 paramètres pour utiliser cette fonction. Le premier, le deuxième et le troisième sont obligatoires et les 2 restants sont facultatifs. Nous verrons leur utilisation dans des chapitres ultérieurs. L'appel de la fonction TAUX se fait comme suit : TAUX(n, VPM, VA, VC, Type) où

n	Nombre de périodes
VPM	Mettre 0 ou laisser en blanc
VA	Valeur actuelle
VC	Valeur acquise
Type	Facultatif (laisser en blanc ou mettre 0)

Remarque : Les valeurs acquise et actuelle doivent être de signe opposé.



Ex. : On place 1000\$ à intérêt composé durant un an. On accumule ainsi 120\$ d'intérêt. Quel est le taux d'intérêt nominal de ce placement si la capitalisation est trimestrielle?

Solution:

$$i = \left(\frac{1000 + 120}{1000}\right)^{1/4} - 1 = 2,8737\%$$

Le taux d'intérêt nominal est donc de $j_4 = 4 * 2,8737\% = 11,5\%$.



Voir [fichier Excel](#), p. *Taux périodique*.

On peut obtenir le même résultat à l'aide de la séquence de touches suivante sur la calculatrice :

1.12 y^x 0.25 $=$ - 1 $=$ et le résultat 0.0287 apparaîtra.

Ou encore, on peut se servir de la feuille de calcul TVM de la calculatrice :

Effacer la mémoire de la calculatrice : $\boxed{2ND}$ $\boxed{CLR TVM}$

Entrer la valeur actuelle : 1000 .

Entrer le nombre de périodes : 4 .

Entrer la valeur acquise (en négatif si PV est positif) -1120 .

Calculer le taux périodique d'intérêt : .

Le résultat devrait apparaître à l'écran.

1.4.3 Calcul du nombre de périodes de capitalisation de l'intérêt

On cherche ici, à partir de PV, FV et i la valeur de n correspondante :

En partant de $FV = PV \cdot (1+i)^n$ on trouve $(1+i)^n = \frac{FV}{PV}$.

En utilisant les logarithmes, on obtient $n \cdot \log(1+i) = \log\left(\frac{FV}{PV}\right)$

d'où $n = \frac{\log\left(\frac{FV}{PV}\right)}{\log(1+i)}$



La fonction financière EXCEL *NPM* permet d'effectuer plus facilement ce calcul. Pour y accéder, on commence par cliquer avec le bouton gauche de la souris sur l'icône f_x dans la barre d'outils standard. Puis on sélectionne dans la catégorie de fonctions **Finances** la fonction **NPM**.

Il y a 5 paramètres pour utiliser cette fonction. Les 3 premiers sont obligatoires et les 2 derniers sont facultatifs. Nous verrons leur utilisation dans des chapitres ultérieurs.

L'appel de la fonction NPM se fait comme suit : $NPM(i, VPM, VA, VC, Type)$ où

i	Taux périodique
VPM	Mettre 0 ou laisser en blanc
VA	Valeur actuelle
VC	Valeur acquise
Type	Facultatif (laisser en blanc ou mettre 0)

Remarque : Les valeurs acquise et actuelle doivent être de signe opposé.



Ex. : On place 1000\$ à intérêt composé dans un compte qui porte intérêt au taux de 10% par année.

Au bout de combien de temps ce montant aura-t-il doublé? Combien de temps faudra-t-il pour qu'il triple?

Solution : On a ici que $PV=1000\$$ et $i = 10\%$.

Pour avoir $FV = 2000\$$ on utilisera la fonction NPM d'Excel :
 $NPM(10\%, 0, 1000, -2000, 0) = 7,27$ années. i.e. après 7 ans on n'aura pas encore 2000\$ et après 8 ans on aura plus que 2000\$.

Pour avoir $FV = 3000\$$ on utilisera la fonction NPM d'Excel :
 $NPM(10\%, 0, 1000, -3000, 0) = 11,52$ années. i.e. après 11 ans on n'aura pas encore 3000\$ et après 12 ans on aura plus que 3000\$.

Nous verrons dans la section suivante comment calculer exactement le moment où on atteindra la valeur de 2000\$.

Avec la calculatrice, on pourra obtenir le même résultat à l'aide de la séquence de touches suivante :

Effacer la mémoire de la calculatrice :

Entrer la valeur actuelle : 1000

Entrer le taux périodique : 10

Entrer la valeur acquise (de signe opposé à celui de PV) : 2000

Calculer le nombre de périodes : et le résultat (7,27) apparaîtra à l'écran.

Section 1.5 : Valeur acquise en un nombre non-entier de périodes

Pour calculer la valeur acquise par un capital en une fraction de période, la pratique diffère selon les conditions du prêt. On utilisera parfois la formule des intérêts simples et parfois la formule des intérêts composés.



Voir [fichier Excel](#), p. *Nombre fract. de période*

Calcul à l'aide de la formule des intérêts composés

On utilise la formule des intérêts composés même si n est non-entier



Ex. : Si le taux d'intérêt nominal est de $j_2 = 12\%$, et si la dette est de 20 000 \$ lors d'une date d'intérêt, elle sera de $20\,000(1 + 6\%)^{1/6}$ un mois plus tard.

Les intérêts seront donc de 195,17\$.

Calcul à l'aide de la formule des intérêts simples

Lorsque c'est la formule d'intérêt simple qui est utilisée sur la dernière fraction de période, c'est le taux d'intérêt nominal multiplié par la fraction de période (mesurée en année) qui est le taux d'intérêt périodique pour la fraction de période.



Ex. : Si le taux d'intérêt nominal est de $j_2=12\%$, et si la dette est de 20 000\$ lors d'une date d'intérêt, elle sera de $20\,000(1+12\%/12)$ un mois plus tard. Les intérêts seront donc de 200,00\$.

Remarque : Généralement, la formule des intérêts simples, lorsqu'elle est utilisée, s'applique sur la dernière fraction de période. Pour la partie entière du nombre de périodes, les intérêts sont habituellement capitalisés et c'est donc la formule des intérêts composés qui devra être utilisée.



Ex. :

Si le taux d'intérêt nominal est de $j_2= (j, 2) =12\%$, et la dette est de 20 000\$ lors d'une date d'intérêt, elle sera de $20000(1,06)^3(1+3*12\%/12)$ vingt et un mois plus tard. Les intérêts seront donc de 4534,93\$.



- Ex :** On place 1000\$ à intérêt composé dans un compte qui porte intérêt au taux de 10% par année. Au bout de combien de temps ce montant aura-t-il doublé si les intérêts sont calculés, pendant la dernière période avec
1. La formule des intérêts composés?
 2. La formule des intérêts simples?

Solution :

1) On a vu dans la section précédente que le nombre de périodes devrait être de 7,27 années lorsqu'on utilise la fonction NPM dans Excel.

0,27 année représente 100 jours. Il faudra donc 7 ans et 100 jours pour que ce montant ait doublé.

2) Si c'est la formule des intérêts simples qui s'applique pour la dernière fraction de période, nous devons d'abord calculer quelle est la somme d'argent accumulée après 7 ans et puis les intérêts manquants pour la dernière période :

Après 7 ans on aura accumulé $1000 \cdot (1,1)^7 = 1948,72\$$. Il manquera donc 51,28\$.
En appliquant la formule des intérêts simples :

$1948,72 \cdot (1 + d \cdot 10\%) = 2000$ Donc $d = 0,263$ année ou 96 jours.

Donc, si la formule des intérêts simples s'applique, il faudra 4 jours de moins.